数理解析研究所講究録
第632巻 1987年 174-185

ユニタリ化可能なHarish-Chandra加群の有界性について

東大 理 大島利雄 (Toshio Oshima)

<u>0.</u> Gを，中心が有限で連結な実半単純リー群，$G=KA_pN$をその岩沢分解とする．対称空間G/H上のK有限な函数$\phi(g)$が，既約でユニタリ化可能なHarish-Chandra加群を生成するための条件はどうなるか？たとえば，"$\phi(g)$は有界となることが必要か"という問題を，昨年Flensted-Jensenに尋ねられたが，Flensted-JensenやSchlichtkrullとの議論で，直ちに後者は肯定的に解決でき，さらにそれは以下に述べるような一般的結果から導かれることがわかった。

まず，結果を述べるための記号を準備する．$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$，$\mathfrak{a}_p$，$\mathfrak{n}$を，G，K，A_p，Nのリー環，θをKに対応するCartan involutionとする．$(\mathfrak{g},\mathfrak{a}_p)$のルート系を$\Sigma$，$\mathfrak{n}$に対応する正のルートの全体を$\Sigma^+$，$\alpha\in\Sigma$に対応するルート空間を$\mathfrak{g}^\alpha$とおく．$\Sigma^+$に対応する基本ルート系を$\Psi$とおき，$\Psi=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}$となるルート$\alpha_i$を定めて

おく．$\{H_1, \ldots, H_\ell\}$ をその双対基底，すなわち，$H_j \in \mathfrak{a}_p$ で，$\alpha_i(H_j) = \delta_{ij}$ を満たすものとする．$(\ell = \mathrm{rank}\ G/K)$

$U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_c$ の universal enveloping algebra $S(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}_c$ の symmetric algebra とし，$S(\mathfrak{g})$ の元で m 次同次のもの全体を $S(\mathfrak{g})_{(m)}$，さらに，$S(\mathfrak{g})^{(m)} = \sum_{i \leq m} S(\mathfrak{g})_{(i)}$ とおく．symmetrization $\Lambda : S(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ を用いて，$U(\mathfrak{g})^{(m)} = \Lambda(S(\mathfrak{g})^{(m)})$ とおくと

$$U(\mathfrak{g})^{(m)}/U(\mathfrak{g})^{(m-1)} \simeq S(\mathfrak{g})^{(m)}/S(\mathfrak{g})^{(m-1)} \simeq S(\mathfrak{g})_{(m)}$$

が成立するので，任意の $p \in U(\mathfrak{g})$ に対し，$p \in U(\mathfrak{g})^{(m)} \setminus U(\mathfrak{g})^{(m-1)}$ となる m を用いて，上の対応で $\mathring{p} \in S(\mathfrak{g})_{(m)}$ を定義する。また，Killing form を用いて，$\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ と $\mathfrak{g}$ とを同一視する．さて，

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\ell & \longrightarrow & A_p \\ \Psi & & \Psi \\ t = (t_1, \ldots, t_\ell) & \longmapsto & a(t) \overset{\text{def.}}{=} \exp\left(-\sum_{t_j \neq 0} \log|t_j| \cdot H_j\right) \end{array}$$

という写像を用いて，次のように A_p に座標を入れる：

$$\begin{array}{ccc} (0, \infty)^\ell & \xrightarrow{\sim} & A_p \\ \Psi & & \Psi \\ t & \longmapsto & a(t) \end{array}$$

また，$t = (t_1, \ldots, t_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ に対し，$\Sigma_t = \left(\sum_{t_j \neq 0} \mathbb{R}\alpha_j\right) \cap \Sigma$

とおき，放物型部分代数 $\mathfrak{p}_t$ を，

$$\mathfrak{p}_t = \mathfrak{m}_t + \mathfrak{a}_t + \mathfrak{n}_t$$

という Langlands 分解を用いて定義する．但し，$\mathfrak{a}_t \subset \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$，$\mathfrak{n}_t = \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_t} \mathfrak{g}^\alpha$ である．対応する G の放物型部分群とその Langlands 分解を $P_t = M_t A_t N_t$ とおく．

