

Multiplicity free property for generalized Gelfand-Graev
representations of semisimple Lie groups

京大理 山下 博 (Hiroshi YAMASHITA)

§1. 序. G を中心有限、連結半単純リ-群、 \mathfrak{g} をそのリ-環とする。 G の極大巾単部分群の非退化な指標から誘導された G の表現は、Gelfand-Graev (G.G.) 表現と呼ばれる。 G が線型かつ quasi-split の場合には、G.G. 表現は、 C^∞ -context で multiplicity-free である ([9])。 すなわち、 G の任意の既約 unitary 表現をとったとき、それに対応する G の smooth な表現の、G.G. 表現への連続かつ G -equivariant な埋め込み (Whittaker model) は一意的である。 本稿では、この性質の一般化について考察する。

いかなる既約表現が Whittaker model を持つかという事については、おもに主系列表現を通して、研究が進められてきた (例えば、[4])。 その一方、[2] において、highest weight を持つ既約表現は、 G が特別な場合を除いては Whittaker model を持たない事が示され、unitarizable highest weight module が infinitesimal に埋め込める様に、G.G. 表現の一般

化がなされた。また、 p -進体上の rank の低い群 ($GSp(2)$, $SU(2,1)$) に対しては、上と同様な一般化が研究されている ($GSp(2)$ については、例えば [6], [7])。

この様に、 G のすべての既約表現を相手にする場合には、 G . G .表現の一般化が必要になる。[3] において、上記をすべて含む統一的な一般化 — generalized Gelfand-Graev (g . G . G .表現) — が、有限体または局所体上の半単純代数群に対して定義され、有限体上の群について研究されている。

我々は、 G の g . G . G .表現における (縮退) 主系列表現の重複度について調べた ([10])。一般には、 g . G . G .表現に無限の重複度で現われる既約表現があった。そこで我々は、 g . G . G .表現における各既約表現の重複度を、高々有限に、できれば高々 1 に reduce するべく、reduced g . G . G .表現なるものを考え (§4 参照)、[2] と同様の幾つかの場合に、それらが実際に multiplicity free になる事を示す (定理 9)。定理 9 は、 $GSp(2)$ に対する [6] および [7] の結果と、一部対応している。また、主系列表現の reduced g . G . G .表現における重複度について、その上からの評価を手える (命題 10)。

§2. Generalized Gelfand-Graev 表現 ([3])

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解、それに対応する Cartan 対合

を θ で表す. \mathfrak{p} の極大可換部分空間 \mathfrak{o} をとり, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{n}$, $G = KA_pN$ ($A_p = \exp \mathfrak{o}$) を、各々対応する \mathfrak{g} , G の岩沢分解とする. Λ を \mathfrak{g} の \mathfrak{o} に関する root 系, Λ^+ を \mathfrak{n} に対応する Λ の正の root 全体, Π を Λ^+ の simple root 全体とする.

A を \mathfrak{g} の 0 でない中零元とする. この時, Jacobson-Morozov の定理により, A を含む \mathfrak{sl}_2 -triple $\{A, H, \bar{A}\} \subseteq \mathfrak{g}$:

$$[H, A] = 2A, \quad [H, \bar{A}] = -2\bar{A}, \quad [A, \bar{A}] = H$$

が存在する. A の代りに, その適当な $\text{Ad}(G)$ -共役を考えることにより, H は \mathfrak{o} の dominant element と仮定してよい. \mathfrak{sl}_2 の有限次元表現論により, $\text{ad}H$ は \mathfrak{g} 上半単純で, その固有値はみな整数である. \mathfrak{g} の $\text{ad}H$ による固有空間分解を, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{(i)}_A$ と書く. $i \geq 1$ に対して, $\pi^{(i)}_A = \sum_{k \geq i} \mathfrak{g}^{(k)}_A$ は, $\pi^{(1)}_A$ の部分環であり, $\pi^{(1)}_A$ は, 放物型部分環 $\mathfrak{g}^{(0)}_A \oplus \pi^{(1)}_A$ の中零根基である. (ξ_A, \mathfrak{h}_A) を, $\pi^{(1)}_A$ 上の線型形式 $X \mapsto B(X, \theta A)$ (B は \mathfrak{g} の Killing 形式) に Kirillov の方法で対応する, $N_A = \exp \pi^{(1)}_A$ の既約 unitary 表現とする. この時, 次で定まる G の表現 $(\pi_A, C^\infty(G; \xi_A))$ を考える:

$$C^\infty(G; \xi_A) = \{f: G \rightarrow \mathfrak{h}_A; C^\infty\text{-函数}, f(gn) = \xi_A(n)^{-1} f(g), g \in G, n \in N_A\},$$

$$(\pi_A(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \quad f \in C^\infty(G; \xi_A), \quad g, x \in G.$$

