数理解析研究所講究録
第 632 巻 1987 年 134-173

Characteristic varieties of highest weight modules and primitive quotients

東北大理 谷崎俊之 (Toshiyuki Tanisaki)

§0. 序

$\boxed{0.1}$ 本稿では，半単純 Lie 環の最高 weight 加群及び包絡環の primitive quotient の特性多様体について述べる。特に包絡環の primitive ideal はその特性多様により特徴付けられるのではないかという Borho-Brylinski の問題（[BoB 2]）について考察する。

$\boxed{0.2}$ まず話の出発点になる Beilinson-Bernstein 圏同値について述べる。G を $\mathbb{C}$ 上の連結半単純 Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 環，$U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の包絡環とする。また X を G の旗多様体とし $\mathcal{D}_X$ を X 上の線形微分作用素のなす環の層とする。G の X への自然な作用により環準同型写像 $U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ が導びかれる。よって $U(\mathfrak{g})$-加群 M に対して $\mathcal{D}_X$-加群（の層）$\mathcal{D}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$ が定まる。

「Prop. 0.1 ([BeB]) 対応 $M \rightsquigarrow \mathcal{D}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$ は，自明な中心指標を持つ有限生成 $U(\mathfrak{g})$-加群のつくる abel 圏と，連接的 $\mathcal{D}_X$-加群のつくる abel 圏の同値を導びく。■

$\boxed{0.3}$ 有限生成 $U(\mathfrak{g})$-加群 M に対してその随伴多様体 (associated variety) $V(M)$ が，$\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ の部分代数

多様体として定義される。以下しばしばKilling形式により$\mathfrak{g}^*$と$\mathfrak{g}$を同一視して$V(M)$を$\mathfrak{g}$の部分代数多様体と思う。また連接的$\mathcal{D}_X$-加群$\mathcal{M}$に対してその特性多様体(characteristic variety) $Ch(\mathcal{M})$が余接束T^*Xの部分代数多様体として定義される。$V(M)$, $Ch(\mathcal{M})$の定義は例えば[BoB2]を参照されたい。自明な中心指標をもつ有限生成$U(\mathfrak{g})$-加群Mに対して$Ch(\mathcal{D}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M)$を単に$Ch(M)$と書く。$Ch(M)$と$V(M)$の関係は次のとおり。$T^*X \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$を$G$の$X$への作用から導かれる自然な写像とする(moment map)。このとき,

「<u>Prop. 0.2</u> ([BoB2]) Mが自明な中心指標をもつ有限生成$U(\mathfrak{g})$-加群なら,$V(M) = \gamma(Ch(M))$である。」

$\boxed{0.4}$ 以下の目的は,自明な中心指標をもつ既約な最高weight加群L,あるいは自明な中心指標をもつ$U(\mathfrak{g})$のprimitive ideal Iによる$U(\mathfrak{g})$の商$U(\mathfrak{g})/I$についてその随伴多様体及び特性多様体を考察する事である。$V(U(\mathfrak{g})/I)$がどうなるかは知られている(Prop. 2.6, Joseph, 堀田, Borho-Brylinski)。$V(L)$を全てのLについて求める事と,$Ch(U(\mathfrak{g})/I)$を全てのIについて求める事は同値である(Prop. 1.4, Borho-Brylinski)。よって問題は

「<u>Problem 0.3</u> 自明な中心指標をもつ既約最高weight加群Lに対して$Ch(L)$を決定せよ。」

「Problem 0.4 自明な中心指標をもつ $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal I に対して $Ch(U(\mathfrak{g})/I)$ を決定せよ。」

上に述べた事から Problem 0.3 が解ければ Problem 0.4 も解ける事になる。

$\boxed{0.5}$ G が A_n 型のときには Problem 0.3, 0.4 の答は予想されており $n \leqq 5$ で確かめられている (§3.1)。しかし一般の場合の予想はまだない。

本稿では Problem 0.3, 0.4 に関して知られている幾つかの部分的結果を組み合わせて, G の rank が 3 以下のときに $Ch(L)$ 及び $Ch(U(\mathfrak{g})/I)$ を決定する。Borho–Brylinski ([BoB2]) は $Ch(U(\mathfrak{g})/I)$ が常に既約であろうと予想したが, 我々の計算から B_3, C_3 型で反例が存在する事もわかる。また本稿ではこの Borho–Brylinski 予想の一つの修正案を提出する (Conjecture 4.1)。これが正しければ次の予想が正しい事がわかる。

「Conjecture 0.5 自明な中心指標を持つ $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal 全体の集合を $\mathfrak{X}_0$ とする。

(i) $I_1, I_2 \in \mathfrak{X}_0$ に対して $Ch(U(\mathfrak{g})/I_1) = Ch(U(\mathfrak{g})/I_2)$ ならば $I_1 = I_2$ である。

(ii) $\mathfrak{X}_0$ と $\bigsqcup_{\mathcal{O} \in Nilp_{sp}} Irr(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}^+})$ の間に自然な一対一対応がある。ここで $Nilp_{sp}$ は $\mathfrak{g}$ の特殊巾零共役類の集合 (§2.3),

$\mathfrak{n}^+$ は G のひとつの Borel 部分群の unipotent radical の Lie 環, $\mathrm{Irr}(\overline{\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+})$ は $\overline{\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+}$ の既約成分の集合である。■

§1. 特性多様体

$\boxed{1.1}$ G の Borel 部分群 B 及び B に含まれる G の極大 Torus H をとり固定する。$\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$ をそれぞれ B, H の Lie 環とする。Δ を $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の root 系, Δ^+ を $\mathfrak{b}$ に対応する正 root の全体として $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha\in\mathfrak{h}^*$ とおく。W を Weyl 群とする。$w\in W$ に対して $-w\rho-\rho$ を最高 weight に持つ Verma 加群を M_w, その既約な商を L_w とする。自明な中心指標をもつ有限生成 $U(\mathfrak{g})$-加群であって B-作用をもつもののつくる abel 圏を $\mathcal{O}_0$ と書く。M_w, L_w は $\mathcal{O}_0$ の対象で, $\mathcal{O}_0$ の Grothendieck 群 $K(\mathcal{O}_0)$ は,

$$K(\mathcal{O}_0)=\bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[M_w]=\bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[L_w]$$

と分解される。

$\boxed{1.2}$ B の unipotent radical の Lie 環を $\mathfrak{n}^+$ とする。また $X=G/B$ の B-軌道への分解を $X=\coprod_{w\in W}X_w$ $(X_w=BwB/B)$ とする。$M\in\mathcal{O}_0$ ならば $V(M)$ は $\mathfrak{n}^+$ の部分代数多様体である。よって $Ch(M)\subset\gamma^{-1}(V(M))\subset\gamma^{-1}(\mathfrak{n}^+)=\coprod_{w\in W}T^*_{X_w}X=\bigcup_{w\in W}\overline{T^*_{X_w}X}$。ここで $T^*_{X_w}X$ は X_w の余法束とする。特性多様体の包含性により $Ch(M)$ の任意の既約成分はある $w\in W$ に対する $\overline{T^*_{X_w}X}$ と一致

する。$\mathrm{Ch}(M)$の各既約成分での重複度をこめて考えると，Mの特性 cycle (characteristic cycle) $\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}(M) \in \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}_{\geq 0}[\overline{T^*_{X_w}X}]$ が定義される。$\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}$ の加法性により，$\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}$ は $\mathbb{Z}$-線形写像

$$K(\mathcal{O}_a) \xrightarrow{\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}} \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[\overline{T^*_{X_w}X}]$$

に拡がる。$\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}(L_w) = \sum_{y\in W} m(y,w)[\overline{T^*_{X_y}X}]$ により $m(y,w) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を定めて $\Sigma(w) = \{y \in W \mid m(y,w) > 0\}$ とおくと，$\mathrm{Ch}(L_w) = \bigcup_{y\in\Sigma(w)} \overline{T^*_{X_y}X}$ である。

$\boxed{1.3}$ Prop. 0.1 により，$\mathcal{O}_0$ は，連接的 $\mathcal{D}_X$-加群であってB-作用をもつもののつくる abel 圏 $\mathcal{M}$ と同値である。§1.2 により $\mathcal{M}$ の対象が holonomic になる事は明らかだが，さらに regular holonomic になる事がわかる ([BK])。実際 $\partial X_w = \overline{X_w} - X_w$ とおくとき，$\mathcal{D}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} L_w \cong {}^{\pi}\mathcal{B}_{X_w|X-\partial X_w}$ である。ここで $\mathcal{B}_{X_w|X-\partial X_w} = \underline{H}^{\mathrm{codim} X_w}_{X_w}(\mathcal{O}_{X-\partial X_w})$，${}^{\pi}\mathcal{B}_{X_w|X-\partial X_w}$ はその minimal extension である。

W上の Bruhat order を $\leq$ と書く ($y \leq w \Leftrightarrow X_y \subset \overline{X_w}$)。また W の単純鏡影の全体を S とする。$w \in W$ に対して $\mathcal{L}(w) = \{s \in S \mid sw < w\}$, $R(w) = \{s \in S \mid ws < w\} = \mathcal{L}(w^{-1})$ とおく。

「<u>Lemma 1.1</u>

(i) $w \in \Sigma(w)$ で $m(w,w) = 1$。

(ii) $y \in \Sigma(w)$ ならば $y \leq w$。

(iii) $y < w$ とする。X_y が $\overline{X_w}$ 中で non-singular ならば，

$m(y,w)=0$。特に w が W の放物型部分群の最長元なら $\Sigma(w)=\{w\}$。

(iv) $y\in\Sigma(w)$ なら $\mathcal{L}(y)\supset\mathcal{L}(w)$。┘

(証明) (i),(ii),(iii) は $\mathcal{D}_X\otimes_{U(\mathfrak{g})}L_w\cong{}^{\pi}\mathcal{B}_{X_w|X-\partial X_w}$ により明らか。(iv) は次から従う。B を含む放物型部分群で Levi part の Weyl 群が $W_1=\langle\mathcal{L}(w)\rangle$ となるものを P とすると，X の P-軌道への分解は $X=\coprod_{y\in W_1\backslash W}(PyB/B)$ で与えられ，これは X の Whitney stratification になる。また X_y が PyB/B 中で open になるための条件は $\mathcal{L}(y)\supset\mathcal{L}(w)$ である。■

$\boxed{1.4}$ G の $X\times X$ への対角型作用の軌道分解は $X\times X=\coprod_{w\in W}D_w$ $(D_w=G\cdot(eB,wB))$ で与えられる。$X\times X$ から第一成分への射影により $X\times X$ を $X=G/B$ 上の fiber 束と思うとき，$X\times X\cong G\overset{B}{\times}X$，また $D_w=G\overset{B}{\times}X_w$ である。よって正接的 $\mathcal{D}_{X\times X}$-加群であって G-作用をもつもののつくる abel 圏を $\mathcal{N}$ と書くと，$\mathcal{N}\xrightarrow[\sim]{i^*}\mathcal{M}$ である。ここで $X\xrightarrow{i}X\times X$ は $i(gB)=(eB,gB)$ により与えられるものとする。$\mathfrak{M}_w,\mathfrak{L}_w\in\mathcal{N}$ を $i^*(\mathfrak{M}_w)=\mathcal{D}_X\otimes_{U(\mathfrak{g})}M_w$，$i^*(\mathfrak{L}_w)=\mathcal{D}_X\otimes_{U(\mathfrak{g})}L_w$ により定める。$\mathfrak{L}_w\cong{}^{\pi}\mathcal{B}_{D_w|(X\times X)-\partial D_w}$ がわかる。$\mathfrak{M}\in\mathcal{N}$ ならば $Ch(\mathfrak{M})\subset\bigcup_{w\in W}\overline{T^*_{D_w}(X\times X)}$ である。$Z_w=\overline{T^*_{D_w}(X\times X)}$ とおくと§1.2 と同様にして $K(\mathcal{N})\xrightarrow{Ch}\bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[Z_w]$ が定まり

$$\begin{tikzcd}
K(\mathcal{N}) \arrow[r, "\underline{\underline{Ch}}"] \arrow[d] & \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[Z_w] \arrow[d] \\
K(\mathcal{O}_0) \arrow[r, "\underline{\underline{Ch}}"] & \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[\overline{T^*_{X_w}X}]
\end{tikzcd}$$

は可換である。ここで左のタテ方向の写像は $\mathcal{N} \overset{i^*}{\Rightarrow} \mathcal{M} \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_0$ により導びかれる同型写像，右のタテ方向の写像は $[Z_w] \mapsto [\overline{T^*_{X_w}X}]$ により定まる $\mathbb{Z}$－線型写像である。特に $\underline{\underline{Ch}}(\mathcal{L}_w) = \sum_{y\in W} m(y,w)[Z_w]$ となる。さて $X\times X \xrightarrow{\delta} X\times X$ $((g_1B, g_2B) \mapsto (g_2B, g_1B))$ は G－作用を保つ同型写像で $\delta(D_w) = D_{w^{-1}}$。よって $\delta^*(\mathcal{L}_w) = \mathcal{L}_{w^{-1}}$。さらに

$$\begin{tikzcd}
K(\mathcal{N}) \arrow[r, "\underline{\underline{Ch}}"] \arrow[d, "\delta^*"'] & \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[Z_w] \arrow[d] & {[Z_w]} \arrow[d, mapsto] \\
K(\mathcal{N}) \arrow[r, "\underline{\underline{Ch}}"] & \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[Z_w] & {[Z_{w^{-1}}]}
\end{tikzcd}$$