$U(\mathfrak{g})$ の元を，G 上の右不変微分作用素とみなし，$p \in U(\mathfrak{g})$ の $f \in C^\infty(G)$ への作用を $\pi(p)f$ とかく．一方，$p \in U(\mathfrak{g})$ を G 上の左不変微分作用素とみなしたときの $f \in C^\infty(G)$ への作用は，$D_R(p)f$ で表わす。よって，$X \in \mathfrak{g}$ のとき，$(\pi(X)f)(g) = \frac{d}{dt} f(e^{-tX}g) \Big|_{t=0}$，

$$(D_R(X)f)(g) = \frac{d}{dt} f(g e^{tX}) \Big|_{t=0}$$

となる．

1. 左 K 有限な元の全体から成る $C^\infty(G)$ の部分空間を，$C_K^\infty(G)$ とおく．$f \in C_K^\infty(G)$ に対して，

$$V_f = \pi(U(\mathfrak{g}))f$$

とおくと，V_f は，$(\mathfrak{g}, K)$-加群となる（V_f は，左 $\mathfrak{g}$ 加群かつ左 K 加群で，V_f の各元は左 K 有限で，V_f 上，$\pi(k)\pi(X) = \pi(Ad(k)X)\pi(k)$ が成立する）。このとき，

定義　高々有限個の既約表現の直和に同型な G のユニタリ表現 (τ, E) があって，V_f が E の K 有限なベクトルの

作る空間 E_K と $(\mathfrak{g}, K)$ 加群として同型となるとき，V_f はユニタリ化可能な Harish-Chandra 加群であるという．
(E_K の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の構造は，τ から導かれたものとする)．

<u>定理</u>　$f \in C_K^\infty(G)$，$g_0 \in G$，$t \in [0, \infty)^\ell$ が与えられていて，次の2つの条件を満たしているとする．

(A.0)　V_f はユニタリ化可能な Harish-Chandra 加群

(A.1)　$U(\mathfrak{g})$ の部分集合 J が存在して，

i)　f は，右 J 有限（すなわち，f を含む $C_K^\infty(G)$ の有限次元部分集合 F で，$D_R(p)F \subset F$　$(\forall p \in J)$ となるものが存在する）．

ii)　$N(J) = \{X \in \mathfrak{g}\ ;\ \mathring{p}(X) = 0 \quad (\forall p \in J)\}$
とおいたとき，
$$N(J) \cap \mathrm{Ad}(g_0)\theta(\mathfrak{n}_t) = \{0\}.$$

このとき，任意の $g_1 \in G$ に対し，G における g_1 の近傍 U_{g_1} と，$\mathbb{R}^\ell$ における t の近傍 U_t で，$f(g)$ が，集合
$$\{x\, a(s)\, g_0^{-1}\ ;\ x \in U_{g_1},\ s \in U_t \cap (0, \infty)^\ell\}$$
上で有界となるものが存在する。

<u>注意</u>　次の条件 (A.1)$'$ が成立すれば，(A.1) も成立する。

(A.1)$'$　$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{R}$-subalgebra $\mathfrak{b}$ が存在して，

i)　f は，右 $\mathfrak{b}$ 有限

ii)　$\mathfrak{b}^\perp \cap \mathrm{Ad}(g_0)\theta(\mathfrak{n}_t) = \{0\}$.