$C^\infty(G; \xi_A)$ に通常の Schwartz 位相を導入すると, π_A は G の smooth な表現となる. π_A は, 表現の同値類としては,

sl_2 -triple の取り方に依らず A に依ってのみ定まる。更には、 A を通る中零 $Ad(G)$ -軌道に依ってのみ定まる。

定義. 表現 $(\pi_A, C^\infty(G; \xi_A))$ を、 A に対応する (もしくは、 A を通る中零 $Ad(G)$ -軌道に対応する) generalized Gelfand-Graev (g, G, G) 表現 と呼ぶ。

注意. A が \mathfrak{g} の正則中零元の場合には、 $N_A = N$ であり、 ξ_A は N の非退化な unitary 指標である。この時、 π_A はもともと G, G 表現と呼ばれていたものである。ここで、 N の一次元表現 η が非退化とは、 $\eta|_{\exp \mathfrak{g}_\lambda} \neq 1, \forall \lambda \in \Pi$ が成立つことをいう (\mathfrak{g}_λ は λ の root 空間)。

§3. 超函数空間 $\mathcal{J}_A, \mathcal{J}_A^s$.

G の既約表現から g, G, G 表現への、intertwining 作用素を考察する際に現われる超函数の台について調べる。

3.1. $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の展開環 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ を、 G 上の右不変微分作用素全体と同一視する。 G の開集合 Ω 上の超函数 T に対し、 $D \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ による微分 DT を $\langle DT, \varphi \rangle = \langle T, D' \varphi \rangle$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ により定める。ここで、 $D \mapsto D'$ は、 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の principal antiautomorphism.

$P_A = N_G(N_A)$ を、 N_A を中単根基として持つ G の放物型部分群、 $\bar{P}_A = L_A N_A$ をその Levi 分解とする。 $\bar{P}_A = \theta P_A$ とおく。
 $W = N_K(\mathfrak{a})/M$, $M = Z_K(\mathfrak{a})$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ の Weyl 群とし、各 $s \in W$ に対し、 $N_K(\mathfrak{a})$ における s の代表元 s^* を 1 つ取っておく。
 $W(A) = N_{K \cap L_A}(\mathfrak{a})/M$ を W の部分群とみなし、商空間 $W/W(A)$ の、 W における 1 つの完全代表系 W_A をとる。この時、 G の $(MA_P N, \bar{P}_A)$ に関する Bruhat 分解は、 $G = \bigsqcup_{s \in W_A} G_s$,
 $G_s = N s^* \bar{P}_A$ で与えられる。 $\Omega_s = G_s \cup (\cup_{s' \in W_A, s' > s} G_{s'})$ (s' は $\dim G_{s'} > \dim G_s$ なる $s' \in W_A$ を動く) は G の開集合で、 G_s は Ω_s の閉部分多様体になる (c.f., [9, Lemma 1.7]). いま、 G (resp. Ω_s) 上の超関数空間 \mathcal{J}_A (resp. \mathcal{J}_A^s) を次の如く定める。

$$\mathcal{J}_A = \left\{ T \in C_0^\infty(G)'; \begin{array}{l} \text{(i) } XT = -\sqrt{-1} B(X, \theta A) T, \quad \forall X \in \pi(2)_A \\ \text{(ii) } T \text{ は Casimir 作用素 } \Delta \text{ の固有超関数} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{J}_A^s = \{ T \in C_0^\infty(\Omega_s)'; \text{(i), (ii) および } \text{supp}(T) \subseteq G_s \}.$$

ここで、 $\text{supp}(T)$ は T の台を表す。

我々は、次の方法で $T \in \mathcal{J}_A^s$ の台について調べる: $z \in \text{supp}(T)$ とする。 z の十分小さな開近傍 $Q (\subseteq \Omega_s)$ 上で、 T は $Q \cap G_s$ 上の超関数の transversal な方向微分の 1 次結合として、一意的に表示される。条件 (i) と上の表示を用いて、 ΔT についても同様の表示を計算する。 $\Delta T = \zeta T$ ($\zeta \in \mathbb{C}$) とする。 $0 = \Delta T - \zeta T$ の Q における表示の一意性から、各微分

