数理解析研究所講究録
第632巻 1987年 204-217

実半単純Lie群上のWhittaker超関数

東大 理 松本 久義
(Hisayosi Matumoto)

§1. 実半単純Lie群上のWhittaker hyperfunction

以下．Gをreal semisimple Lie group with finite centerで連結なものとする。さらにKをGのあるmaximal compact subgroup，$G=KAN$をIwasawa分解とする。

$\psi : N \to \mathbb{C}^\times$をLie group homomorphism（通常はgeneric, unitaryなどの条件をつけるが，ここでは任意とする）としたとき，

$$\mathcal{B}(G/N, \psi) = \{ f \in \mathcal{B}(G) \mid f(gn) = \psi(n) f(g) \quad n \in N,\ g \in G \}$$

とおき．$\mathcal{B}(G/N, \psi)$の元をG上のWhittaker function (hyperfunction) という。ただし．$\mathcal{B}(G)$はG上のhyperfunction全体とする。real semisimple Lie groupに対するWhittaker functionの概念は．Jacquetによって局所体上のChevalley群に対して初めて導入され．Schiffmann, Hashizume, Shahidi, Kostant, Goodman-Wallachらによって研究されてきた。

GのLie algebraを．$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}$の複素化のuniversal enveloping

algebraを $U(\mathfrak{g})$, その中心を $Z(\mathfrak{g})$ とおく。球関数とのanalogyから、$Z(\mathfrak{g})$ の微分作用素としてのactionに対して同時固有関数になるようなWhittaker超関数を、elementaryと言うことにする。以下簡単のため G: real split とする。
すると A のLie algebra $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のCartan subalgebraとなるから、$Z(\mathfrak{g})$ のcharacterは、Harish-Chandra homomorphism

$$\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$$

によってつくされる。
そこで $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して、

$$B(G/N, \psi ; \mathcal{M}_\lambda) = \left\{ f \in B(G/N, \psi) \;\middle|\; \begin{array}{c} Df = \chi_\lambda(D) f \\ D \in Z(\mathfrak{g}) \end{array} \right\}$$

とおく。左actionでG-moduleとなる。
以下本稿では、この空間の表現論的な性質を問題とする。

§2. $Sl(2,\mathbb{R})$ の場合.

この場合

$$K = SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A = \mathbb{R}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; t > 0 \right\}$$

$$N = \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; n \in \mathbb{R} \right\}$$

と表わせる。そこで、

$$f\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} g\right) = e^{im\theta} f(g)$$

なる $m \in \mathbb{Z}$ が存在するようなK-finiteなWhittaker functionを考えよう。$G = KAN$ だから f の A への制限を調べればよい。
ところで $Sl(2,\mathbb{R})$ の場合は、$Z(\mathfrak{g})$ はCasimir作用素によって

生成されるから．$A \cong \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ 上でのある常微分方程式を考えればよいことになる。結局パラメータや座標を適当にとり換えると．次のような古典的な Whittaker の微分方程式を得る。

$$z^2 \frac{d^2 W}{dz^2} + \left(-\frac{z^2}{4} + \kappa z - (\mu^2 - \frac{1}{4})\right) W = 0$$

この方程式は $z=0$ を確定特異点に．$z=\infty$ を不確定特異点に持っている。よく知られているように．generic（特性方程式の根の差 $\notin \mathbb{Z}$）の場合は．原点（確定特異点）のまわりでの1次独立な2つの巾級数解が得られ．それは．

$$M'_{\kappa,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu-\kappa+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\mu+n+1)\Gamma(\mu-\kappa+\frac{1}{2})} \frac{z^n}{n!}$$

とおいたとき．$M'_{\kappa,\mu}$ と $M'_{\kappa,-\mu}$ によって与えられる。

$2\mu \in \mathbb{Z}$ のときは．$M'_{\kappa,\mu}(z)$，$M'_{\kappa,-\mu}(z)$ は1次独立ではない。もう1つの解は．

$$W_{\kappa,\mu}(z) = \frac{e^{-z/2} z^{\kappa}}{\Gamma(\mu-\kappa+\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\mu-\kappa-(\frac{1}{2})} (1+\frac{t}{z})^{\mu+\kappa-\frac{1}{2}} dt$$