2. 以下，$f \in C_K^\infty(G)$ が，条件（A.0）を満たすと仮定し，定理の適用例を示す。

2.0. f が右 K 有限 $\Rightarrow$ f は G 上有界

（証明）$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とし，（A.1）$'$ において $\mathfrak{b} = \mathfrak{k}$ とおくと，$\mathfrak{p} = \mathfrak{b}^\perp \cap \mathfrak{g}$ の元は semisimple であるから，任意の $g_0 \in G$ と $t \in [0, \infty)^l$ に対して（A.1）$'$ が成立する。一方，$G = K\{a(t);\ t \in (0, 1]^l\}K$ であって $K \times [0, 1]^l$ が compact なことに注意すれば，定理の局所有界性の結論から，f の G 全体での有界性が得られる。

2.1. σ を θ と可換な $\mathfrak{g}$ の involution（すなわち，order が 2 の automorphism）とする．H を，$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}\ ;\ \sigma(X) = X\}$ に対応する G の解析的部分群とする．f は右 H 有限で，f の右 H 移動から生成される有限次元線型空間に，H 不変な内積が入ると仮定する[1]（特に，f が右 H 不変ならよい）。このとき，f は G 上有界となる。

（証明）$\mathfrak{q} = \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{g}$ とおき，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{q}$ のある極大アーベル部分空間とし，$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{p}$ の極大アーベル部分空間 $\mathfrak{a}_p$ を固定して考える．$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ のルート系を $\Sigma(\mathfrak{a})$ とおき，正のルートの集合 $\Sigma(\mathfrak{a})^+$ を定め，それと両立するように $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_p)$ の正のルートの集合 Σ^+ を定める。

$$\overline{\mathfrak{a}}_+ = \{X \in \mathfrak{a}\ ;\ \alpha(X) \geq 0 \quad (\forall \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})^+)\}$$

とおき，$A=\exp\mathfrak{a}$，$\overline{A}_+=\exp\overline{\mathfrak{a}}_+$ とおくと，

$$\overline{A}_+ \subset \{a(t)\,;\ t\in(0,1]^l\}$$

が成立する。$N_K(\mathfrak{a})$ と $Z_K(\mathfrak{a})$ を，それぞれ $\mathfrak{a}$ の K における normalizer および centralizer とする。このとき，$N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$ は自然に $\Sigma(\mathfrak{a})$ の Weyl 群とみなせる．その完全代表系を，$\{g_0^{(1)},\dots,g_0^{(r)}\}$ とおくと，

$$G=KAH=K\overline{A}_+N_K(\mathfrak{a})H=\bigcup_{i=1}^{r}K\overline{A}_+g_0^{(i)}H$$

が成り立つ。このとき，$\mathfrak{b}=\mathfrak{h}$，$t\in\{t\in(0,1]^l\,;\ a(t)\in\overline{A}_+\}$，$g_0=g_0^{(i)}$ $(i=1,\dots,r)$ に対して $(A.1)'$ が成立することが容易にわかるので，2.0 の場合と同様に f の有界性が得られる。

<u>2.2.</u> ある $[0,\infty)^l$ の元 t に対し，f は右 $\mathfrak{n}_t$ 有限とする。このとき，f は

$$\{ga\in G\,;\ g\in U,\ a\in A_t,\ \alpha(\log a)\geq C\ \ (\forall\alpha\in\Sigma^+)\}$$

上で有界となる．但し，U は G の任意の compact 部分集合，C は任意の実数。

これは，定理から直ちにわかる．Whittaker model の場合に適用できる。一方，主系列の場合に適用すると，たとえば

$$f(gan)=f(g)\exp\lambda(\log a)\quad,\forall a\in A_t,\ \forall n\in N_t$$

が，ある $\lambda\in(\mathfrak{a}_t)^*_{\mathbb{C}}$ に対して成立するならば，

$$\mathrm{Re}\ \lambda(H_j)\leq 0\qquad \text{if}\quad t_j=0$$

でなくてはならない。[2]（ここで，$t=(t_1,\dots,t_l)$）．

3. 定理の証明について述べる.

補題1. $f \in C_K^\infty(G)$ と, $g_0, g_1 \in G$ と $t \in [0,\infty)^\ell$ が与えられていて (A.1) を満たし, しかも V_f は長さが有限の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群とする. g_1 の G における如何なる近傍 U_{g_1} と, t の $\mathbb{R}^\ell$ における如何なる近傍 U_t に対しても, f が

$$\{x\, a(s) g_0^{-1}\ ;\ x \in U_{g_1},\ s \in U_t \cap (0,\infty)^\ell\}$$

上で有界でないならば, ある $\delta \in \hat{K}$ が存在して,

$$f_\delta(g) = \chi_\delta(e)\int_K f(gk)\chi_\delta(k^{-1})\,dk$$

は, G 上有界とはならない。((A.0) は仮定しなくてよい).