を係数とする超函数を辺々比較して、 $z \in \text{spt}(T)$ なる z の必要条件を求める。かくして、次の命題を得る。

命題 1. 任意の $T \in \mathcal{J}_A^s$ の台は、次で定義される G_s の閉部分多様体 D_A^s に含まれる。

$$D_A^s = \left\{ z = ns^* \bar{p}; \quad \begin{array}{l} n \in N \cap s^* N_A s^{-1}, \quad \bar{p} \in \bar{P}_A, \\ B(\text{Ad}(n)X, \theta A) = 0, \quad \forall X \in \pi(\mathfrak{g}_A \cap \text{Ad}(s^*)\theta \mathfrak{g}_A). \end{array} \right\}$$

系 A は \mathfrak{g} の正則中零元であるとする。このとき、

(i) $W(A) = \{1\}$ であり、 $s \neq 1, \in W$ ならば、 $D_A^s = \emptyset$ が成立つ。したがって、このとき $\mathcal{J}_A^s = (0)$ 。

(ii) 制限写像 $\mathcal{J}_A \ni T \mapsto T|_{\Omega_1} \in \mathcal{J}_A^1$ は単射である。

系の主張自身は、Shalika により既に示されている ([9, Prop. 2.10])。この事実は、 G が quasi-split の場合に、 G, G 表現が multiplicity free になることを証明する過程で、重要な位置を占めた。一般の G に対して、主系列表現の G, G 表現における重複度の評価も、この系から容易に得られる。

3.2. 我々が本稿で問題にする g, G, G 表現を特定する。次の 3.3 において、それらに 命題 1 を apply する。

これ以後 (5.1 と 5.2 は除く)、 G は線型、単純で、 G/K は

Hermite対称空間と仮定する。 G/K 上の複素構造に対応する \mathfrak{p} 上の $\text{Ad}(K)$ -不変複素構造を J とする。このとき、 \mathfrak{g} の中心の元 Z_0 が存在し、 $J = \text{ad } Z_0|_{\mathfrak{p}}$ が成立つ。 \mathfrak{f} を \mathfrak{g} の compact Cartan部分環、 Σ を $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{f}_{\mathbb{C}})$ の root 系とする。 $\mathbb{R}\mathfrak{f}^*$ に、次の条件を満す線型順序を入れ、 Σ^+ を、対応する正の root 系とする: α が正の non-compact root $\Leftrightarrow \alpha(Z_0) = \mathbb{R}$. $\alpha \in \Sigma$ に対し、 α の root vector X_{α} を次の様にとる:

$X_{\alpha} - X_{-\alpha}$, $\mathbb{R}(X_{\alpha} + X_{-\alpha}) \in \mathfrak{k} \oplus \mathbb{R}\mathfrak{f}$, $[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = H'_{\alpha}$. H'_{α} は、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Killing 形式により、 co-root $\alpha^{\vee} = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ に対応する $\mathbb{R}\mathfrak{f}$ の元.

$(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\ell)$ を、次の条件 (i) ~ (iii) を満す正の non-compact root の列とする: (i) $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_\ell$, (ii) $\mathfrak{a} = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{R}(X_{\gamma_k} + X_{-\gamma_k})$ は \mathfrak{p} の極大可換部分空間, (iii) $i \neq j \Rightarrow \gamma_i \pm \gamma_j \notin \Sigma$. いま、 $\mu = \text{Ad}(\exp \frac{\pi}{4} (\sum_{k=1}^{\ell} X_{\gamma_k} - X_{-\gamma_k}))$ とおくと、 $\mu(X_{\gamma_k} + X_{-\gamma_k}) = H'_{\gamma_k}$. また、 $\lambda_k = \gamma_k \circ \mu|_{\mathfrak{a}}$ とおくと、 $(\lambda_k)_{k=1}^{\ell}$ は \mathfrak{a}^* の直交基底になる。 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ の root 系 Λ に、 $\Lambda^+ = \sum^+ \circ \mu|_{\mathfrak{a}} \setminus \{0\}$ なる順序を入れると、 Λ^+ は次のいずれかになる (restricted root theorem, c.f., [5]).

$$\text{(Case I)} \quad \Lambda^+ = \left\{ \frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_m); k > m \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_m); k \geq m \right\},$$

$$\text{(Case II)} \quad \Lambda^+ = \left\{ \frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_m); k > m \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\lambda_k; k \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_m); k \geq m \right\}.$$