（$\mathrm{Re}(\mu-\kappa+\frac{1}{2})>0$ のときの表示．）

で与えられる。

すると一般の μ に対して．$M_{\kappa,\mu}$ と $W_{\kappa,\mu}$ は解の基本系をなす。

$z \to +\infty$ での振るまいを調べると．

$$W_{\kappa,\mu}(z) \sim e^{-\frac{z}{2}} z^{\kappa} \left[1 + \frac{\mu^2-(\kappa-\frac{1}{2})^2}{1!\,z} + \cdots \right]$$

となり $W_{k,\mu}(z)$ は急激に減少するが他の解は急激に増大する。

原点での振るまいは確定特異点だから generic な場合は、

$$M'_{k,\mu}(z) \sim z^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(2\mu+1)}$$

となる。

☆ $Sl(2,\mathbb{R})$ の場合は、このように具体的に計算できてしまい、K-finite vector についてはよくわかるのだが、一般の群ではこうはいかない。そこで A 上に関数を制限したりせず G/N 上の line bundle の section ($\fallingdotseq G/N$ の関数) と思い、直接その上で方程式系

$$\mathcal{M}_\chi : \quad Du = \chi_\lambda(D)u \qquad (D \in Z(\mathfrak{g}))$$

を扱うことにする。そのためには、Kashiwara - Oshima によって導入され、Oshima によって拡張された確定特異点型の方程式系とその境界値の概念を使うことができる。

§3. Whittaker function における確定特異点型境界値問題

まず $n = \dim A$ つまり G の real rank とする。$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を $\mathfrak{N}$ に対応する $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ の simple root、$H_1, \cdots H_n$ を $\mathfrak{a}$ の $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対する dual basis とする。

ここで、$\mathbb{E} = K \times \mathbb{R}^n$ とし、$x = (k, t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{E}$ と $g \in G$

に対して.

$$g\cdot x = (k(gk), e^{-\alpha_1(H(gk))}\cdot t_1, \dots, e^{-\alpha_n(H(gk))}\cdot t_n)$$

で定める。すると. これは C^ω な G-action となる。

一方 $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}^n$ に対して.

$$\mathbb{R}^n_\varepsilon = \{(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{sgn}(t_1, \cdots, t_n) = \varepsilon\}$$

$$O_\varepsilon = K \times \mathbb{R}^n_\varepsilon$$

とおくと.

$$\mathbb{E} = \bigcup_{\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}^n} O_\varepsilon$$

が $\mathbb{E}$ の orbital decomposition を与えることは. 直ちにわかる。

$$O_{(0)} = K \times \{(0, \cdots, 0)\} \simeq G/AN$$

が唯1つの closed orbit であり. open orbit は. $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$ に対応して 2^n 個あるが. $\varepsilon = (1, \cdots, 1)$ に対応する open orbit を.

$$\begin{array}{ccc} ka_t N & \longmapsto & (k, t) \\ \cap & & \cap \\ G/N & \longrightarrow & K \times \mathbb{R}^n = \mathbb{E} \end{array}$$

ただし $a_t = \exp(-\sum_{i=1}^n (\log t_i) H_i)$
$(t_1, \cdots t_n > 0)$

において G/N と同一視する。

G/N は Iwasawa 分解により KA と同一視される。

ここで $f \in \mathcal{B}(G/N, \psi, \mathcal{M}_\lambda)$ $(\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ を、KA上に制限した関数を $\bar{f}$ とおく。 fは

$$Df = \chi_\lambda(D) f \qquad (D \in Z(\mathfrak{g}))$$

という方程式系 $\mathcal{M}_\lambda$ の解だが、それに対応して、$K \times A$ 上の方程式系 $\widetilde{\mathcal{M}}_\lambda$ が得られ、$\bar{f}$ はその解となる。

<u>Lemma 1.</u> $\widetilde{\mathcal{M}}_\lambda$ は E 全体に実解析的係数をもつ微分方程式系として一意的に拡張される。

<u>Lemma 2.</u> $\widetilde{\mathcal{M}}_\lambda$ は $O(0,\cdots,0)$ において確定特異点型 $+\alpha$ となる。