ここで, $\hat{K}$ は, K の既約ユニタリ表現の同値類の集合で, χ_δ は, $\delta \in \hat{K}$ に対応する character である. $f \in C_K^\infty(G)$ に対し, V_f が ユニタリ化可能な Harish-Chandra 加群ならば V_f は, 既約でユニタリ化可能な Harish-Chandra 加群の有限個の直和に分解されるので, 定理は, 補題1を用いることによって次の補題, すなわち 2.0. の場合に帰着される。

補題2 $f \in C_K^\infty(G)$ に対し, V_f が (A.0) を満たし, f が右 K 有限ならば, f は G 上有界となる。

実際, $f \in C_K^\infty(G)$ に対し, V_f が既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群ならば $f_\delta \neq 0$ を満たす $\delta \in \hat{K}$ に対し, V_{f_δ} と V_f とは $(\mathfrak{g}, K)$ 加群として同型となることに注意しよう。

以下, まず補題1の証明について述べよう.

$\tilde{G} = G \times G$ の involution $\sigma(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ に対応する対称空間 $X = G/\Delta G$ を考える。($\Delta G = \{(g, g) ; g \in G\}$)。写像 $\tilde{G} \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$ によって引き起こされる同型 $X \simeq G$ によって X と G とを同一視する。G の元の G への左からの作用は，$\tilde{G}$ の第1成分の X への作用に，右からの作用は第2成分による作用に翻訳されることに注意しよう。一般に，半単純対称空間に対し，それのある自然なコンパクト多様体への埋め込みが構成できる([2], [3])。我々の X の場合は，次のようになる。

$\hat{X} = \tilde{G} \times \mathbb{R}^\ell$ の元 (g, t) に対する同値関係 $\sim$ を，

$$(g, t) \sim (g', t')$$

$$\overset{\mathrm{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathrm{sgn}\, t = \mathrm{sgn}\, t' \quad \text{かつ} \quad \tilde{g}\,\tilde{a}(t)\tilde{P}_t = \tilde{g}'\,\tilde{a}(t')\tilde{P}_{t'}$$

によって定義する。ここで，

$$\mathrm{sgn}\, t = (\mathrm{sgn}\, t_1, \ldots, \mathrm{sgn}\, t_\ell) \in \{-1, 0, 1\}^\ell$$

$$\tilde{a}(t) = (a(t), a(t)^{-1}) \in \tilde{G}$$

$$\tilde{P}_t = \{(m a_1 n_1, m a_2 n_2) \in \tilde{G} ; m \in M_t, a_1 \in A_t, a_2 \in A_t, n_1 \in N_t, n_2 \in \theta(N_t)\}.$$

$\tilde{X} = \hat{X}/\sim$ とおき，$\hat{X}$ から $\tilde{X}$ への射影を ω で表わす。$\tilde{X}$ への $\tilde{G}$ の元の作用は，$\hat{X}$ の第1成分への左からの作用から定義される。$\tilde{X}$ には，自然にコンパクト実解析的多様体の構造が入り，しかも，$\tilde{X}$ 上の $\tilde{G}$ 軌道の数は有限個となる。

$\omega(e,(1,\cdots,1))$ のisotropy群は ΔG となるので，X と $\tilde{X}$ の開 $\tilde{G}$ 軌道 $\omega(G\times\{(1,\cdots,1)\})$ とを同一視する。