(Case I) は、丁度 G/K が tube domain に解析同型になる場合

である。

$1 \leq k \leq l$ に対し、 $E_k = \frac{\sqrt{1}}{2} (H'_{\gamma_k} - (X_{\gamma_k} - X_{-\gamma_k}))$ とおく。すると、 $E_k \in \mathfrak{g}_{\lambda_k}$ 。さらに、 $H_k = X_{\gamma_k} + X_{-\gamma_k}$ 、 $F_k = b \cdot \theta E_k$ 、 $b = 2 \{ \langle \lambda_1, \lambda_1 \rangle B(E_1, \theta E_1) \}^{-1}$ とおくと、 $\{E_k, H_k, F_k\}$ は \mathfrak{sl}_2 -triplet になる。いま、 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l)$ 、 $\varepsilon_k = \pm 1$ ($1 \leq k \leq l$) に対して、 $A_\varepsilon = \sum_{k=1}^l \varepsilon_k E_k$ 、 $H = \sum_{k=1}^l H_k$ 、 $\bar{A}_\varepsilon = \sum_{k=1}^l \varepsilon_k F_k$ とおくと、 $\{A_\varepsilon, H, \bar{A}_\varepsilon\}$ もまた \mathfrak{sl}_2 -triplet になる。我々は、 A_ε に対応する \mathfrak{g} -G.G. 表現 π_{A_ε} を問題にする。

注意 (i) A_ε 、 $\varepsilon \in \{1, -1\}^l$ は、すべて同一の中零 $I(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ -軌道 $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ に属する。ここで、 $I(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ は $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の随伴群を表す。(ii) $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}$ は、 $l+1$ 個の中零 $\text{Ad}(G)$ -軌道の和である。その代表系を、 $\{A_\varepsilon\}$ のなかから取ることができる。(iii) $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ 、 $\varepsilon' = (\varepsilon'_k)$ に対して、 A_ε と $A_{\varepsilon'}$ が $\text{Ad}(G)$ -共役であるための条件は、 $\#\{k: \varepsilon_k = 1\} = \#\{k: \varepsilon'_k = 1\}$ が成立つことである。ただし、集合 M の濃度を $\#M$ で表す。

3.3. A_ε に対して、命題 1 を apply しよう。Weyl 群 W は、 $W = \mathfrak{S}_l \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$ (\mathfrak{S}_l ; l 次対称群) であり、その \wedge への作用は、 $(\sigma\delta)\lambda_k = \delta_k \lambda_{\sigma(k)}$ 、 $\sigma \in \mathfrak{S}_l$ 、 $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_l)$ 、 $\delta_k = \pm 1$ で与えられる。さらに、 $W(A_\varepsilon) = \mathfrak{S}_l$ ゆえ、 $W_{A_\varepsilon} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$

$= \{\delta; \delta \in \{1, -1\}^l\}$ と取れる。また、 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{|i| \leq 2} \mathfrak{g}(i)$, $\mathfrak{g}(i) = \mathfrak{g}(i)_{A_\varepsilon}$ (ε に無関係) で、

$$\mathfrak{g}(2) = \sum_{k \geq m} \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_m)}, \quad \mathfrak{g}(1) = \sum_k \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}\lambda_k},$$

$$\mathfrak{g}(0) = \pi \oplus \alpha \oplus \sum_{k \neq m} \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_m)}, \quad \pi = \mathfrak{z}_k(\alpha)$$

が成立つ。 $\pi(i) = \pi(i)_{A_\varepsilon}$ とおく。

補題2 ([8, Th. 4.10]). $k > m$ なる (k, m) に対し、 $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_m)}$ 上の正定値2次形式 ζ_{km} が存在して、 $\frac{1}{2}(\text{ad } X)^2 E_m = \zeta_{km}(X) E_k$, $\forall X \in \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_m)}$ が成立つ。

これより、容易に次の補題を得る。

補題3. $\delta = (\delta_k) \in \{1, -1\}^l$ とする。 $\delta_i = -1$ なる i に対し、

$$\text{Ad}(\exp X) E_i \equiv E_i + \sum_{\substack{r > i \\ \delta_r = 1}} \overline{\zeta}_{ri}(X) E_r \pmod{\sum_{k > m} \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_m)}},$$

$$\forall X \in \pi \cap \text{Ad}(\delta^*) \pi(1)$$

が成立つ。ただし、 $\overline{\zeta}_{ri}(X) = \zeta_{ri}(p_{ri}(X))$, $p_{ri}: \pi \rightarrow \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_r - \lambda_i)}$ は、 π の root 空間分解に沿った $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_r - \lambda_i)}$ への射影作用素。

補題3と、 $\delta_i = -1$ ならば $E_i \in \mathfrak{g}(2) \cap \text{Ad}(\delta^*) \mathfrak{g}(-2)$ であることに注意して、命題1を用いる。かくして、次の定理を得る。

定理4. $\varepsilon = (\varepsilon_k), \delta = (\delta_k) \in \{1, -1\}^l$ とする. $i_\delta = \max_{\delta_i = -1} (i)$ とおく. この時、 $(\varepsilon_{i_\delta}, \varepsilon_{i_\delta+1}, \dots, \varepsilon_l)$ がすべて同符号ならば、 $J_{A_\varepsilon}^\delta = (0)$ が成立つ. 特に、 $\delta \neq \mathbb{1}$ ならば $J_{A_{\pm 1}}^\delta = (0)$, ($\mathbb{1} = (1, \dots, 1)$).