が可換な事から次がわかる。

「<u>Lemma 1.2</u> $m(y,w) = m(y^{-1}, w^{-1})$。特に $\Sigma(w) = (\Sigma(w^{-1}))^{-1}$，よって $y \in \Sigma(w)$ ならば $R(y) \supset R(w)$ である。」

$\boxed{1.5}$ Weyl 群の左 cell 等の概念について復習する（[J1], [KL1] 参照）。$K(\mathcal{O}_0)$ 中で $[L_w] = \sum_{y\in W} a(y,w)[M_y]$ とする。整数 $a(y,w)$ は（少なくとも原理的には）計算可能である（Kazhdan－Lusztig 予想 [KL1]。[BeB], [BK] により証明された。）。そこで $a(w) = \sum_{y\in W} a(y,w)\, y \in \mathbb{C}[W]$ とおくと，$\mathbb{C}[W] = \bigoplus_{w\in W} \mathbb{C}\, a(w)$。$\{a(w) \mid w \in W\}$ のある部分集合で張られ

ような$\mathbb{C}[W]$の部分空間を"a－基底型部分空間"と呼ぶ。

$w \in W$に対して$a(w)$を含むa－基底型部分空間のうちでWの左作用に関して不変な最小のものを$\overline{V}^L_w$と書く。またW上のpreorder $\underset{L}{\geq}$及び同値関係$\underset{L}{\sim}$を，$[w \underset{L}{\geq} y \Leftrightarrow \overline{V}^L_w \supset \overline{V}^L_y]$，$[w \underset{L}{\sim} y \Leftrightarrow \overline{V}^L_w = \overline{V}^L_y]$により定める。$\underset{L}{\sim}$の同値類を左cellといい，$V^L_w := \overline{V}^L_w / \sum_{\overline{V}^L_y \subsetneq \overline{V}^L_w} \overline{V}^L_y$上の$W$の表現を左cell表現という。$w$を含む左cellを$\mathcal{C}^L_w$と書くと$\mathcal{C}^L_w$に対応して$V^L_w$の基底が定まる。下線部の$W$の左作用を$W$の右作用（あるいは$W \times W$の両側作用）に置き換えて，$\overline{V}^R_w$，$\underset{R}{\geq}$，$\underset{R}{\sim}$，$V^R_w$，$\mathcal{C}^R_w$（あるいは$\overline{V}^{LR}_w$，$\underset{LR}{\geq}$，$\underset{LR}{\sim}$，$V^{LR}_w$，$\mathcal{C}^{LR}_w$）が全く同様に定義される。

1.4と同様の議論から（あるいはKazhdan－Lusztig予想から）$a(y,w) = a(y^{-1}, w^{-1})$がわかるので$w \underset{L}{\geq} y \Leftrightarrow w^{-1} \underset{R}{\geq} y^{-1}$．また$w \underset{L}{\sim} y \Leftrightarrow w^{-1} \underset{R}{\sim} y^{-1}$である。$W$の既約表現の同型類の集合を$\hat{W}$と書く。$W$の既約表現は全て自己双対的なので$W \times W$－加群として$\mathbb{C}[W] \cong \bigoplus_{\sigma \in \hat{W}} (\sigma \otimes \sigma)$である。これから$w \underset{LR}{\sim} w^{-1}$がわかる。

$\boxed{1.6}$ 自明な中心指標をもつ$U(\mathfrak{g})$のprimitive ideal全体の集合を$\mathfrak{X}_0$とする。すなわち$\mathfrak{X}_0 = \{\mathrm{Ann}\, M \mid M$は自明な中心指標を持つ既約$U(\mathfrak{g})$－加群$\}$，ここで$\mathrm{Ann}\, M = \{u \in U(\mathfrak{g}) \mid u \cdot M = 0\}$である。$I_w = \mathrm{Ann}\, L_w$とおくとDuflo [D]により$\mathfrak{X}_0 = \{I_w \mid w \in W\}$が知られている。さらに，

「Prop. 1.3 ([J1], [V]) $I_w \subset I_y \Leftrightarrow w \underset{L}{\geq} y$, 特に $I_w = I_y \Leftrightarrow w \underset{L}{\sim} y$ である。」

よって $\mathcal{X}_0 \simeq W/\underset{L}{\sim}$ である。

$\boxed{1.7}$ T^*X は $X=G/B$ 上の fiber 束として $G\times^B\mathfrak{n}^+$ と自然に同型である。I_w は $U(\mathfrak{g})$ の両側 ideal なので $Ch(U(\mathfrak{g})/I_w)$ は T^*X の G−不変部分代数多様体である。

「Prop. 1.4 ([BoB2]) $Ch(U(\mathfrak{g})/I_w) = G\times^B V(L_{w^{-1}})$ $(\forall w\in W)$」

よって次がわかる。

「Corollary 1.5 ([J3], [BoB2]) $w \underset{R}{\geq} y \Rightarrow V(L_w)\supset V(L_y)$, 特に $w \underset{R}{\sim} y \Rightarrow V(L_w) = V(L_y)$」

§2. Weyl 群の表現との関係

$\boxed{2.1}$ $\mathfrak{g}$ の巾零共役類の集合を Nilp と書く。$O\in \mathrm{Nilp}$ に対して，O 上の G−作用を持つ既約局所系の同型類の集合を $\mathcal{S}_O$ と書く。$x\in O$ をひとつ固定するとき，$\mathcal{S}_O$ は $A(x) = Z_G(x)/Z_G(x)^\circ$ の既約表現の同型類の集合 $\hat{A}(x)$ と自然に一対一に対応する。これを $\mathcal{S}_O \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \hat{A}(x)$ $(\xi \longleftrightarrow \chi_\xi)$ とする。$\dim X = d$ とおくと $X_x = \{gB\in X \mid x\in g\cdot\mathfrak{n}^+\}$ は純次元 $d_O := d - \frac{1}{2}\dim O$ を持つ([Spa])。X_x の top homology 群 $H_{2d_O}(X_x) = (H_c^{2d_O}(X_x, \mathbb{C}))^*$ には W の作用が定義されて，$A(x)$ の自然な作用と可換である(Springer 表現，[Spr] 参照)。$W\times A(x)$−

加群として $H_{2d_0}(X_x)=\bigoplus_{\xi\in S_0}(\tau_{(O,\xi)}\otimes\chi_\xi)$ （$\tau_{(O,\xi)}$ は W-加群）と分解するとき，$\tau_{(O,\xi)}$ は (0) または既約 W-加群になる。さらに $\overline{S}_0=\{\xi\in S_0 \mid \tau_{(O,\xi)}\neq(0)\}$ とおくとき，

$\bigsqcup_{O\in Nilp}\overline{S}_0\longrightarrow\widehat{W}$ （$\overline{S}_0\ni\xi\longmapsto\tau_{(O,\xi)}\in\widehat{W}$）は全単射である。

$\xi=1_O$ のとき，すなわち χ_ξ が単位表現のときは明らかに $\tau_{(O,\xi)}\neq(0)$。これを $Sp(O)$ と書く。

一般に純次元代数多様体 Y の既約成分の集合を $Irr(Y)$ と書く。$D=\{(y,gB)\in O\times X \mid y\in g\mathfrak{n}^+\}$ を $X=G/B$ 上の fiber 束とみると $D\cong G\overset{B}{\times}(O\cap\mathfrak{n}^+)$，$O=G/Z_G(x)$ 上の fiber 束とみると $D\cong G\overset{Z_G(x)}{\times}X_x$ である。よって $Irr(X_x)$ から $Irr(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+})\simeq Irr(O\cap\mathfrak{n}^+)\simeq Irr(D)$ への全射

(2.1) $\quad Irr(X_x)\xrightarrow{k} Irr(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+})$

が定義されて，各点の逆像はひとつの $A(x)$-軌道になる。よって $Irr(X_x)/_{A(x)}\simeq Irr(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+})$。$Sp(O)=H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ なので，$Y\in Irr(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+})$ に対して $g_Y:=\sum_{C\in k^{-1}(Y)}[C]\in H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ とおくと，$\{g_Y \mid Y\in Irr(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+})\}$ は $Sp(O)$ の基底となる。特に $\dim Sp(O)=\#(Irr(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+}))$ である。

$\boxed{2.2}$ $w\in W$ に対して Joseph の Goldie rank 多項式（[J2]）を P_w とする。すなわち $P_w=\sum_{y\in W}a(y,w)(y^{-1}\rho)^{m_w}\in S^{m_w}(\mathfrak{h}^*)$。ここで m_w は右辺が non-zero になる最小の非負整数，また $S^{m_w}(\mathfrak{h}^*)$ は $\mathfrak{h}^*$ の m_w 次対称テンソルのなす空間

である。

「**Prop. 2.2** ([J 2])

(i) $\mathbb{C}P_w = \mathbb{C}P_y \Leftrightarrow w \underset{L}{\sim} y$

(ii) $w \underset{LR}{\sim} y$ なら $m_w = m_y$。

(iii) $\sigma(w) := \sum_{y \in \mathcal{C}_w^{LR}} \mathbb{C}P_y$ は W-不変でしかも既約である。

(iv) $\sigma(w) = \bigoplus_{y \in \mathcal{C}_w^{LR}/\underset{L}{\sim}} \mathbb{C}P_y$

(v) $\dim \mathrm{Hom}_W(\sigma(w), S^m(\mathfrak{h}^*)) = \begin{cases} 0 & m < m_w \\ 1 & m = m_w \end{cases}$

(vi) $\sigma(w) \cong \sigma(y) \Leftrightarrow w \underset{LR}{\sim} y$ 」

よって $W/\underset{LR}{\sim} \hookrightarrow \hat{W}$ が $w \mapsto \sigma(w)$ により定まる。この像を $\hat{W}_{sp}$ と書く。$\hat{W}_{sp}$ は Lusztig により定義された"特殊表現"の全体と一致する([BV 1, 2])。

$\boxed{2.3}$ ある $\mathcal{O} \in \mathrm{Nilp}$ に対して $\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}^+}$ の既約成分になっているような $\mathfrak{n}^+$ の部分代数多様体を、($\mathcal{O}$ に付随した)軌道的多様体 (orbital variety) と言う。$w \in W$ に対して $Y^l(w) = \overline{B \cdot (\mathfrak{n}^+ \cap w^{-1}\mathfrak{n}^+)}$, $Y^r(w) = \overline{B \cdot (\mathfrak{n}^+ \cap w\mathfrak{n}^+)}$ とおく。また $\mathcal{O}_w^{lr} \in \mathrm{Nilp}$ を $\overline{\mathcal{O}_w^{lr}} = \overline{G \cdot (\mathfrak{n}^+ \cap w\mathfrak{n}^+)}$ により定める。$Y^l(w)$, $Y^r(w)$ は $\mathcal{O}_w^{lr}$ に付随した軌道的多様体である。また任意の軌道的多様体はある $w \in W$ に対する $Y^r(w)$ と一致する([St])。

柏原, Gabber の純次元性定理([J 3, 4] 参照)により $V(L_w)$ は純次元である。また $V(L_w) = \gamma(\mathrm{Ch}(L_w)) = \bigcup_{y \in Z(w)} \gamma(\overline{T^*_{X_y}X}) = \bigcup_{y \in Z(w)} Y^r(w)$

により，$V(L_w)$ の既約成分は軌道的多様体である。

Joseph [J3] は軌道的多様体（あるいはより一般に n^+ の H-不変部分代数多様体）Y に対して $P_Y \in S^{d-\dim Y}(\mathfrak{g}^+)$ を定義した（$Y \in \mathrm{Irr}(\overline{O \cap n^+})$ なら $\dim Y = \frac{1}{2}\dim O$，よって $d-\dim Y = d_O$）。

「<u>Prop. 2.3</u> ([J3]) $P_{w^{-1}} = \sum_{Y\in \mathrm{Irr}(V(L_w))} \ell_Y P_Y$ $(\exists \ell_Y > 0)$」

さて Borho-MacPherson [BM] により

$$\dim \mathrm{Hom}_W(Sp(O), S^m(\mathfrak{g}^+)) = \begin{cases} 0 & m < d_O \\ 1 & m = d_O \end{cases}$$

が知られている。

「<u>Prop. 2.4</u> ([H]) W-加群としての単射準同型
$Sp(O) \longrightarrow S^{d_O}(\mathfrak{g}^+)$ が $g_Y \longmapsto P_Y$ $(Y \in \mathrm{Irr}(\overline{O \cap n^+}))$ により
定まる。」