$U(\mathfrak{g})$ の中心を $Z(\mathfrak{g})$ とおく．補題1の f に対し，V_f の長さの有限性より，有限余次元の $Z(\mathfrak{g})$ の ideal I が存在して

$$\mathcal{M} \ : \ \pi(D)f=0 \qquad (\forall D\in I)$$

が成立することがわかる．さらに，$\pi(K)D_R(J)f$ で張られる有限次ベクトル空間の基底を並べた縦ベクトルは，

$$\mathcal{N}:\begin{cases}\pi(D)\vec{f}=0 & (\forall D\in I)\\ \pi(H)\vec{f}=A_H\vec{f} & (\forall H\in \mathfrak{k})\\ D_R(p)\vec{f}=B_p\vec{f} & (\forall p\in J)\end{cases}$$

を満たす（ここで，A_H，B_p は複素数を成分とする正方行列）．

$\mathcal{M}$，$\mathcal{N}$ を X 上の微分方程式とみなすとそれは $\tilde{X}$ 上の微分方程式に解析接続されるので，それも同じ記号で表わす。方程式 $\mathcal{N}$ の特性多様体を $SS\,\mathcal{N}$ とおくと，$\tilde{x}=\omega((g_1,g_0),t)$ に対し，(A.1) ii) の仮定から

$$SS\,\mathcal{N}\cap T^*_{\tilde{x}}\tilde{X} \quad\subset\quad T^*_{\tilde{G}\tilde{x}}\tilde{X}$$

がわかる。$\mathcal{M}$ および $\mathcal{N}$ は，X の $\tilde{X}$ での境界に沿って確定特異点を持つ方程式となるが，上の条件は，$\mathcal{N}$ の解 $\vec{f}$ が $\tilde{x}$ の近傍で ideally analytic となることを意味している（[4] Theorem 5.2, 5.3）．すなわち，$\tilde{x}$ の近傍で $\tilde{X}$ の座標系 $(t_1,\dots,t_m,x_1,\dots,x_n)$ を，X が $t_1>0,\dots,t_m>0$ で，$\tilde{G}\tilde{x}$

が $t_1 = \cdots = t_m = 0$ で定義されているようにとると，

$$\vec{f}(x) = \sum_{finite} \vec{a}_\nu(t,x)\, p_\nu(\log t)\, t^{\lambda_\nu}$$

の形に表わせる（ここで，$\vec{a}_\nu$ は $\mathring{x}$ の近傍で解析的，p_ν は $(\log t_1, \ldots, \log t_m)$ の多項式，$t^{\lambda_\nu} = t_1^{\lambda_{\nu,1}} \cdots t_m^{\lambda_{\nu,m}}$，$\lambda_\nu \in \mathbb{C}^m$）。一方，一般に $\mathcal{M}$ の解 f の空間上に境界値写像 $\beta_1, \ldots, \beta_N$ が定義されて，β_k は，$\beta_i(f) = 0$ $(1 \le {}^\forall i \le k-1)$ を満たす $\mathcal{M}$ の解の空間から，境界 $\tilde{G}\mathring{x}$ 上のある line bundle の hyperfunction sections の空間への $\tilde{G}$-equivariant な写像となる（$k = 1, \ldots, N$）。(generic な場合は，$p_\nu \equiv 1$，$\beta_\nu(\vec{f}) = \vec{a}_\nu(0,x)$ととれ，しかも $a_\nu(0,x) \equiv 0 \Rightarrow a_\nu(t,x) \equiv 0$ となる.) さらに，ある自然数 M が存在して，$\mathcal{M}$ の解 f が $\mathring{x}$ で ideally analytic なら

"f が $\mathring{x}$ の近傍で有界" $\Leftrightarrow$ "$\beta_1(f), \ldots, \beta_M(f)$ が $\mathring{x}$ の近傍で 0"

よって，補題1の仮定を満たす f に対し，ある $L \le M$ があって，$\beta_1(f) = \cdots = \beta_{L-1}(f) = 0$，$\beta_L(f) \ne 0$ としてよい。K 上の任意の実解析的函数 $\varphi(k)$ に対し，$\int_K \varphi(k)\, \pi(e,k)\, \beta_L(f)\, dk = \int_K \varphi(k)\, \beta_L(\pi(e,k) f)\, dk$ となることに注意すれば，$\beta_L(f_\delta) \ne 0$ を満たす $\delta \in \hat{K}$ の存在がわかる。f_δ は $\tilde{G}\mathring{x}$ の各点で ideally analytic となるから，f_δ は有界ではない。