ここで「確定特異点型 $+\alpha$」については詳しくは述べないが、一般に次のようなことが成り立つ。([3], [4], [5])

M : C^ω-manifold. $e \in M$

$M \times \mathbb{R}^n \ni (e, 0)$ のある開近傍 U 上で定義される方程式系 $\mathcal{N}$ が「確定特異点型 $+\alpha$」とする。

1° すると、characteristic exponent という $M \times \{0,\cdots,0\} \cap U$ 上の関数の組 $(s_{p,1}, \cdots, s_{p,n})$ が、$s_1, \cdots, s_r$ と有限個定まる。 $\overset{\shortparallel}{s_p}$

☆ ただし表現論への応用上は．$s_1, \cdots, s_r$ はみな実数である場合が重要であり．$\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$ の場合もそうなっている。

2° $\mathbb{R}^n_+ = \{(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1 > 0, \cdots, t_n > 0\}$
$(M \times \mathbb{R}^n_+) \cap \mho = \mho_+$
とおく。

$\mho_+$ における $\mathcal{N}$ の解 f は．"いいかげんにいうと"次のような形をしている。（ただし characteristic exponent は ~~整数差~~ にならないとする）

$x \in M$，$t \in \mathbb{R}^n$ に対して．$\mho_+$ 上で $t^{s_p} = t_1^{s_{p,1}} \cdots t_n^{s_{p,n}}$ とおくと．

(☆) $f(x,t) = \sum_{p=1}^{r} t^{s_p}(\varphi_{p,0}(x) + \varphi_{p,1}(x)t + \cdots\cdots)$

ここで．$1 \leq p \leq r$ に対して．$M \times \{(0,\cdots,0)\} \cap \mho$ 上の hyperfunction $\varphi_{p,0}(x)$ のことを．s_p に関する f の<u>境界値</u>という。

<u>Remark</u> （☆）のような表示は $\mathcal{N}$ の一般の解 f については．非合法であって本当は境界値は超局所的な議論によって定義される。しかし境界値が C^ω となるような解（例えば $\tilde{\mathfrak{M}}_\lambda$ の場合では K-finite function に対応する解など）は．ideally analytic solution といわれ．その場合表示（☆）は合法的である。

3° 境界値は、M 上のある line bundle の section として考えれば座標系のとり方によらない。

4° 境界値がすべて 0 なら、解も、境界 $(=(M\times\{0,\cdots 0\})\cap U)$ のある近傍で 0.

W を $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の Little Weyl group とする。

<u>Lemma 3</u>.

$\tilde{\mathcal{M}}_\lambda$ の characteristic exponents は.

$\{\rho - w\lambda \mid w\in W\}$.

$\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ に対して.

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}(G/AN;L_\lambda)\\ &=\left\{f\in\mathcal{B}(G)\ \middle|\ \begin{array}{l}f(gan)=e^{(\lambda-\rho)(\log a)}f(g)\\ g\in G,\ a\in A,\ n\in N\end{array}\right\}\end{aligned}$$

とおく。これは、有限群の右 action による分解をさらにとると、主系列の空間となる。Δ^+ を $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の正 root 系とする。すると.

<u>Lemma A</u>. $2\dfrac{\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\notin\mathbb{Z}$ for $\alpha\in\Delta^+$ のとき. (以下 λ: generic という)

G-equivariant な境界値写像 $\beta_{\lambda,w}$ $(w\in W)$

$$\beta_{w,\lambda}: \mathcal{B}(G/N,\psi:\mathcal{M}_\lambda)\longrightarrow\mathcal{B}(G/AN;L_{w\lambda})$$

が定義できる。また

$$\beta = \bigoplus_{w\in W} \beta_{\lambda,w} : B(G/N, \psi : M_\lambda) \longrightarrow \bigoplus_{w\in W} B(G/AN : L_{w\lambda})$$

は単射.