Prop. 2.2, 2.3, 2.4 により $\hat{W}_{sp}$ は $\mathrm{Nilp} \xhookrightarrow{Sp} \hat{W}$ の像に入る事がわかる。$\mathrm{Nilp}_{sp} = \{O \in \mathrm{Nilp} \mid Sp(O) \in \hat{W}_{sp}\}$ に入る巾零共役類を特殊巾零共役類という。$W/\underset{LR}{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Nilp}_{sp}$ $(w \longmapsto O_w^{LR})$ が $Sp(O_w^{LR}) = \sigma(w)$ により定まる。また以上の議論から，

「<u>Prop. 2.5</u> $\mathrm{Irr}(V(L_w)) \subset \mathrm{Irr}(\overline{O_w^{LR} \cap n^+})$ $(\forall w \in W)$」

よって Prop 0.2, 1.4, 2.5 により

「<u>Prop 2.6</u> (Borho-Brylinski, Joseph, Hotta 尚 [KT], [Gi] 参照)
$V(U(\mathfrak{g})/I_w) = \overline{O_w^{LR}}$ $(\forall w \in W)$」

$V(U(\mathfrak{g})/I_w)$ の既約性は，はじめ Borho により予想され

た。まず [BoB 1] で case by case の証明が与えられ，その後上述のような統一的証明も得られた。尚 Joseph [J 4] は Prop. 1.4 を用いず，別の方法により Prop. 2.6 を示した。

また Prop. 0.2, 2.5 により次が従う。

「**Lemma 2.7** $V(L_w)=\bigcup_{y\in\Sigma(w)} Y^r(y)=\bigcup_{\substack{y\in\Sigma(w)\\ O_y^{RL}=O_w^{LR}}} Y^r(y)$」

$\boxed{2.4}$ $Z=\bigcup_{w\in W} Z_w$ （$Z_w=\overline{T^*_{D_w}(X\times X)}$ ）は純次元 $2d$ を持つ（$d=\dim X$）。[KL2] により $H_{4d}(Z)$ には $W\times W$-加群の構造が入る。$W\times W$-加群としての同型写像 $H_{4d}(Z)\xrightarrow{f}\mathbb{C}[W]$ が $f([Z_e])=e$ により定まる。$f([Z_w])=b(w)$ とおくと，$\{b(w)\mid w\in W\}$ は $\mathbb{C}[W]$ の基底になる。

「**Lemma 2.8** （[KL2]） $s\in S$, $w\in W$ とする。

(i) $sw<w$ なら $sb(w)=-b(w)$

(ii) $sw>w$ なら $sb(w)=b(w)+b(sw)+\sum_{sy<y<sw}\delta_s(y,w)\,b(y)$,

ここで $\delta_s(y,w)$ はある非負整数である。」

$\mathbb{C}[W]$ の部分空間であって $\{b(w)\mid w\in W\}$ のある部分集合により張られるものを b-基底型部分空間と呼ぶ。§1.5 の議論で a-基底型部分空間の代わりに b-基底型部分空間を用いる事により，$\overline{V}_w^L$, $\underset{L}{\geq}$, $\underset{L}{\sim}$, V_w^L, C_w^L, …, C_w^{LR} に対応するものが定義される。これらを $\overline{V}_w^\ell$, $\underset{\ell}{\geq}$, $\underset{\ell}{\sim}$, V_w^ℓ, C_w^ℓ, …, $C_w^{\ell r}$ とする。

「**Lemma 2.9** ([KL2])　$x \in O \in \mathrm{Nilp}$ とするとき，

$\bigoplus_{O_w^{\ell r} \subset \bar{O}} \mathbb{C} b(w)$ $(\subset \mathbb{C}[W])$ は $W \times W$-不変で，$W \times W$-加群として

$$\left(\bigoplus_{O_w^{\ell r} \subset \bar{O}} \mathbb{C} b(w) \right) \Big/ \left(\bigoplus_{O_w^{\ell r} \subset \bar{O} - O} \mathbb{C} b(w) \right) \cong \left(H_{2d_0}(X_x) \otimes H_{2d_0}(X_x) \right)^{A(x)}$$

$$\cong \bigoplus_{\zeta \in \mathcal{S}_0} \left(\tau_{(O,\zeta)} \otimes \tau_{(O,\zeta)} \right)$$ 」

Lemma 2.9 と同様の証明で次がわかる。

「**Lemma 2.10**　Y が軌道的多様体ならば，$\bigoplus_{Y^\ell(w) \subset Y} \mathbb{C} b(w)$ (resp. $\bigoplus_{Y^r(w) \subset Y} \mathbb{C} b(w)$) は W の左作用 (resp. 右作用) で不変である。特に $w \gtrsim_\ell y$ (resp. $w \gtrsim_r y$) ならば $Y^\ell(w) \supset Y^\ell(y)$ (resp. $Y^r(w) \supset Y^r(y)$) である。」

次の Lemma の成立の可能性は Joseph により筆者に指摘された。証明は appendix を参照。

「**Lemma 2.11**

(i) $w \underset{\ell}{\sim} y \iff Y^\ell(w) = Y^\ell(y)$

(ii) $w \underset{r}{\sim} y \iff Y^r(w) = Y^r(y)$

(iii) $w \underset{\ell r}{\sim} y \iff O_w^{\ell r} = O_y^{\ell r}$ 」

$\boxed{2.5}$　$X \times X \times X \xrightarrow{p_{ij}} X \times X$ を (i,j) 成分への射影とする。

$K(\mathcal{N})$ 上の積を

$$[\mathcal{M}_1] \cdot [\mathcal{M}_2] = \sum_i (-1)^i [\underline{H}^i (\int_{p_{13}} (p_{12}^* \mathcal{M}_1) \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_{X \times X \times X}}{\otimes}} (p_{23}^* \mathcal{M}_2))]$$

$$(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{N})$$

により与えると，$K(\mathcal{N})$ は $\mathbb{Z}$ 上の algebra になり，$\mathbb{Z}$-algebra

としての同型 $K(\mathcal{N}) \simeq \mathbb{Z}[W]$ が $[\mathcal{M}_w] \longleftrightarrow w$ により定まる([LV])。特に $K(\mathcal{N})$ は $W\times W$-加群になる。

「**Prop. 2.12** ([KT], [T2])
$$K(\mathcal{N})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} \xrightarrow{\text{Ch}} H_{4d}(Z)=\bigoplus_{w\in W}\mathbb{C}[Z_w]$$
は $W\times W$-加群としての同型写像である。」

$\text{Ch}(\mathcal{M}_e)=[Z_e]$ なので、これは

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{N}) & \xrightarrow{\text{Ch}} & H_{4d}(Z) \\ \wr\| & & \wr\|\ \mathfrak{s} \\ \mathbb{Z}[W] & \hookrightarrow & \mathbb{C}[W] \end{array}$$

が可換である事と同値である。さらにこれは次とも同値。

「**Lemma 2.13** $a(w)=\sum_{y\in W} m(y,w)\,b(y)$」

§3. 具体例

$\boxed{3.1}$ A_n

次が予想されている([KT], [BoB2])。

「**Conjecture 3.1** G が A_n 型なら任意の $w\in W$ に対して $\text{Ch}(L_w)=\overline{T^*_{X_w}X}$。すなわち $\Sigma(w)=\{w\}$。」

「**Conjecture 3.2** G が A_n 型なら任意の $w\in W$ に対して $\mathcal{V}(L_w)=\mathcal{V}(w)$」

Conjecture 3.1 から Conjecture 3.2 が従う事は明らか。また Conjecture 3.1 は [KL2] 中のある予想と同値である事が

Lemma 2.13からわかる。上の予想は$n \leqq 5$で確かめられている。

$\boxed{3.2}$ $V(L_n)$ for C_2, C_3

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C}), \quad J_n = \left[\begin{array}{c|c} 0 & T_n \\ \hline -T_n & 0 \end{array}\right] \in M_{2n}(\mathbb{C})$$

$$\mathfrak{g} = \{ x \in M_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^t x J_n + J_n x = 0 \}$$

$$\mathfrak{b} = \{ \mathfrak{g}\text{に含まれる上三角行列} \} \quad \mathfrak{n}^+ = \{ x \in \mathfrak{b} \mid \text{対角成分が全て}0 \}$$

とおくと，$\mathfrak{g}$はC_n型の単純Lie環，$\mathfrak{b}$は$\mathfrak{g}$のBorel部分環，$\mathfrak{n}^+$は$\mathfrak{b}$に対応するBorel部分群のunipotent radicalのLie環である。またWeyl群Wは$2n$個の文字$\{\pm 1, \pm 2, \cdots \pm n\}$の置換$w$で$w(-i) = -w(i)$ $({}^\forall i)$を満たすもの全体と同一視される。$w(i) = a_i$ $(i=1, \cdots, n)$のとき$w = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$と書く。

$s_1 = (-1, 2, 3, \cdots, n)$，$s_2 = (2, 1, 3, 4, \cdots, n)$，$\cdots\cdots$，$s_n = (1, 2, \cdots, n-2, n, n-1)$

とおくと$S = \{s_1, \cdots, s_n\}$が単純鏡影全体になる。

自然数mの分割の集合をP_mと書く。すなわち$P_m = \{ (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots m^{m_m}) \mid \sum_{i=1}^{m} i m_i = m \}$。また$P_{2n}^C = \{ (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots) \in P_{2n} \mid i\text{が奇数なら}m_i\text{は偶数} \}$とおく。$\sigma = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots) \in P_m$に対して，$M_m(\mathbb{C})$中のべき零行列であってそのJordan標準形におけるi次Jordan blockの数がm_i個であるようなもの全体をC_σと書く。よく知られているように，$\sigma \in P_{2n}$に対して$C_\sigma \cap \mathfrak{g}$が空でないための条件は，$\sigma \in P_{2n}^C$となる事である。また$\sigma \in P_{2n}^C$に対して$O_\sigma = C_\sigma \cap \mathfrak{g}$は$\mathfrak{g}$中の一つのべき零共役類をなす。よってこの

場合 $\mathrm{Nilp} \simeq P^C_{2m}$。また $\sigma \in P^C_{2m}$ に対して $\overline{\mathcal{O}_\sigma} = \overline{C_\sigma} \cap \mathfrak{g}$ が知られている。よって $\overline{\mathcal{O}_\sigma \cap \mathfrak{m}^+} = \overline{\mathcal{O}_\sigma} \cap \mathfrak{m}^+ = \overline{C_\sigma} \cap \mathfrak{m}^+$。$\sigma \in P_m$ に対して、$M_m(\mathbb{C})$ 上の多項式関数の族 $\{f_i^\sigma \mid i \in I_\sigma\}$ であって $\overline{C_\sigma} = \{x \in M_m(\mathbb{C}) \mid f_i^\sigma(x) = 0 \ (\forall i \in I_\sigma)\}$ なるものが，[T3] で具体的に与えられている。よって $\sigma \in P^C_{2m}$ のとき，$\overline{\mathcal{O}_\sigma \cap \mathfrak{m}^+} = \{x \in \mathfrak{m}^+ \mid f_i^\sigma(x) = 0 \ (\forall i \in I_\sigma)\}$ となる。この事を用いて C_2, C_3 のときの軌道的多様体を具体的に計算すると次のとおり。Nilp と P^C_{2m} $(m=2,3)$ を同一視し，$(1^{m_1}2^{m_2}\cdots)$ に対応する巾零共役類に付随する軌道的多様体を $(1^{m_1}2^{m_2}\cdots)_1$, $(1^{m_1}2^{m_2}\cdots)_2, \cdots$ により表わす。

(i) $\underline{C_2}$

$$\mathrm{Nilp} = \{(4), (2^2), (1^2 2), (1^4)\}$$

$$\mathfrak{m}^+ = \left\{ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & a & c & b \\ 0 & 0 & d & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \middle| \ a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

- $(4)_1 = \mathfrak{m}^+$ • $(2^2)_1 = \{a=0\}$, $(2^2)_2 = \{d=0\}$
- $(1^2 2)_1 = \{a=0, c^2 - bd = 0\}$ • $(1^4)_1 = \{0\}$

(ii) $\underline{C_3}$

$$\mathrm{Nilp} = \{(6), (24), (1^2 4), (3^2), (2^3), (1^2 2^2), (1^4 2), (1^6)\}$$

$$\mathfrak{m}^+ = \left\{ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & a & b & f & e & d \\ 0 & 0 & c & h & g & e \\ 0 & 0 & 0 & k & h & f \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -c & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \middle| \ a, \cdots, k \in \mathbb{C} \right\}$$

- $(6)_1 = \mathfrak{n}^+$
- $(24)_1 = \{a=0\}$, $(24)_2 = \{c=0\}$, $(24)_3 = \{k=0\}$
- $(1^2 4)_1 = \left\{ a=0,\ \det\begin{bmatrix} b & f & e & d \\ c & h & g & e \\ 0 & k & h & f \\ 0 & 0 & -c & -b \end{bmatrix} = 0 \right\}$, $(1^2 4)_2 = \left\{ \begin{matrix} c=0 \\ h^2 - gk = 0 \end{matrix} \right\}$
- $(3^2)_1 = \{c=0,\ a^2 g + 2abh + b^2 k = 0\}$, $(3^2)_2 = \{a=k=0\}$