注意. 一般の ε に対しては、" $\delta \neq \mathbb{1} \Rightarrow J_{A_\varepsilon}^\delta = (0)$ " は成り立たない. $G = Sp(2, \mathbb{R}), \varepsilon = (1, -1), \delta = (-1, 1)$ で既に反例がある.

系. 制限写像 $J_{A_{\pm 1}} \ni T \mapsto T|_{\Omega_1} \in J_{A_{\pm 1}}^1$ (複号同順) は単射.

§4. Reduced generalized Gelfand-Graev 表現.

以後、 $A = A_1$ の場合のみを取扱う. 3.2 での記号を、添字 ε を略して用いる. Abel 群 $\exp \mathfrak{g}(2)$ の unitary 指標 η を、 $\eta(\exp X) = \exp \int \eta'(X), \eta'(X) = B(X, \theta A), (X \in \mathfrak{g}(2))$ で定める. η の L_A における stabilizer を $K(A)$ とおくと、 $K(A) = K \cap L_A$, 即ち、 $K(A)$ は L_A の極大 compact 部分群になる. N_A の既約 unitary 表現 $(\xi, \mathcal{H}) = (\xi_A, \mathcal{H}_A)$ を、 $Z = K(A) \ltimes N_A$ (半直積) の表現 $\tilde{\xi}$ に、次の如く拡張する.

(Case I). $N_A = \exp \mathfrak{g}(2), \xi = \eta$. 従って、 ξ は $K(A)$ 上 trivial に Z の指標 $\tilde{\xi}$ に拡張される: $\tilde{\xi}(kn) = \xi(n), k \in K(A), n \in N_A$.

(Case II). $N_A = \exp(\mathfrak{g}(1) + \mathfrak{g}(2))$ は two-step 中零リ-群である. exponential 写像で N_A と $\mathfrak{n}(1)$ を同一視したとき、 N_A での積は、

$(U, V) \cdot (U', V') = (U + U', V + V' + \frac{1}{2}[U, U']), U, U' \in \mathfrak{g}(1), V, V' \in \mathfrak{g}(2)$
 で与えられる。この、 Z の表現への拡張を見易くする為に、次の様なもの実現 (c.f., [8, 2.C]) が有用である。今、ベクトル空間の同型 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{p}$, $\pi(X) = \frac{1}{2}(X - \theta X)$ を用いて、 \mathfrak{p} 上の複素構造 J を \mathfrak{g} 上に移したものを J' とする。この時、 $J' \mathfrak{g}(1) = \mathfrak{g}(1)$ 。この J' により、 $\mathfrak{g}(1)$ を複素ベクトル空間と見なす。次に、 $Q(U, U_1) = \frac{1}{4} \{ [J'U, U_1] + \sqrt{-1} [U, U_1] \}$, $U, U_1 \in \mathfrak{g}(1)$ とおくと、 Q は $\mathfrak{g}(1) \times \mathfrak{g}(1)$ から $\mathfrak{g}(2)_{\mathbb{C}}$ への sesquilinear map になる。さらに、 $\langle U, U_1 \rangle = -\eta'(Q(U, U_1))$ は、 $\mathfrak{g}(1)$ 上の $K(A)$ -不変な Hermite 内積を定める。但し、 η' は $\mathfrak{g}(2)_{\mathbb{C}}$ 上の \mathbb{C} -線型形式に拡張しておく。このとき、 ξ は次の様に実現できる: dU を $\mathfrak{g}(1)$ 上の Euclid 測度として、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \left\{ \psi; \mathfrak{g}(1) \text{ 上の整函数, } \|\psi\|^2 = \int_{\mathfrak{g}(1)} |\psi(U)|^2 e^{-2\langle U, U \rangle} dU < +\infty \right\}, \\
 (\xi(n)\psi)(U) &= \exp \{ 2\langle U, U_0 \rangle - \langle U_0, U_0 \rangle + \sqrt{-1} \eta'(V_0) \} \psi(-U_0 + U), \\
 U &\in \mathfrak{g}(1), n = (U_0, V_0) \in N_A, \psi \in \mathcal{H}.
 \end{aligned}$$

$K(A)$ は \mathcal{H} に、 $(\tilde{\xi}(k)\psi)(U) = \psi(\text{Ad}(k)^{-1}U)$, $k \in K(A)$, $\psi \in \mathcal{H}$ により unitary に作用する。 $\tilde{\xi}(kn) = \tilde{\xi}(k)\xi(n)$, $k \in K(A)$, $n \in N_A$ とおくことにより、 ξ は Z の unitary 表現 $\tilde{\xi}$ に拡張される。

(Case II, 終)

さて、 $K(A)$ の既約 unitary 表現 (c, E_c) を、 N_A 上 trivial に、 Z の表現 \tilde{c} に拡張しておく: $\tilde{c}(kn) = c(k)$, $kn \in K(A)N_A$.