次に，補題2の証明について述べよう。f は両側 K 有限で V_f は既約なユニタリ化可能な Harish-Chandra 加群としてよい。f を，$D_R(U(\mathfrak{k}))f$ の適当な元で置き換えることにより，

$D_R(U(\mathfrak{k}))f$ は，（右移動による作用で）既約K加群としてよい。さらに，適当な $\pi(U(\mathfrak{g}))f$ の元で置き換えて，$f(e)\neq 0$ と仮定できる。$\pi(U(\mathfrak{g}))D_R(U(\mathfrak{k}))f$ は，X上の函数の集合とみて既約 $(U(\mathfrak{g})\otimes 1,\ K\times K)$ 加群となるが，f が有界でないならばXの境界のある点の任意の近傍で有界でない。そこで，先の記号を用いて $\beta_1(f)=\cdots=\beta_{L-1}(f)=0$，$\beta_L(f)\neq 0$ としてよい。$\bigcap_{i=1}^{L}\ker\beta_i$ は $\tilde{G}$-不変だから，$\pi(U(\mathfrak{g}))D_R(U(\mathfrak{k}))f$ の0でない元は有界でない。特に，$G\ni g\longmapsto\int_K f(kgk^{-1})dk$ は有界とならない。よって，補題2は，次の補題に帰着された。

<u>補題3</u>　$f\in C_K^\infty(G)$ が，(A.0) を満たし，さらに，$f(g)=f(kgk^{-1})$ $(^\forall g\in G,\ ^\forall k\in K)$ となるなら有界である。

（証明）V_f が，Gのユニタリ表現 (τ, E) のHarish-Chandra加群と同型であるとする。$U(\mathfrak{g})^K$ を $U(\mathfrak{g})$ のK不変元の全体とする．$U(\mathfrak{g})^K f$ の基底 $v_1,\ldots,v_n$ を，$(v_i,v_j)=\delta_{ij}$ となるようにとる（$(\ ,\ )$ は，G不変なEの内積）。$v=\sum v_j(e)v_j$ とおき，任意の $D\in U(\mathfrak{g})$ に対し

$$\begin{cases}\overline{D}=\int_K Ad(k)D\,dk\\ \overline{D}f=\sum C_D^j v_j\end{cases}$$

とおく $(C_D^j\in\mathbb{C})$。すると，$(Df)(e)=(\overline{D}f)(e)=\sum C_D^j v_j(e)=(\sum C_D^j v_j,\ \sum v_i(e)v_i)=(\overline{D}f,\ v)=\int_K(Ad(k)Df,\ v)dk$ となる。したがって，

$$f(g) = \int_K (\tau(kgk^{-1})f, v)\,dk$$

が成立する。(実際，両者の e での Taylor 展開が一致している。)

よって，$|f(g)|^2 \leq (f,f)(v,v)$ より，f の有界性がわかる。

注

1) "H 上の楕円型作用素 $p \in U(\mathfrak{h})$ で，$D_R(p)f = 0$ を満たすものがある" という，より弱い条件なら KA 上有界.

2) 文献 [1] の p.157 を参照.

文献

[1] A. W. Knapp and G. Zuckerman, *Classification theorems for representations of semisimple Lie groups*, Lect. Notes in Math., 587 (1977), 138-159.

[2] 大島利雄，半単純対称空間上の調和解析，数学，37 (1985), 97-112，岩波.

[3] ――――――, *A realization of semisimple symmetric spaces and construction of boundary value maps*, to appear.

[4] ――――――, *Boundary value problem for systems of linear partial differential equations with regular singularities*, Advanced Studies in Pure Math., 4 (1984), 331-390.