  $(3^2)_3 = \{k=0,\ ag + 2bh - 2cf = 0\}$
- $(2^3)_1 = \{a=b=c=0\}$, $(2^3)_2 = \{a=k=0,\ bh - cf = 0\}$

  $(2^3)_3 = \{c=0,\ h^2 - gk = 0,\ ag + bh = 0,\ ah + bk = 0\}$
- $(1^2 2^2)_1 = \{a=b=c=0,\ f^2 g + h^2 d + e^2 k - gkd - 2ehf = 0\}$

  $(1^2 2^2)_2 = \{c=k=h=g=0\}$

  $(1^2 2^2)_3 = \left\{ \begin{matrix} a=k=0,\ bh - cf = 0,\ f^2 g + h^2 d - 2ehf = 0 \\ b^2 g + c^2 d - 2bce = 0,\ bgf + chd - cef - beh = 0 \end{matrix} \right\}$
- $(1^4 2)_1 = \left\{ \begin{matrix} a=b=c=0,\ fg - eh = fh - ke = fe - hd = 0 \\ f^2 - kd = e^2 - gd = h^2 - gk = 0 \end{matrix} \right\}$
- $(1^6)_1 = \{0\}$

軌道的多様体の　　包含関係は表1, 表2 のようになる。$Y^l(w)$ (resp. $Y^r(w)$) は $\mathfrak{n}^+ \cap w^{-1}\mathfrak{n}^+$ (resp. $\mathfrak{n}^+ \cap w\mathfrak{n}^+$) を含む最小の軌道的多様体なので簡単に計算できる(表8, 表10)。

次に W の右 cell, 両側 cell は次のようになる。

(i) $\underline{C_2}$　$s=s_1$, $t=s_2$ とおく。$\mathcal{C}_1=\{e\}$, $\mathcal{C}_{21}=\{t, ts, tst\}$ $\mathcal{C}_{22}=\{s, st, sts\}$, $\mathcal{C}_3=\{stst\}$ の4つが右 cell であり、$\mathcal{C}_1$,

$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{21} \cup \mathcal{C}_{22}$, $\mathcal{C}_3$ の3つが両側cellである。

(ii) $\underline{C_3}$ 表10の番号付けを用いる。

- $\mathcal{C}_1 = \{1\}$
- $\mathcal{C}_{21} = \{5, 9, 11, 33, 34\}$, $\mathcal{C}_{22} = \{3, 13, 17, 18, 25\}$, $\mathcal{C}_{23} = \{2, 19, 20, 29\}$
- $\mathcal{C}_{31} = \{26, 43, 44\}$, $\mathcal{C}_{32} = \{10, 35, 36\}$, $\mathcal{C}_{33} = \{30, 47, 48\}$
- $\mathcal{C}_{41} = \{27, 41, 42\}$, $\mathcal{C}_{42} = \{31, 45, 46\}$, $\mathcal{C}_{43} = \{15, 37, 38\}$
- $\mathcal{C}_{51} = \{7, 21, 22, 28\}$, $\mathcal{C}_{52} = \{4, 14, 16, 39, 40\}$, $\mathcal{C}_{53} = \{6, 12, 23, 24, 32\}$
- $\mathcal{C}_6 = \{8\}$

の14個が右cellであり、$\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{21} \cup \mathcal{C}_{22} \cup \mathcal{C}_{23}$, $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_{31} \cup \mathcal{C}_{32} \cup \mathcal{C}_{33}$, $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_{41} \cup \mathcal{C}_{42} \cup \mathcal{C}_{43}$, $\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_{51} \cup \mathcal{C}_{52} \cup \mathcal{C}_{53}$, $\mathcal{C}_6$ の6個が両側cellである。

$\leq$ の導びく右cellの集合上の順序関係は表5, 表7のとおり。

以上の準備のもとで $\nabla(L_w)$ を決定する。

(i) $\underline{C_2}$ $w = e, s, t, stst$ のとき $\overline{X_w}$ は non-singular (実際これらは W の parabolic 型部分群の最長元である。)。よってこのとき $\nabla(L_w) = \Upsilon^r(w)$ (Prop 1.1, Lemma 2.7)。Cor 1.5 により

$$\nabla(L_w) = \begin{cases} (4)_1 & w \in \mathcal{C}_1 \\ (2^2)_1 & w \in \mathcal{C}_{21} \\ (2^2)_2 & w \in \mathcal{C}_{22} \\ (1^4)_1 & w \in \mathcal{C}_3 \end{cases}$$

(ii) $\underline{C_3}$ $w = 1, 9, 17, 2, 10, 41, 4, 8$ は parabolic 型部分群の最長元なので $\nabla(L_w) = \Upsilon^r(w)$。よって $\nabla(L_w) = (6)_1$ for $w \in \mathcal{C}_1$,

$V(L_w)=(24)_1$ for $w\in C_{21}$, $V(L_w)=(24)_2$ for $w\in C_{22}$, $V(L_w)=(24)_3$ for $w\in C_{23}$, $V(L_w)=(3^2)_2$ for $w\in C_{32}$, $V(L_w)=(2^3)_1$ for $w\in C_{41}$, $V(L_w)=(1^2 2^2)_2$ for $w\in C_{52}$, $V(L_w)=(1^6)_1$ for $w\in C_6$ である。また一般に $V(L_w)\supset Y^r(w)$ なので，$V(L_w)\supset(3^2)_1$ for $w\in C_{31}$, $V(L_w)\supset(3^2)_3$ for $w\in C_{33}$, $V(L_w)\supset(2^3)_2$ for $w\in C_{42}$, $V(L_w)\supset(2^3)_3$ for $w\in C_{43}$, $V(L_w)\supset(1^2 2^2)_1$ for $w\in C_{51}$, $V(L_w)\supset(1^2 2^2)_3$ for $w\in C_{53}$ となる。$w\in C_{31}$ のとき $(3^2)_1$ は $V(L_w)$ の既約成分であり、もし他の既約成分があるとすればそれは $(3^2)_2$ または $(3^2)_3$ である。$C_{22}\gneqq C_{31}$ なので $w\in C_{31}$, $y\in C_{22}$ とすると $V(L_w)\subset V(L_y)=(24)_2$。表２より $V(L_w)=(3^2)_3$ for $w\in C_{31}$ がわかる。以下同様の論法をくり返す。C_{42} と C_{32} を比べて $V(L_w)=(2^3)_2$ for $w\in C_{42}$。C_{51} と C_{41} を比べて $V(L_w)=(1^2 2^2)_1$ for $w\in C_{51}$。C_{52} と C_{31}, C_{52} と C_{23} を比べて $V(L_w)=(1^2 2^2)_2$ for $w\in C_{52}$。C_{53} と C_{42} を比べて $V(L_w)=(1^2 2^2)_3$ for $w\in C_{53}$。C_{43} と C_{31}, C_{43} と C_{51} を比べて $V(L_w)=(2^3)_3\cup(2^3)_1$。$C_{33}$ と C_{23} を比べて $V(L_w)=(3^2)_3$ または $V(L_w)=(3^2)_3\cup(3^2)_2$ for $w\in C_{33}$。$w=30\in C_{33}$ とする。$V(L_w)=(3^2)_3\cup(3^2)_2$ と仮定すると，ある $y\in\Xi(w)$ に対して $Y^r(y)=(3^2)_2$ とならねばならない。$y\in W$ で $y\leqq w$ かつ $Y^r(y)=(3^2)_2$ となるのは $y=10$ だけである。ところが具体的計算により X_y は $\overline{X_w}$ 中で non-singular である事がわかる

$(y=10, w=30)$。よって $y=10 \notin \Sigma(w)$。従って $V(L_w)=(3^2)_3$ for $w\in C_{33}$ 以上で全ての $w\in W$ に対して $V(L_w)$ が決定された。(表10)

$\boxed{3.3}$ $V(L_w)$ for B_3

$K=\begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}\in M_7(\mathbb{C})$ の時 $\mathfrak{g}=\{x\in M_7(\mathbb{C}) \mid {}^t xK+Kx=0\}$ は B_3型の単純Lie環で $\mathfrak{b}=\{\mathfrak{g}$ に含まれる上三角行列$\}$ は $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環、また

$$\mathfrak{n}^+=\left\{\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & a & b & g & e & d & 0 \\ 0 & 0 & c & h & f & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & -f & -e \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -k & -h & -g \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \;\middle|\; a,\cdots,k\in\mathbb{C}\right\}$$

である。Weyl群 W は C_3 型の Weyl群と同じで、左cell 両側cell も C_3 型のときと同じである。巾零共役類の集合 Nilp は、7の分割であって even part の数が偶数であるもの全体と同一視される。すなわち $\mathrm{Nilp}=\{(7),(1^2 5),(1\,3^2),(2^2 3),(1^4 3),(1^3 2^2),(1^7)\}$。軌道的多様体は次のとおり。

- $(7)_1=\mathfrak{n}^+$
- $(1^2 5)_1=\{a=0\}$, $(1^2 5)_2=\{c=0\}$, $(1^2 5)_3=\{k=0\}$
- $(1\,3^2)_1=\{a=k=0\}$, $(1\,3^2)_2=\{c=0, ah+bk=0\}$, $(1\,3^2)_3=\{k=0, h^2+2cf=0\}$
- $(2^2 3)_1=\{a=k=0,\ (bf-ce)^2+2(fg-eh)(bh-cg)=0\}$

$$(2^2 3)_2 = \left\{ \begin{array}{ll} c = 0 & , \ 2k^2 d + 2fkg - 2ehk - af^2 = 0 \\ ah + bk = 0 & \ 2hfg + 2hkd - 2eh^2 + bf^2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(2^2 3)_3 = \{ a = b = c = 0 \}$$

- $(1^4 3)_1 = \{ a = k = 0 ,\ bh - gc = bf - ec = gf - eh = 0 \}$

$$(1^4 3)_2 = \{ c = k = h = f = 0 \}$$

$$(1^4 3)_3 = \{ a = b = c = 0 ,\ eh - dk - gf = 0 \}$$

- $(1^3 2^2)_1 = \left\{ \begin{array}{l} a = k = 0 ,\ bh - gc = bf - ec = gf - eh = 0 \\ \qquad hg + 2bf = g^2 + 2be = h^2 + 2cf = 0 \end{array} \right\}$

$(1^3 2^2)_2 = \{ c = k = h = f = 0 ,\ g^2 + 2ad + 2be = 0 \}$ 　　• $(1^7)_1 = \{ 0 \}$

以下 C_3 型のときと同様にして $V(L_M)$ が計算される(表 10)。

$\boxed{3.4}$ $V(L_M)$ for G_2

$\mathfrak{g}$ を G_2 型の単純 Lie 環とする。巾零共役類に対応する weighted Dynkin diagram が $\overset{a}{\circ}\!\Rrightarrow\!\overset{b}{\circ}$ $(a, b = 0 \text{ or } 1 \text{ or } 2)$ のとき、この巾零共役類を $(a\ b)$ で表わす。このとき $\mathrm{Nilp} = \{ (2\,2), (2\,0), (0\,1), (1\,0), (0\,0) \}$ である。Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ をとり $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root 系を Δ とする。正 root 系 Δ^+ をひとつとり、単純 root を α, β とする(ここで α は long root, β は short root)。$\gamma \in \Delta^+$ に対応する root 空間を $\mathfrak{g}_\gamma$, $\mathfrak{g}_\gamma$ に対応する G の部分群を U_γ とする。また $\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\gamma \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\gamma$ に対応する G の部分群を U とする。このとき軌道的多様体は次のとおり。

- $(22)_1 = \mathfrak{n}^+$
- $(20)_1 = \bigoplus_{\gamma \in \Delta^+ - \{\beta\}} \mathfrak{g}_\gamma$, $(20)_2 = \bigoplus_{\gamma \in \Delta^+ - \{\alpha\}} \mathfrak{g}_\gamma$
- $(01)_1 = (\mathrm{Ad}(\sigma_\beta)(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{\alpha+\beta})) + \mathfrak{g}_{2\alpha+3\beta}$, $(01)_2 = \mathrm{Ad}(\sigma)\mathfrak{g}_\beta$
- $(10)_1 = (\mathrm{Ad}(\sigma_\beta)\mathfrak{g}_\alpha) + \mathfrak{g}_{2\alpha+3\beta}$
- $(00)_1 = \{0\}$

αに関する鏡影をs，βに関する鏡影をtとすると，右cellは$C_1 = \{e\}$，$C_{21} = \{t, ts, tst, tsts, tstst\}$ $C_{22} = \{s, st, sts, stst, ststs\}$，$C_3 = \{ststst\}$の4個，両側cellは$C_1$，$C_2 = C_{21} \cup C_{22}$，$C_3$の3個である。