定義. 次の様に定義される G の smooth な表現 $(\pi_{c,\xi}, C^\infty(G; c, \xi))$ を、 A に対応する reduced g. G. G. (r. g. G. G.) 表現と呼ぶ。

$$C^\infty(G; c, \xi) = \left\{ f: \begin{array}{l} \text{(i) } E_c \otimes \mathcal{H} \text{ に値をもつ } G \text{ 上の } C^\infty\text{-函数} \\ \text{(ii) } f(gz) = (\tilde{c} \otimes \tilde{\xi})(z^{-1}) f(g), (g \in G, z \in Z) \end{array} \right\},$$

$$(\pi_{c,\xi}(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \quad f \in C^\infty(G; c, \xi), \quad x, g \in G.$$

ただし、 $C^\infty(G; c, \xi)$ には、通常の Schwartz 位相を入れる。

§5. Multiplicity one theorem.

(Case I) の場合に、幾つかの r. g. G. G. 表現が multiplicity free になる事を示す。そのためにまず、5.1 および 5.2 で一般論を展開する (c.f., [1], [4, §6]).

5.1. リ-群 G 上の超函数 T , $g \in G$ および G の diffeomorphism σ に対し、超函数 $L_g T$, $R_g T$ および T^σ を、各々次で定義する: $\langle L_g T, \varphi \rangle = \langle T, L_{g^{-1}} \varphi \rangle$, $\langle R_g T, \varphi \rangle = \langle T, R_{g^{-1}} \varphi \rangle$, $\langle T^\sigma, \varphi \rangle = \langle T, \varphi^\sigma \rangle$, ($\varphi \in C_0^\infty(G)$). ここで、 $(L_{g^{-1}} \varphi)(x) = \varphi(gx)$, $(R_{g^{-1}} \varphi)(x) = \varphi(xg^{-1})$, $\varphi^\sigma(x) = \varphi(x^\sigma)$, ($x \in G$).

Z を G の閉部分群、 d, d' を Z の指標とする。超函数 $T \in C_0^\infty(G)'$ が条件 $L_x R_{x'} T = d(x) d'(x') T$, ($\forall x, x' \in Z$) を満たすとき、 T は (Z, d, d') -準不変であるという。

compact な台をもつ、 G 上の超函数全体を $C^\infty(G)'$ で表す。

$C^\infty(G)'$ は、convolution を積として、代数になる。 $x \in G$ は、

x におけるDirac測度 δ_x , $D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ は $D\delta_1$ と同一視して、 $G, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subseteq C^\infty(G)'$ と見なす。

(π, H) を、 G のHilbert空間 $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ 上への連続表現とする。 C^∞ -vector全体 $H^\infty (\subseteq H)$ 上への G の作用は、 $C^\infty(G)'$ に $C^\infty(G)' \times H^\infty \ni (T, v) \mapsto \pi_\infty(T)v \in H^\infty$, $(\pi_\infty(T)v, w)_H = \int (\pi(g)v, w)_H T(g), (w \in H)$ により拡張される。 H^∞ は、seminorm族 $\{\|\cdot\|_D; D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$, $\|v\|_D = \|\pi_\infty(D)v\|_H$ により、Fréchet空間になる。各 $\pi_\infty(T)$ は H^∞ 上の連続作用素を定め、従って、 $C^\infty(G)'$ は H^∞ の双対空間 $H^{*-\infty}$ に、 $\langle \pi_\infty^*(T)w^*, v \rangle = \langle w^*, \pi_\infty(T^j)v \rangle$, ($w^* \in H^{*-\infty}, v \in H^\infty, T \in C^\infty(G)'$)により作用する。但し、 $x^j = x^{-1}$, ($x \in G$)。 (π^*, H^*) を (π, H) の反傾表現としたとき、自然な埋め込み $H^\infty \hookrightarrow H^{-\infty} = (H^*)^{*-\infty}$, $H^{*-\infty} \hookrightarrow H^{*-\infty}$ は、ともに $C^\infty(G)'$ -加群としての埋め込みとなる事に注意しておく。