C_2のときと全く同様にして$V(L_w)$が計算される（表9）。

$\boxed{3.5}$ $\underline{\underline{Ch}}(L_w)$

ここではG_2型のときの計算のみを述べて，C_2, B_3, C_3のときは省略する。結果は表8，10にまとめる。以下$\mathfrak{g}$はG_2型とする。

$\underline{\underline{Ch}}(L_w) = \sum_{y \in W} m(y,w)[\overline{T^*_{X_w}X}]$とするとき$a(w) = \sum_{y \in W} m(y,w)\, b(y)$であった。また$a(w) = \sum_{y \leq w} (-1)^{l(w)+l(y)} y$である。$w = e, s, t, ststst$はparabolic型部分群の最長元なので，$\overline{X_w}$はnon-singularである。また$\overline{X_{sts}}$もnon-singularである事がわかる（筆者は自分で計算したが知られている筈の事である。）。よってLemma 1.1により$a(w) = b(w)$ for $w = e, s, t, sts, ststst$となる。さらに

Lemma 1.1 と Lemma 1.2 により $a(st)=b(st)$, $a(ts)=b(ts)$

である。Lemma 1.2, 2.7 により

$$
\begin{array}{ll}
a(tst)= b(tst) + x_1 b(t) & x_1>0 \\
a(stst)= b(stst) + x_2 b(st) & x_2>0 \\
a(tsts)= b(tsts) + x_2 b(ts) & \\
a(ststs)= b(ststs) + x_3 b(sts) + x_4 b(s) & \left\{\begin{array}{l} x_3\geq 0, x_4\geq 0 \\ x_3>0 \text{ or } x_4>0 \end{array}\right. \\
a(tstst)= b(tstst) + x_5 b(tst) + x_6 b(t) & x_5\geq 0, x_6>0
\end{array}
$$

がわかる。Lemma 2.8 と Lemma 2.10 により, $u=s$ or t, $w\in W$

$uw>w$ なら

$$u\,b(w) \in b(w)+b(uw)+\sum_{\substack{uy<y<uw \\ \Upsilon^{\ell}(y)\subset\Upsilon^{\ell}(w)}} \mathbb{Z}_{\geq 0}\, b(y)$$

となる。よって表4により $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=1$, $x_5=1$,

$x_6=1$ がわかる。

$\boxed{3.6}$ 表

表1.1 including relation of orbital varieties for C_2

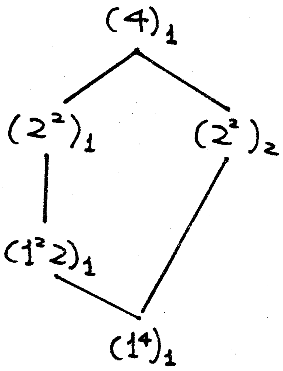

表1.2 including relation of obital varieties associated to special nilpotent orbits for C_2

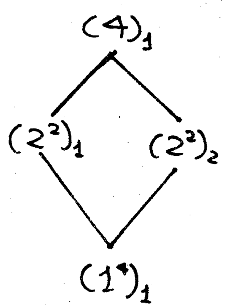

表 2.1 including relation of orbital varieties for C_3

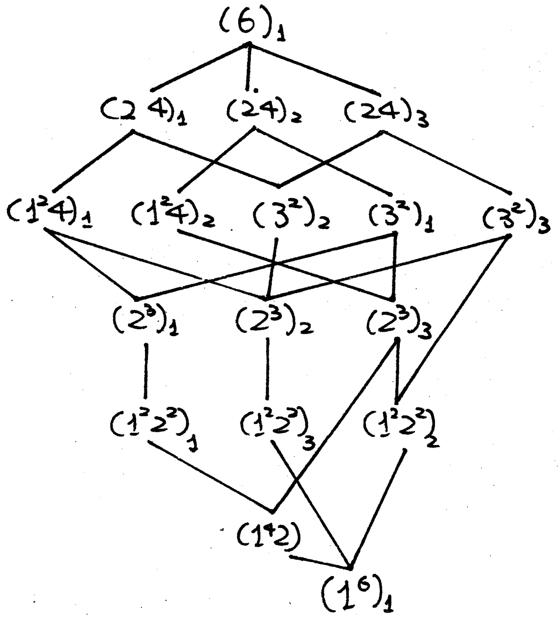

表 2.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for C_3

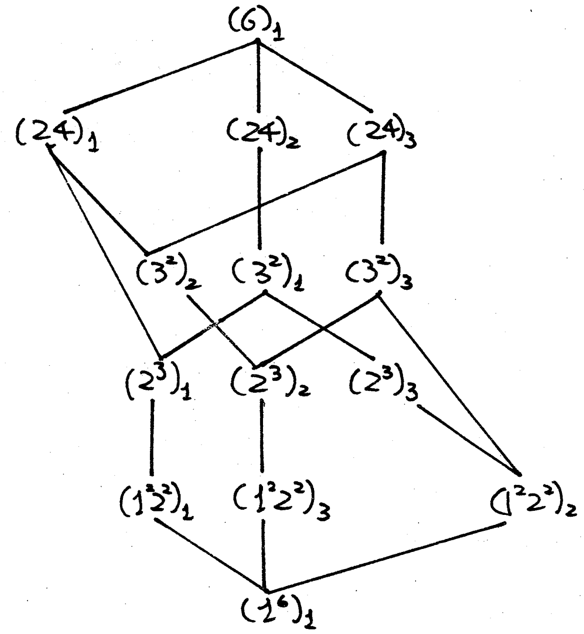

表 3.1 including relation of orbital varieties for B_3

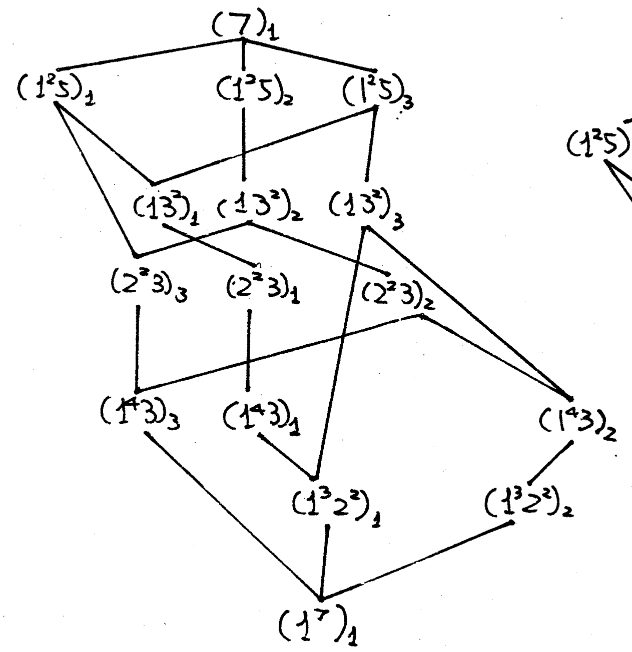

表 3.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for B_3

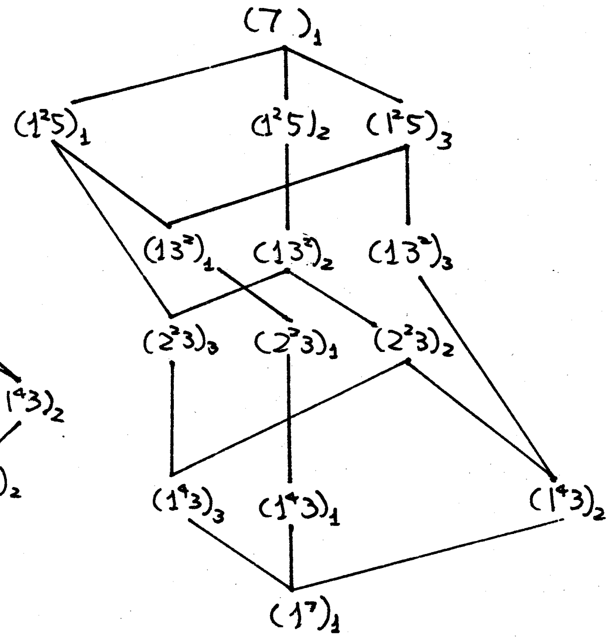

表4.1 including relation of orbital varieties for G_2

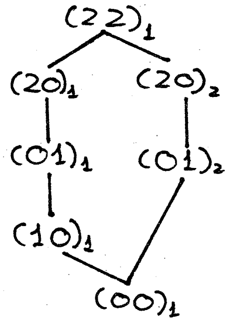

表4.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for G_2

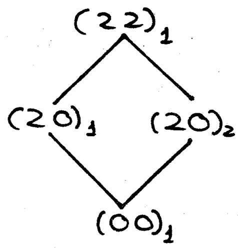

表5 order relation of right cells for C_2

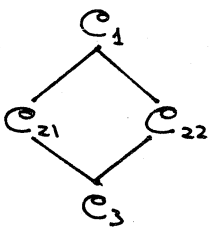

表6 order relation of right cells for G_2

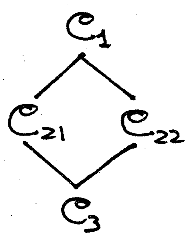

表7 order relation of right cells for B_3 C_3

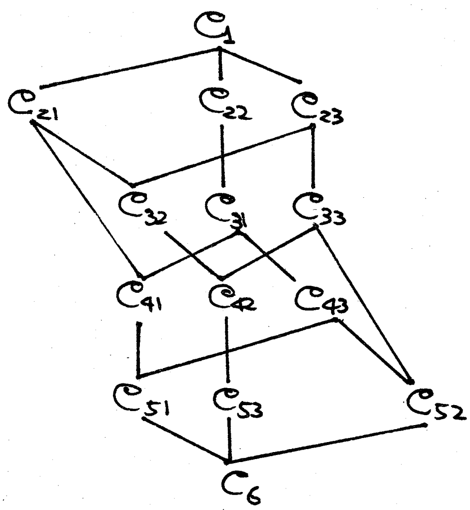

表8. C_2

w	$Y^l(w)$	$Y^r(w)$	right cell	$V(L_w)$	$a(w)$
e	$(4)_1$	$(4)_1$	$\mathcal{C}_1$	$(4)_1$	$b(e)$
s	$(2^2)_2$	$(2^2)_2$	$\mathcal{C}_{22}$	$(2^2)_2$	$b(s)$
t	$(2^2)_1$	$(2^2)_1$	$\mathcal{C}_{21}$	$(2^2)_1$	$b(t)$
st	$(2^2)_1$	$(2^2)_2$	$\mathcal{C}_{22}$	$(2^2)_2$	$b(st)$
ts	$(2^2)_2$	$(2^2)_1$	$\mathcal{C}_{21}$	$(2^2)_1$	$b(ts)$
sts	$(2^2)_2$	$(2^2)_2$	$\mathcal{C}_{22}$	$(2^2)_2$	$b(sts)$
tst	$(1^2 2)_1$	$(1^2 2)_1$	$\mathcal{C}_{21}$	$(2^2)_1$	$b(tst) + b(t)$
$stst$	$(1^4)_1$	$(1^4)_1$	$\mathcal{C}_3$	(1^4)	$b(stst)$

表9. G_2

w	$Y^l(w)$	$Y^r(w)$	right cell	$V(L_w)$	$a(w)$
e	$(22)_1$	$(22)_1$	$\mathcal{C}_1$	$(22)_1$	$b(e)$
s	$(20)_2$	$(20)_2$	$\mathcal{C}_{22}$	$(20)_2$	$b(s)$
t	$(20)_1$	$(20)_1$	$\mathcal{C}_{21}$	$(20)_1$	$b(t)$
st	$(20)_1$	$(20)_2$	$\mathcal{C}_{22}$	$(20)_2$	$b(st)$
ts	$(20)_2$	$(20)_1$	$\mathcal{C}_{21}$	$(20)_1$	$b(ts)$
sts	$(20)_2$	$(20)_2$	$\mathcal{C}_{22}$	$(20)_2$	$b(sts)$
tst	$(01)_1$	$(01)_1$	$\mathcal{C}_{21}$	$(20)_1$	$b(tst) + 2b(t)$
$stst$	$(01)_1$	$(01)_2$	$\mathcal{C}_{22}$	$(20)_2$	$b(stst) + b(st)$
$tsts$	$(01)_2$	$(01)_1$	$\mathcal{C}_{21}$	$(20)_1$	$b(tsts) + b(ts)$
$ststs$	$(01)_2$	$(01)_2$	$\mathcal{C}_{22}$	$(20)_2$	$b(ststs) + b(s)$
$tstst$	$(10)_1$	$(10)_1$	$\mathcal{C}_{21}$	$(20)_1$	$b(tstst) + b(tst) + b(t)$
$ststst$	$(00)_1$	$(00)_1$	$\mathcal{C}_3$	$(00)_1$	$b(ststst)$

表10. C_3, B_3

No	w	reduced expression	w^{-1}	right cell	C_3: $\gamma^l(w)$	C_3: $\gamma^r(w)$	C_3: $V(L_w)$	C_3: $a(w)$	B_3: $\gamma^l(w)$	B_3: $\gamma^r(w)$	B_3: $V(L_w)$	B_3: $a(w)$
1	(1 2 3)		1	e_1	$(6)_1$	$(6)_1$	$(6)_1$	b(1)	$(7)_1$	$(7)_1$	$(7)_1$	b(1)
2	(−1 2 3)	1	2	e_{23}	$(24)_3$	$(24)_3$	$(24)_3$	b(2)	$(1^2 5)_3$	$(1^2 5)_3$	$(1^2 5)_3$	b(2)
3	(1 −2 3)	212	3	e_{22}	$(1^2 4)_2$	$(1^2 4)_2$	$(24)_2$	b(3)+b(17)	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	b(3)
4	(−1 −2 3)	2121	4	e_{52}	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_2$	b(4)	$(1^4 3)_2$	$(1^4 3)_2$	$(1^4 3)_2$	b(4)
5	(1 2 −3)	32123	5	e_{21}	$(1^2 4)_1$	$(1^2 4)_1$	$(24)_1$	b(5)+b(9)+b(41)	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_1$	b(5)
6	(−1 2 −3)	321213	6	e_{53}	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	b(6)	$(1^4 3)_1$	$(1^4 3)_1$	$(1^4 3)_1$	b(6)
7	(1 −2 −3)	32123212	7	e_{51}	$(1^4 2)_1$	$(1^4 2)_1$	$(1^2 2^2)_1$	b(7)+b(21)	$(1^4 3)_3$	$(1^4 3)_3$	$(1^4 3)_3$	b(7)
8	(−1 −2 −3)	132123212	8	e_6	$(1^6)_1$	$(1^6)_1$	$(1^6)_1$	b(8)	$(1^7)_1$	$(1^7)_1$	$(1^7)_1$	b(8)
9	(1 3 2)	3	9	e_{21}	$(24)_1$	$(24)_1$	$(24)_1$	b(9)	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_1$	b(9)
10	(−1 3 2)	13	10	e_{32}	$(3^2)_2$	$(3^2)_2$	$(3^2)_2$	b(10)	$(13^2)_1$	$(13^2)_1$	$(13^2)_1$	b(10)
11	(1 −3 2)	3212	13	e_{21}	$(1^2 4)_2$	$(1^2 4)_1$	$(24)_1$	b(11) + b(33)	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_1$	b(11)
12	(−1 −3 2)	32121	14	e_{53}	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	b(12)	$(1^4 3)_2$	$(1^4 3)_1$	$(1^4 3)_1$	b(12)
13	(1 3 −2)	2123	11	e_{22}	$(1^2 4)_1$	$(1^2 4)_2$	$(24)_2$	b(13) + b(25)	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	b(13)
14	(−1 3 −2)	21213	12	e_{52}	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_2$	b(14)	$(1^4 3)_1$	$(1^4 3)_2$	$(1^4 3)_2$	b(14)
15	(1 −3 −2)	2123212	15	e_{43}	$(2^3)_3$	$(2^3)_3$	$(2^3)_3 \cup (2^3)_1$	b(15)+b(27)+b(37)+b(41)	$(2^2 3)_2$	$(2^2 3)_2$	$(2^2 3)_2$	b(15)
16	(−1 −3 −2)	21232121	16	e_{52}	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_2$	b(16)	$(1^3 2^2)_2$	$(1^3 2^2)_2$	$(1^4 3)_2$	b(16) + b(4)
17	(2 1 3)	2	17	e_{22}	$(24)_2$	$(24)_2$	$(24)_2$	b(17)	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	b(17)
18	(−2 1 3)	21	19	e_{22}	$(24)_3$	$(24)_2$	$(24)_2$	b(18)	$(1^2 5)_3$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	b(18)
19	(2 −1 3)	12	18	e_{23}	$(24)_2$	$(24)_3$	$(24)_3$	b(19)	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_3$	$(1^2 5)_3$	b(19)
20	(−2 −1 3)	121	20	e_{23}	$(24)_3$	$(24)_3$	$(24)_3$	b(20)	$(13^2)_3$	$(13^2)_3$	$(1^2 5)_3$	b(20) + b(2)
21	(2 1 −3)	321323	21	e_{51}	$(1^2 2^2)_1$	$(1^2 2^2)_1$	$(1^2 2^2)_1$	b(21)	$(13^2)_3$	$(1^4 3)_3$	$(1^4 3)_3$	b(21)
22	(−2 1 −3)	3212321	23	e_{51}	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_1$	$(1^2 2^2)_1$	b(22)	$(1^4 3)_1$	$(1^4 3)_3$	$(1^4 3)_3$	b(22)
23	(2 −1 −3)	3212132	22	e_{53}	$(1^2 2^2)_1$	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	b(23)	$(1^4 3)_3$	$(1^4 3)_1$	$(1^4 3)_1$	b(23)
24	(−2 −1 −3)	32123121	24	e_{53}	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	b(24)	$(1^3 2^2)_1$	$(1^3 2^2)_1$	$(1^4 3)_1$	b(24) + b(6)

表10. continued

No	w	reduced expression	w^{-1}	right cell	C_3				B_3			
					$Y^\ell(w)$	$Y^r(w)$	$V(L_w)$	$a(w)$	$Y^\ell(w)$	$Y^r(w)$	$V(L_w)$	$a(w)$
25	$(2\ 3\ 1)$	23	33	c_{22}	$(24)_1$	$(24)_2$	$(24)_2$	$b(25)$	$(1^25)_1$	$(1^25)_2$	$(1^25)_2$	$b(25)$
26	$(-2\ 3\ 1)$	213	35	c_{31}	$(3^2)_2$	$(3^2)_1$	$(3^2)_1$	$b(26)$	$(13^2)_1$	$(13^2)_2$	$(13^2)_2$	$b(26)$
27	$(2\ -3\ 1)$	23212	37	c_{41}	$(2^3)_3$	$(2^3)_1$	$(2^3)_1$	$b(27)+b(41)$	$(2^23)_2$	$(2^23)_3$	$(2^23)_3$	$b(27)$
28	$(-2\ -3\ 1)$	232121	39	c_{51}	$(1^22^2)_2$	$(1^22^2)_1$	$(1^22^2)_1$	$b(28)$	$(1^43)_2$	$(1^43)_3$	$(1^43)_3$	$b(28)$
29	$(2\ 3\ -1)$	123	34	c_{23}	$(24)_1$	$(24)_3$	$(24)_3$	$b(29)$	$(1^25)_1$	$(1^25)_3$	$(1^25)_3$	$b(29)$
30	$(-2\ 3\ -1)$	1213	36	c_{33}	$(3^2)_2$	$(3^2)_3$	$(3^2)_3$	$b(30)$	$(13^2)_1$	$(13^2)_3$	$(13^2)_3\cup(13^2)_1$	$b(30)+b(10)$
31	$(2\ -3\ -1)$	123212	38	c_{42}	$(2^3)_3$	$(2^3)_2$	$(2^3)_2$	$b(31)+b(45)$	$(2^23)_2$	$(2^23)_1$	$(2^23)_1$	$b(31)$
32	$(-2\ -3\ -1)$	1232121	40	c_{53}	$(1^22^2)_2$	$(1^22^2)_3$	$(1^22^2)_3$	$b(32)$	$(1^32^2)_2$	$(1^32^2)_1$	$(1^43)_1$	$b(32)+b(12)$
33	$(3\ 1\ 2)$	32	25	c_{21}	$(24)_2$	$(24)_1$	$(24)_1$	$b(33)$	$(1^25)_2$	$(1^25)_1$	$(1^25)_1$	$b(33)$
34	$(-3\ 1\ 2)$	321	29	c_{21}	$(24)_3$	$(24)_1$	$(24)_1$	$b(34)$	$(1^25)_3$	$(1^25)_1$	$(1^25)_1$	$b(34)$
35	$(3\ -1\ 2)$	132	26	c_{32}	$(3^2)_1$	$(3^2)_2$	$(3^2)_2$	$b(35)$	$(13^2)_2$	$(13^2)_1$	$(13^2)_1$	$b(35)$
36	$(-3\ -1\ 2)$	3121	30	c_{32}	$(3^2)_3$	$(3^2)_2$	$(3^2)_2$	$b(36)$	$(13^2)_3$	$(13^2)_1$	$(13^2)_1$	$b(36)+b(10)$
37	$(3\ 1\ -2)$	21323	27	c_{43}	$(2^3)_1$	$(2^3)_3$	$(2^3)_3\cup(2^3)_1$	$b(37)+b(41)$	$(2^23)_3$	$(2^23)_2$	$(2^23)_2$	$b(37)$
38	$(-3\ 1\ -2)$	212321	31	c_{43}	$(2^3)_2$	$(2^3)_3$	$(2^3)_3\cup(2^3)_1$	$b(38)+b(42)$	$(2^23)_1$	$(2^23)_2$	$(2^23)_2$	$b(38)$
39	$(3\ -1\ -2)$	212132	28	c_{52}	$(1^22^2)_1$	$(1^22^2)_2$	$(1^22^2)_2$	$b(39)$	$(1^43)_3$	$(1^43)_2$	$(1^43)_2$	$b(39)$
40	$(-3\ -1\ -2)$	2123121	32	c_{52}	$(1^22^2)_3$	$(1^22^2)_2$	$(1^22^2)_2$	$b(40)$	$(1^32^2)_1$	$(1^32^2)_2$	$(1^43)_2$	$b(40)+b(14)$
41	$(3\ 2\ 1)$	323	41	c_{41}	$(2^3)_1$	$(2^3)_1$	$(2^3)_1$	$b(41)$	$(2^23)_3$	$(2^23)_3$	$(2^23)_3$	$b(41)$
42	$(-3\ 2\ 1)$	2321	45	c_{41}	$(2^3)_2$	$(2^3)_1$	$(2^3)_1$	$b(42)$	$(2^23)_1$	$(2^23)_3$	$(2^23)_3$	$b(42)$
43	$(3\ -2\ 1)$	2132	43	c_{31}	$(3^2)_1$	$(3^2)_1$	$(3^2)_1$	$b(43)$	$(13^2)_2$	$(13^2)_2$	$(13^2)_2$	$b(43)$
44	$(-3\ -2\ 1)$	23121	47	c_{31}	$(3^2)_3$	$(3^2)_1$	$(3^2)_1$	$b(44)$	$(13^2)_3$	$(13^2)_2$	$(13^2)_2$	$b(44)+b(26)$
45	$(3\ 2\ -1)$	1323	42	c_{42}	$(2^3)_1$	$(2^3)_2$	$(2^3)_2$	$b(45)$	$(2^23)_3$	$(2^23)_1$	$(2^23)_1$	$b(45)$
46	$(-3\ 2\ -1)$	12321	46	c_{42}	$(2^3)_2$	$(2^3)_2$	$(2^3)_2$	$b(46)$	$(2^23)_1$	$(2^23)_1$	$(2^23)_1$	$b(46)$
47	$(3\ -2\ -1)$	12132	44	c_{33}	$(3^2)_1$	$(3^2)_3$	$(3^2)_3$	$b(47)$	$(13^2)_2$	$(13^2)_3$	$(13^2)_3\cup(13^2)_1$	$b(47)+b(35)$
48	$(-3\ -2\ -1)$	123121	48	c_{33}	$(3^2)_3$	$(3^2)_3$	$(3^2)_3$	$b(48)$	$(13^2)_3$	$(13^2)_3$	$(13^2)_3\cup(13^2)_1$	$b(48)+b(4)+b(36)$ $+b(30)+b(10)+b(20)$

§4. 予想

$\boxed{4.1}$ Borho-Brylinski [BoB2] は, primitive quotient の特性多様体 $Ch(U(\mathfrak{g})/I_w)$ が常に既約であると予想した。Prop 1.4 により，これは $\mathcal{V}(L_w)$ が常に既約である事と同値である ([J3; 8.15] 参照)。　特殊表現 $Sp(\mathcal{O}_w^{LR}) = \sigma(w)$ は 2種類の基底 $\{g_Y \mid Y \in Irr(\overline{\mathcal{O}_w^{LR} \cap \mathfrak{m}^+})\}$, $\{P_y \mid y \in \mathcal{C}_w^{LR}/\underset{L}{\sim}\}$ を持つ (但し P_y は定数倍を除いて決まる。) が，上の Borho-Brylinski 予想は，この2つの基底が（定数倍を除いて）一致する事とも同値である (Prop. 2.3, 2.4)。　しかし §3 からわかるようにこれには反例がある。そこで一つの修正案として次の予想を提出する。

「Conjecture 4.1　$\mathcal{O} \in Nilp_{sp}$，$\mathcal{C}$ を $\mathcal{O}$ に対応する $\underset{LR}{\sim}$ の同値類とする ($W/\underset{LR}{\sim} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} Nilp_{sp}$, §2.3)。　このとき $\mathcal{C}/\underset{R}{\sim}$ と $Irr(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+})$ の間の一対一対応 ($w \longmapsto Y_w$) 及び, $Irr(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+})$ 上の順序関係 $\succ$ が存在して，

$$\mathcal{V}(L_w) = Y_w \cup \tilde{Y}_w \quad (\forall w \in \mathcal{C})。$$

ここで $\tilde{Y}_w$ は $Y \prec \tilde{Y}_w$ となる $Y \in Irr(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+})$ の幾つかの合併集合である。」