空間 $C^\infty(G; d) = \{f \in C^\infty(G); f(gz) = d(z)^{-1}f(g), g \in G, z \in Z\}$ 上に、左移動によって定まる G のsmoothな表現を π_d と書く。上と同様にして、 π_d は $C^\infty(G)'$ の表現に拡張される。また、 $(H^{*-\infty})^{d'} = \{w^* \in H^{*-\infty}; \pi_\infty^*(z)w^* = d'(z)w^*, \forall z \in Z\}$ とおくと、 $\text{Hom}_{C^\infty(G)'}(\pi_\infty, \pi_d) \simeq (H^{*-\infty})^{d'}$ (ベクトル空間の同型)が成立つ。

5.2. G を、中心有限、連結半単純リー群とし、記号は§1

に倣う。 H_K を、 H の K -finite vector 全体のなす $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ -加群、 $\gamma \in \hat{K}$ に対し、 H_K における γ -成分を H_{γ} で表す: $H_{\gamma} = \{v \in H_K; U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})v \text{ は } \gamma \text{ の multiple}\}$. 次の2条件を満す (π, H) を、 G の admissible 表現と呼ぶ: (i) $\pi|_K$ は K の unitary 表現、 (ii) $\dim H_{\gamma} < +\infty, \forall \gamma \in \hat{K}$. 2つの admissible 表現 (π_i, H_i) ($i=1, 2$) は、 $(H_1)_K$ と $(H_2)_K$ が $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ -加群として同値なとき、 infinitesimal に同値という。 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の中心を \mathfrak{z} で表す。

命題5. G の閉部分群 Z とその指標 d に対し、 次の条件 (a) と (b) を満す G の involution β の存在を仮定する。 (a) $Z^{\beta} = Z$, (b) 任意の (Z, d, d^{β}) -準不変な、 \mathfrak{z} の同時固有超函数 T は、 $T^{\beta} = T^{\bar{d}}$ を満す。 この時、 G の既約 admissible 表現 (π, H) に関して、 次の (i) ~ (iii) が成立つ。

(i) $\dim (H^{-\infty})^{d^{\beta}} \times \dim (H^{*-\infty})^d \leq 1$. 等号が成立するならば、 π^* と π^{β} ($\pi^{\beta}(x) = \pi(x^{\beta})$) は infinitesimal に同値。

(ii) π^* と π^{β} が同値ならば、 $\dim (H^{*-\infty})^d \leq 1$.

(iii) $d^{\beta} = \bar{d}$ の時、 任意の既約 unitary 表現 (π, H) に対して、 $\dim (H^{*-\infty})^d \leq 1$.

5.3. 我々が r.g.G.G. 表現を考察する場合に戻る。 $G_{\mathbb{C}}$ を、 G を含み $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ をリー環とする、 連結線型リー群とする。 この

subsectionでは、(Case I)のみ取扱う。まず、

補題6. (i) $Y = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2} \sum_{k=1}^l H'_{\gamma_k}$ は \mathfrak{a} の中心に属す。 (ii) $w_0 = \exp Y$ は、 W の最長元の $N_K(\mathfrak{a})$ における代表元である。
(iii) G の Cartan 対合は、 w_0 による内部自己同型で与えられる。

Cayley 変換 μ の、 $G_{\mathbb{C}}$ の内部自己同型への拡張を $\tilde{\mu}$ で表す。
 $G_{\mathbb{C}}$ の内部同型 β を、 $x^{\beta} = \tilde{\mu}^{-1}(w_0 \tilde{\mu}(x) w_0^{-1})$, ($x \in G_{\mathbb{C}}$) で定める。

補題7. β は、 $G^{\beta} = G$, $Z^{\beta} = Z$ なる $G_{\mathbb{C}}$ の involution である。
更に、 β の微分 β_* は、 $\beta_*|_{\mathfrak{g}(i)} = (-1)^{\frac{i}{2}} \text{Id}|_{\mathfrak{g}(i)}$ ($i=0, \pm 2$) を満す。

c を $K(A)$ の指標と仮定し、 $d = (\tilde{c} \otimes \tilde{\xi})^{\beta}$ とおく。このとき、

命題8. 任意の (Z, d, d^{β}) -準不変な、Casimir 作用素の固有超函数 T は、 $T^{\beta} = T^{\beta}$ を満す。

証明の概略. T の代りに、 $R_{w_0} T$ を考える。 $R_{w_0} T$ に対して、定理4の系を用いれば、命題の証明は、次の事実([1, Prop. 2.3])に帰着される: 任意の $(K(A), c, c)$ -準不変な L_A 上の超函数 S は、 $S^{\theta} = S^{\beta}$ を満す。