この予想は A_n 型では証明されている ([BoB2; §6.10])。

Conjecture 4.1 は特殊表現 $Sp(\mathcal{O})$ の2種類の基底の変換行列が上三角形になる事と同値である。また Conjecture 4.1

から Conjecture 0.5 が従う事も明らか。

$\boxed{4.2}$ $\widehat{W} \xrightarrow{\Phi} Nilp_{sp}$, $\widehat{W} \xrightarrow{\Psi} Nilp$ を次の様に定義する。$\tau \in \widehat{W}$ に対して $\tau \otimes \tau \subset \mathbb{V}_w^{LR}$ なら $\Phi(\tau) = \mathcal{O}_w^{LR}$, $\tau \otimes \tau \in \mathbb{V}_w^{\ell r}$ なら $\Psi(\tau) = \mathcal{O}_w^{\ell r}$。 ここで $\overline{\mathcal{O}_w^{\ell r}} \subset \overline{\mathcal{O}_w^{LR}}$ に注意しておく。実際, $\overline{\mathcal{O}_w^{LR}} = \overline{G \cdot V(L_w)} \supset \overline{G \cdot Y^r(w)} = \overline{\mathcal{O}_w^{\ell r}}$。

Prop. 4.2 $\mathcal{O} \in Nilp_{sp}$ とする。次の条件が成立すれば, Conjecture 4.1 は正しい。

(4.3) $\{\tau \in \widehat{W} \mid \Phi(\tau) \subset \overline{\mathcal{O}}\} = \{\tau \in \widehat{W} \mid \Psi(\tau) \subset \overline{\mathcal{O}}\}$

(証明) $W \times W$-加群として $\sum_{\mathcal{O}_w^{LR} \subset \overline{\mathcal{O}}} \mathbb{C}a(w) \cong \bigoplus_{\Phi(\tau) \subset \overline{\mathcal{O}}} (\tau \otimes \tau)$,

$\sum_{\mathcal{O}_w^{\ell r} \subset \overline{\mathcal{O}}} \mathbb{C}b(w) \cong \bigoplus_{\Psi(\tau) \subset \overline{\mathcal{O}}} (\tau \otimes \tau)$ であった。よって仮定より $\sum_{\mathcal{O}_w^{LR} \subset \overline{\mathcal{O}}} \mathbb{C}a(w) = \sum_{\mathcal{O}_w^{\ell r} \subset \overline{\mathcal{O}}} \mathbb{C}b(w)$。

$a(w) \in b(w) + \sum_{y < w} \mathbb{Z}_{\geq 0} b(y)$ なので $\mathcal{O}_w^{LR} \subset \overline{\mathcal{O}} \Leftrightarrow \mathcal{O}_w^{\ell r} \subset \overline{\mathcal{O}}$ がわかる。

一般に $\overline{\mathcal{O}_w^{\ell r}} \subset \overline{\mathcal{O}_w^{LR}}$ なので

(4.4) $\mathcal{O}_w^{\ell r} = \mathcal{O}$ ならば $\mathcal{O}_w^{LR} = \mathcal{O}$, 特に $Y^r(w) \in Irr(V(L_w))$。

さて $Irr(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}^+})$ の部分集合の増大列

$\phi = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \cdots \subset Irr(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}^+})$

を次のように帰納的に定義する。J_{r-1} まで定義されたとき,

$J_r = \{Y^r(w) \mid \mathcal{O}_w^{\ell r} = \mathcal{O},\ V(L_w) \subset Y^r(w) \cup (\bigcup_{Y \in J_{r-1}} Y)\}$。

そこで次を示す。

(4.5) $J_{r-1} \subsetneqq J$ なら $J_{r-1} \subsetneqq J_r$

$\mathcal{S} = \{w \in W \mid \mathcal{O}_w^{\ell r} = \mathcal{O},\ Y^r(w) \notin J_{r-1}\}$ は仮定により空集合

ではない。Bruhat order に関する $\mathcal{S}$ の極小元 w をひとつとる。このとき $Y^r(w)\in J_r$ となる事を示せばよい。Lemma 2.7 と (4.4) により

$$V(L_w)=Y^r(w)\cup\Bigl(\bigcup_{\substack{y\in\mathcal{Z}(w)-\{w\}\\ O_y^{gr}=O}}Y^r(y)\Bigr)$$

となる。いま

$$V(L_w)\not\subset Y^r(w)\cup\Bigl(\bigcup_{Y\in J_{r-1}}Y\Bigr)$$

と仮定すると，ある $y<w$ が存在して $O_y^{gr}=O$ かつ $Y^r(y)\notin J_{r-1}$ すなわち $y\in\mathcal{S}$。これは w の極小性に反する。よって

$$V(L_w)\subset Y^r(w)\cup\Bigl(\bigcup_{Y\in J_{r-1}}Y\Bigr)。$$

これで (4.5) が示された。

$\mathrm{Irr}(\overline{O\cap m^+})$ 上の順序関係 $\succ$ を $Y\in J_r-J_{r-1}$, $Y'\in J_s-J_{s-1}$, $r>s$ なら $Y\succ Y'$ となるように定める。また各 $Y\in\mathrm{Irr}(\overline{O\cap m^+})$ に対して $w_Y\in\mathcal{C}$ を次を満たすようにとる。$Y\in J_r-J_{r-1}$ のとき $Y^r(w_Y)=Y$, $V(L_{w_Y})\subset Y\cup\bigl(\bigcup_{Y'\in J_{r-1}}Y'\bigr)$。このとき $\{w_Y\mid Y\in\mathrm{Irr}(O\cap m^+)\}$ は $\mathcal{C}/\underset{R}{\sim}$ の完全代表系である。実際 $Y\neq Y'$ なら $V(L_{w_Y})\neq V(L_{w_{Y'}})$，よって $w_Y\not\underset{R}{\sim}w_{Y'}$ (Cor. 1.5)。また $\#|\mathcal{C}/\underset{R}{\sim}|=\dim Sp(O)=\#|\mathrm{Irr}(O\cap m^+)|$ (§2)。そこで w_Y を含む $\underset{R}{\sim}$ の同値類に Y を対応させる事により Conjecture 4.1 の成立する事がわかる。■

$O\in\mathrm{Nilp}_{sp}$ のとき $\{\tau\in\hat{W}\mid\Phi(\tau)\subset\bar{O}\}\subset\{\tau\in\hat{W}\mid\Psi(\tau)\subset\bar{O}\}$ は一般に成立する ([KT]) が，逆の包含関係は一般には成立し

ない。

写像Φ, Ψ は全ての場合について具体的にわかっており（[BV1,2], [Sh1,2], [ALS]), 巾零共役類の閉包の包含関係も知られている（古典型はよく知られている。例外型は[Sh3], [M]）ので(4.3)が成立するかどうかはcheckできる。例えばE_6では全ての特殊巾零共役類$\mathcal{O}$について(4.3)が成立するのでConjecture 4.1は正しい。F_4型では11個の特殊巾零共役類のうち9個については(4.3)が成立しているが，残りの2個では成立していない。

Appendix

$\boxed{\text{A.1}}$ moment map $T^*X \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ の像は$\mathfrak{g}$の巾零元全体$\mathcal{N}$と一致し，$T^*X \xrightarrow{\gamma} \mathcal{N}$ は$\mathcal{N}$の特異点解消を与える（Springer）。導来圏での対象 $R\gamma_!(\mathbb{C}_{T^*X})$ は Weyl群の作用を持つ（Lusztig [L], [BM]も参照）。よって$\mathcal{N}$の局所閉部分代数多様体Dに対して $H_c^*(\gamma^{-1}(D), \mathbb{C}) = \mathbb{H}_c^*(D, R\gamma_!(\mathbb{C}_{T^*X})|D)$ あるいはその双対空間 $H_*(\gamma^{-1}(D))$ はW-加群になる。特に$x \in \mathcal{N}$のとき$\gamma^{-1}(x) \cong X_x$なので$H_{2d_0}(X_x)$はW-加群になる。また $T^*(X\times X) = T^*X \times T^*X \xrightarrow{\gamma\times\gamma} \mathcal{N}\times\mathcal{N}$ において $Z = (\gamma\times\gamma)^{-1}(\mathcal{N}^a)$（ここで $\mathcal{N}^a = \{(x,-x) \mid x \in \mathcal{N}\}$）なので $H_{4d}(Z)$ は$W\times W$-加群になる。ここで与えたW (resp. $W\times W$) の $H_{2d_0}(X_x)$

(resp. $H_{4d}(Z)$)への作用は[KL2]のものと一致する([H])。

$\boxed{A.2}$ Lemma 2.9, 2.10 の証明を簡単に述べる。$\mathcal{N}^a$ を $\mathcal{N}$ と同一視して $Z \xrightarrow{\rho} \mathcal{N}$ が得られる。$\mathcal{O} \in \mathrm{Nilp}$ に対して $\rho^{-1}(\overline{\mathcal{O}}) = \bigcup_{\mathcal{O}_w^{gr} \subset \overline{\mathcal{O}}} Z_w$ は Z 中で閉なので，次の $W\times W$-加群としての完全列を得る。

$$0 \longrightarrow H_{4d}(\rho^{-1}(\overline{\mathcal{O}})) \longrightarrow H_{4d}(Z) \longrightarrow H_{4d}(\rho^{-1}(\mathcal{N}-\overline{\mathcal{O}})) \longrightarrow 0$$

よって $\bigoplus_{\mathcal{O}_w^{gr}\subset\overline{\mathcal{O}}} \mathbb{C}\, b(w)$ $\left(\cong \bigoplus_{\mathcal{O}_w^{gr}\subset\overline{\mathcal{O}}} \mathbb{C}[Z_w] = H_{4d}(\rho^{-1}(\overline{\mathcal{O}}))\right)$ は $\mathbb{C}[W]$ $(\cong H_{4d}(Z))$ の $W\times W$-部分加群である。次に $\partial\overline{\mathcal{O}} = \overline{\mathcal{O}} - \mathcal{O}$ とおくとき上と同様にして

$$0 \longrightarrow H_{4d}(\rho^{-1}(\partial\overline{\mathcal{O}})) \longrightarrow H_{4d}(\rho^{-1}(\overline{\mathcal{O}})) \longrightarrow H_{4d}(\rho^{-1}(\mathcal{O})) \longrightarrow 0$$

がやはり $W\times W$-加群としての完全列。従って $W\times W$-加群として

$$\Big(\bigoplus_{\mathcal{O}_w^{gr}\subset\overline{\mathcal{O}}} \mathbb{C}\, b(w)\Big) \Big/ \Big(\bigoplus_{\mathcal{O}_w^{gr}\subset\partial\overline{\mathcal{O}}} \mathbb{C}\, b(w)\Big) \cong H_{4d}(\rho^{-1}(\mathcal{O}))$$

がわかる。$x\in\mathcal{O}$ のとき $\rho^{-1}(\mathcal{O})$ を $\mathcal{O}\cong G/Z_G(x)$ 上の fiber 束とみると $\rho^{-1}(\mathcal{O}) \cong G \times^{Z_G(x)} (X_x\times X_x)$。これから $H_{4d}(\rho^{-1}(\mathcal{O})) \cong (H_{2d_0}(X_x)\otimes H_{2d_0}(X_x))^{A(x)}$ がわかる。よって Lemma 2.9 が示された。

次に

$$\begin{tikzcd}
T^*X\times T^*X \arrow[r, "\gamma\times 1"] & \mathcal{N}\times T^*X \arrow[r, "1\times\gamma"] & \mathcal{N}\times\mathcal{N} \\
Z \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & (\gamma\times 1)(Z) \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathcal{N}^a\cong\mathcal{N} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

において $Z = f^{-1}((\gamma\times 1)(Z))$ である。よって $\mathbb{R}f_!(\mathbb{C}_Z)$ に W の作用が定まり, $H_{4d}(Z) = \left(\mathbb{H}_c^{4d}((\gamma\times 1)(Z); \mathbb{R}f_!(\mathbb{C}_Z))\right)^*$ は W-加群

になる。これは§A.1で定義された$W\times W$の$H_{2d}(Z)$への作用における$W\times 1$の作用と一致する。$(\gamma\times 1)(Z)$を$T^*X\cong G\times^B \mathfrak{n}^+$と同一視するとき$f(Z_w)=G\times^B Y^\circ(w)$なので、Iと同様にしてLemma 2.10が示される。