補題7と命題8により、 (β, d, Z) は、命題5の仮定(a), (b)を満す事が判明した。従って、次の定理が成立する。

定理9. G を連結、線型単純リ-群、 G/K は、tube domainに解析同型なHermitian対称空間と仮定する。 c を $K(A)$ の指標とする。このとき、 G の既約admissible表現 (π, H) に対し、次の(i)~(iii)が成立つ。

$$(i) \dim \operatorname{Hom}_G(\pi_\infty^*, \pi_{c, \xi}) \times \dim \operatorname{Hom}_G(\pi_\infty, \pi_{c, \xi}) \leq 1.$$

等号が成立つならば、 π^* と π^β は、infinitesimalに同値。

$$(ii) \pi^* \text{ と } \pi^\beta \text{ が同値ならば、 } \dim \operatorname{Hom}_G(\pi_\infty, \pi_{c, \xi}) \leq 1.$$

(iii) c が \mathbb{R} に値をもつ指標の時、任意の既約unitary表現 (π, H) に対して、 $\dim \operatorname{Hom}_G(\pi_\infty, \pi_{c, \xi}) \leq 1$ 。

§6. 主系列表現の $\pi_{c, \xi}$ における重複度.

(Case I)とは限らぬ一般の場合に、定理4の系を用いて、主系列表現の $\pi_{c, \xi}$ における重複度の評価が得られる。 $\sigma \in \hat{M}$, $\nu \in \alpha_c^*$ に対して、 $\bar{P} = MA_p \theta N$ の表現 $\sigma \otimes e^\nu \otimes (1_{\theta N})$ から、smoothに誘導された G の表現を $\pi_{\sigma, \nu}$ で表す。このとき、

$$\text{命題10. } \dim \operatorname{Hom}_G(\pi_{\sigma, \nu}, \pi_{c, \xi}) \leq \dim \operatorname{Hom}_M((\tilde{c} \otimes \tilde{\xi})|_M, \sigma).$$

注意. 整数 $q \geq 0$ に対し、 $\mathfrak{g}(1)$ 上の q 次同次正則多項式全体を \mathcal{P}_q で表す。 \mathcal{P}_q は $\tilde{\xi}(K(A))$ -不変で、 p. 11 で定義された $\tilde{\xi}$ の表現空間 \mathcal{H} は、 $\mathcal{H} = \sum_{q=0}^{\infty} \oplus \mathcal{P}_q$ (直交直和) と表される。 また、 (Case II) においては、 M に含まれる、 $K(A)$ の central, one parameter 部分群 C^+ で、 その $\mathfrak{g}(1)$ への作用が次の形で表されるものが存在する: $\text{Ad}(k_0)|_{\mathfrak{g}(1)} = a(k_0) \text{Id}|_{\mathfrak{g}(1)}$, $\forall k_0 \in C^+$, a は C^+ の non-trivial な unitary 指標。 この2つの事実より、 (c, σ) が与えられたとき、 高々1つの $q = q(c, \sigma)$ があって、 $\text{Hom}_M((\tilde{c} \otimes \tilde{\xi})|_M, \sigma) \simeq \text{Hom}_M(E_c \otimes \mathcal{P}_q, \sigma)$ となることが示される。 従って、 命題10 の不等式の右辺は有限である。

References

- [1] Y. Benoist, Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels, Mém. Soc. Math. France, 2e série, No. 15 (1984), 1-37.
- [2] M. Hashizume, Whittaker models for representations with highest weights, Lec. in Math., Kyoto Univ., No. 14 (1982), 51-73.
- [3] N. Kawanaka, Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality, Advanced studies in Pure Math., 6 (1985), 175-206.
- [4] B. Kostant, On Whittaker vectors and representation theory, Invent. Math., 48 (1978), 101-184.
- [5] C. C. Moore, Compactifications of symmetric spaces II: The Cartan domains, Amer. J. Math., 86 (1964), 358-378.

- [6] M. E. Novodvorskii - I. I. Piatetski Shapiro, Generalized Bessel models for a symplectic group of rank 2, Math. USSR Sb., Vol. 19 (1973), No. 2, 246-274.
- [7] M. E. Novodvorskii, On uniqueness theorems for generalized Bessel models, Math. USSR Sb., Vol. 19 (1973), No. 2, 275-287.
- [8] H. Rossi - M. Verge, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, J. Funct. Anal., 13 (1973), 324-389.
- [9] J. A. Shalika, The multiplicity one theorem for GL_n , Annals of Math., 100 (1974), 171-193.
- [10] H. Yamashita, On Whittaker vectors for generalized Gelfand-Graev representations of semisimple Lie groups, preprint (1984).