$\boxed{A.3}$ Lemma 2.11を示す。まず(i)を示す。Yを$O\in \mathrm{Nilp}$に付随した軌道的多様体とする。∂YをYに真に含まれる軌道的多様体全ての合併集合として、$\dot{Y}=Y-\partial Y=Y\cap O$(とおく。)§A.2により$\bigoplus_{Y^\circ(w)\subset Y}\mathbb{C}b(w)$, $\bigoplus_{Y^\circ(w)\subset\partial Y}\mathbb{C}b(w)$は$W\times 1$不変なので、$M=\left(\bigoplus_{Y^\circ(w)\subset Y}\mathbb{C}b(w)\right)/\left(\bigoplus_{Y^\circ(w)\subset\partial Y}\mathbb{C}b(w)\right)$は$W$-加群になる。$Y^\circ(w)=Y$となる$w\in W$に対して、$b(w)$の$M$での像を$\bar{b}(w)$と書くとき、$M=\bigoplus_{Y^\circ(w)=Y}\mathbb{C}\bar{b}(w)$である。$M$の$W$-不変部分加群であって$\{\bar{b}(w)\mid Y^\circ(w)=Y\}$の部分集合で張られるものは$(0)$と$M$に限る事を言えばよい。$Z_{\dot Y}=f^{-1}(G\times^B\dot{Y})$とおく($(\gamma\times1)(Z)\cong T^*X\cong G\times^B\mathfrak{n}^+$)。このとき§A.2と同様の議論により$M\cong H_{2d}(Z_{\dot Y})$である。$Z_{\dot Y}\cong\{(x,g_1B,g_2B)\in O\times X\times X\mid x\in g_2\dot{Y}\cap g_1\mathfrak{n}^+\}$なので、$x\in\dot{Y}$について$Z_{\dot Y}$を$O=G/Z_G(x)$上のfiber束と思うとき、$Z_{\dot Y}\cong G\times^{Z_G(x)}(X_x\times\hat{X}_x)$。ここで$\hat{X}_x=\bigcup_{\substack{C\in\mathrm{Irr}(X_x)\\ R(C)=Y}} C$ ((2.1)参照)。従ってW-加群として

$$M\cong \left(H_{2d_0}(X_x)\otimes H_{2d_0}(\hat{X}_x)\right)^{A(x)}。$$

ここでWの$H_{2d_0}(X_x)$への作用は§A.1で与えられたもの、

$H_{2d_0}(\widehat{X_x})$ への作用は identity である。$\mathrm{Irr}(\widehat{X_x}) = \pi^{-1}(Y)$ には $A(x)$ が推移的に作用しているので，$C_0 \in \mathrm{Irr}(\widehat{X_x})$ をひとつ固定して $A(x, C_0) = \{z \in A(x) \mid z \cdot C_0 = C_0\}$ とおくとき，

(A.1) $M \cong H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C_0)}$

となる。$\mathrm{Irr}(X_x)$ の $A(x, C_0)$-軌道分解を $\mathrm{Irr}(X_x) = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_k$ とすると，$\{\sum_{C \in I_j} [C] \mid j = 1, \ldots, k\}$ は $H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C_0)}$ の基底になり、しかも同型 (A.1) でこれは M の基底 $\{b(w) \mid Y^l(w) = Y\}$ に対応している。さて $H_{2d_0}(X_x) = \bigoplus_{\xi \in \mathcal{E}_0} (T_{(0, \xi)} \otimes \xi)$，$H_{2d_0}(X_x)^{A(x)} = T_{(0,1)} \otimes 1 = T_{(0,1)}$ なので射影 $H_{2d_0}(X_x) \xrightarrow{p} H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ が定まる。いま N が $H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C_0)}$ の non-zero な W-部分加群であって，$\{\sum_{C \in I_j} [C] \mid j = 1, \ldots, k\}$ の部分集合で張られるものとする。$H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ は既約でまた $p(\sum_{C \in I_j} [C]) = \frac{1}{\# |A(x)|} \sum_{C \in I_j} \sum_{z \in A(x)} [z \cdot C] \neq 0$。よって

$p(N) = H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$。よって $N \supset H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$。$\mathrm{Irr}(X_x)$ の $A(x)$-軌道分解を $\mathrm{Irr}(X_x) = J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_l$ (各 J_r は幾つかの I_j の合併集合) とするとき $H_{2d_0}(X_x)^{A(x)} = \bigoplus_{r=1}^{l} \mathbb{C} (\sum_{C \in J_r} [C])$。よって N のとり方から $N = H_{2d_0}(X_x)^{A(x, C_0)}$。(i) が示された。

(ii) は (i) と同値である。(iii) を示す。$O_w^{lr} = O_y^{lr}$ とする。$\{z \in W \mid O_z^{lr} = O\} \longrightarrow \mathrm{Irr}(\overline{O \cap \mathfrak{n}^-}) \times \mathrm{Irr}(\overline{O \cap \mathfrak{n}^-})$ $(z \mapsto Y^l(z), Y^r(z))$ は全射なので ([St7])，ある $z \in W$ に対して $Y^l(z) = Y^l(w)$，$Y^r(z) = Y^r(w)$ よって (i)(ii) により $w \underset{l}{\sim} z \underset{r}{\sim} y$ 特に $w \underset{lr}{\sim} y$。Lemma 2.11 から

示された。

「**Corollary A.2** $w\in W$, $O=O^{\ell r}_w$, $Y=Y^{\ell}(w)$, $x\in O$

$C\in R^{-1}(Y)$ ($\mathrm{Irr}(X_x)\xrightarrow{R}\mathrm{Irr}(\overline{O\cap m^{+}})$ (2,1)参照) とする。

$A(x,C)=\{z\in A(x)\mid z\cdot C=C\}$ とおくとき,

$$V^{\ell}_w \cong H_{2d_0}(X_x)^{A(x,C)}。」$$

「**Conjecture A.3**

(i) $w \geqq_{\ell} y \Longleftrightarrow Y^{\ell}(w)\supset Y^{\ell}(y)$

(ii) $w \geqq_{r} y \Longleftrightarrow Y^{r}(w)\supset Y^{r}(y)$

(iii) $w \geqq_{\ell r} y \Longleftrightarrow \overline{O^{\ell r}_w}\supset \overline{O^{\ell r}_y}$ 」

追記 本文を書いた後で次の事がわかったので，ここに記す。Borho-Brylinski 予想は次の(A)と同値であった(§4.1)。

「(A) 特殊表現 $Sp(O^{LR}_w)=\sigma(w)$ の2種類の基底 $\{g_Y\mid Y\in\mathrm{Irr}(\overline{O\cap m^{+}})\}$ $\{P_{y^{-1}}\mid y\in C^{LR}_w/\underset{R}{\sim}\}$ は定数倍を除いて一致する。」

一方 Kazhdan-Lusztig は，1979年頃，次の仮説(B)の反例を B_3, C_3 で発見した(未発表)。

「(B) 特殊表現の基底 $\{g_Y\mid Y\in\mathrm{Irr}(\overline{O\cap m^{+}})\}$ は，ある W-graph ([KL1]参照)からくる Hecke 環の表現の基底を $q\mapsto 1$ と特殊化したものと一致する。」

そこで次の(C)が示されれば，(B)の反例の存在から(A)の反例の存在が導かれる。

「(C) 特殊表現の基底 $\{P_{y^{-1}} \mid y \in \mathcal{C}_w^{LR}/\underset{R}{\sim}\}$ は，ある W-graph からくる Hecke 環の表現の基底を $q \mapsto 1$ と特殊化したものと定数倍を除いて一致する。」

(C) は次の様にして示される。σ を特殊表現，V を σ を含む両側 cell 表現とし，V の左 cell 表現への分解を $V=\oplus_i V_i$ とする。V は $W\times W$-加群で各 V_i は $1\times W$-部分加群である。$1\times W$ の V への作用により V を W-加群と思って $\mathrm{Hom}_W(\sigma,V)$ を考える。$W\times 1$ の V への作用により，これは W-加群になり，しかも $\sigma \simeq \mathrm{Hom}_W(\sigma,V)=\oplus_i \mathrm{Hom}_W(\sigma,V_i)$ となる。また $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_W(\sigma,V_i)=1$ である。[Gy] によりある W-graph があって，これに対応する Hecke 環の表現 $\tilde{\sigma}$ を $q\mapsto 1$ と特殊化したものは σ と同型。さらに W-graph から定まる $\tilde{\sigma}$ の基底を $q\mapsto 1$ と特殊化したものはある $\mathrm{Hom}_W(\sigma,V_i)$ を張る。さて，$[y_1 \underset{LR}{\geq} y_2,\ y_1 \underset{LR}{\not\sim} y_2 \Rightarrow \deg P_{y_1} < \deg P_{y_2}]$ なので V から σ への，W-加群としての全射準同型 φ があって，$\dim \varphi(V_i)=1$。また $\varphi(V_i)$ はある $P_{y^{-1}}$ により張られる。$x\in\sigma, x\neq 0$ をひとつとるとき $\mathrm{Hom}_W(\sigma,V) \xrightarrow{F_x} \sigma$ $(f \longmapsto \varphi(f(x)))$ は W-加群としての同型写像。定義から明らかに，$F_x(\mathrm{Hom}_W(\sigma,V_i))=\varphi(V_i)$。よって (C) が示された。

REFERENCE

[ALS] Alvis, D., Lusztig, G., Spaltenstein, N. : On Springer's correspondence for simple groups of type E_n (n=6,7,8). Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 92, 65-78 (1982)

[BV1] Barbasch, D., Vogan, D. : Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups. Math. Ann. 259, 153-199 (1982)

[BV2] ———, ——— : Primitive ideals and orbital integrals in complex exceptional groups. J. Algebra 80, 350-382 (1983)

[BeB] Beilinson, A., Bernstein, J. : Localisation de $\underline{g}$-modules. Comptes Rendus 292, 15-18 (1981)

[BoB1] Borho, W., Brylinski, J.-L. : Differential operators on homogeneous spaces. I. Invent. Math. 69, 437-476 (1982)

[BoB2] ———, ——— : ——————————. III. Invent. Math. 80, 1-68 (1985)

[BM] ———, MacPherson, R. : Representations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les varietes de nilpotents. Comptes Rendus 292, 707-710 (1981)

[BK] Brylinski, J.-L., Kashiwara, M. : Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems. Invent. Math. 64, 387-410 (1981)

[D] Duflo, M. : Sur la classification des ideaux primitifs dans l'algebre enveloppante d'une algebre de Lie semi-simple. Ann. Math. 105, 107-120 (1977)

[Gi] Ginsburg, V. : $\underline{g}$-modules, Springer's representations and bivariant Chern classes. Preprint, Moscow (1984)

[Gy] Gyoja, A. : On the existence of a W-graph for an irreducible representation of a Coxeter group. J. Algebra 86 422-438 (1984)

[H] Hotta, R. : On Joseph's construction of Weyl group representations. Tohoku Math. J. 36, 49-74 (1984)

[J1] Joseph, A. : W-module structue in the primitive spectrum of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra. In: Noncommutative harmonic analysis, Lecture Notes in Math.. 728 116-135. Berlin Heidelberg New York: Springer 1979

[J2] ——— : Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra I, II. J. Algebra 65, 269-316 (1980)

[J3] ——— : On the variety of a highest weight module. J. Algebra 88, 238-278 (1984)

[J4] ——— : On the associated variety of a primitive ideal. J. Algebra 93, 509-523 (1985)

[KT] Kashiwara, M., Tanisaki, T. : The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold -related to the Weyl group algebra. Invent. Math. 77, 185-198 (1984)

[KL1] Kazhdan, D., Lusztig, G. : Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. Invent. Math. 53, 165-184 (1979)

[KL2] ———, ——— : A topological approach to Springer's representations. Adv. Math. 38, 222-228 (1980)

[L] Lusztig, G. : Green polynomials and singularities of unipotent classes. Adv. Math. 38, 169-178 (1981)

[LV] ———, Vogan, D. : Singularities of closures of K-orbits on flag manifolds. Invent. Math. 71, 365-379 (1983)

[M] Mizuno, K. : The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups E_7 and E_8. Tokyo J. Math. 3, 391-461 (1980)

[Sh1] Shoji, T. : On the Springer representations of the Weyl groups of classical algebraic groups. Comm. Alg. 7, 1713-1745 (1979), Correction Comm. Alg. 7, 2027-2033 (1979)

[Sh2] ——— : On the Springer representations of Chevalley groups of type F_4. Comm. Alg. 8, 409-440 (1980)

[Sh3] ——— : On the Green polynomials of a Chevalley group of type F_4. Comm. Alg. 10, 505-543 (1982)

[Spa] Spaltenstein, N. : On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups. Topology 19, 203-204 (1977)

[Spr] Springer, T. A. : Quelque applications de la cohomologie d'intersection. Seminaire Bourbaki, expose 589. Asterisque 92-93, 249-273 (1982)

[St] Steinberg, R. : On the desingularization of the unipotent variety. Invent. Math. 36, 209-224 (1976)

[T1] Tanisaki, T. : Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups. Tohoku Math. J. 34, 575-585 (1982)

[T2] ——— : Holonomic systems on a flag variety associated to Harish-Chandra modules and representations of a Weyl group. Adv. Studies in Pure Math. 6, 139-154 (1985)

[V] Vogan, D. : Ordering of the primitive spectrum of a semisimple Lie algebra. Math. Ann. 248, 195-203 (1980)