☆ λが一般の場合でも次のようなことは言える。

<u>Lemma B</u>　$|W| = r$，Wの元に対し適当に $w_1, \cdots, w_r$ と番号をつけると，$B(G/N, \psi : M_\lambda)$ の G-submodule $X_0, \cdots, X_r$ が，

$$B(G/N, \psi : M_\lambda) = X_r \supseteq X_{r-1} \supseteq \cdots \supseteq X_0 = \{0\}$$

かつ

X_i / X_{i-1} は $B(G/AN : L_{w_i\lambda})$ の G-submodule に同型．となるようにとれる。

§4. Whittaker function の構成

☆ 主系列関数から Whittaker function をつくることを考える。

①. Jacquetによる方法

ψ は unitary character とする。

$f \in B(G/AN ; L_\lambda)$ が C^∞-function であるとする。

w_0 : W の longest element とするとき.

$$\int_N f(gnw_0)\psi(n)^{-1}dn$$

という積分を考える。これは、

$$\int_N f(gnw_0)dn$$

という standard な intertwining operator が絶対収束するところでは収束し、他の λ については解析接続によって定める。このような Whittaker function は"無限遠"でよい増大度をもつものとして特徴づけられることを、Wallach が示している。つまり $Sl(2,\mathbb{R})$ における $W_{\kappa,\mu}$ の拡張といえる。

② Goodman-Wallach の方法

これは、$M'_{\kappa,\mu}$ に対応するものといえる。

$f\in B(G/AN, L_\lambda)$ が、右からの $U(\mathfrak{g})$-action に対して、Verma module の highest weight vector としての振るまいをすることに注目する。

たとえば $Sl(2,\mathbb{R})$ のとき、$\lambda\in\mathbb{C}$ に対して、

$$V_\lambda = U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})N + U(\mathfrak{g})(H-\lambda)$$

ただし、$N=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\bar{N}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

$$\psi\left(\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\right)=e^{un}$$

として、 $1\in U(\mathfrak{g})$ の V_λ への projection を 1_λ とおく。

$$P_{\lambda,u} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-u)^m}{m!\,\Gamma(m-\lambda)} \bar{N}^m \qquad (\star\star)$$

という形式和に対して.

$$N P_{\lambda,u} 1_\lambda = u P_{\lambda,u} 1_\lambda$$

となる。実は $P_{\lambda,u}$ は ∞ 階の微分作用素として意味をもち. $f \in B(G/AN; L_{\lambda+\rho})$ の元に右から act させると. Whittaker function を得る。

Goodman-Wallach は. 一般の quasi-split な G について. このような ∞ 階作用素をつくった。これを用いると.

$$\Omega_\lambda : B(G/AN; L_\lambda) \longrightarrow B(G/N, \psi; M_\lambda)$$

のような G-equivariant な map ができる。

実は.

Lemma 4. λ : generic のとき.

$$\beta_{\lambda,w}{}^{*} \circ \Omega_{w'\lambda} = \begin{cases} \text{Scalar} \neq 0 & w = w' \\ 0 & w \neq w' \end{cases}$$

この結果を使うと.

Theorem A. λ : generic のとき.

$$\beta : B(G/N, \psi; M_\lambda) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{w \in W} B(G/AN; L_{w\lambda})$$

Theorem B. W の元を $w_1, \cdots, w_r$ と適当に番号づけると.

$$A_K(G/N, \psi; m_\lambda) = \{B(G/N, \psi; m_\lambda) \text{ の } K\text{-finite elements}\}$$

の $(\mathfrak{g}, K)$-submodule $X_r, \cdots, X_0$ で、

$$A_K(G/N, \psi; m_\lambda) = X_r \supseteq X_{r-1} \supseteq \cdots \supseteq X_0 = \{0\}$$

となって $$X_i / X_{i-1} \simeq A_K(G/AN; L_{w_i\lambda}) = \{B(G/AN; L_{w_i\lambda}) \text{ の } K\text{-finite elements}\}$$

となるものが存在する。

<u>Remark 1.</u> <u>Theorem B.</u> の方は、Goodman-Wallach の結果を用いないで示すことができる。

<u>Remark 2.</u> <u>Theorem A.</u> は、G/K における Helgason 予想の類似といえるが、Helgason 予想の方程式系は、確定特異点型の楕円型境界値問題といえるのに対し、この場合は、~~参~~ 確定特異点型の双曲型初期値問題といえる。Goodman-Wallach の結果は丁度基本解を作ったことに対応している。

§5. 境界値写像.

実は境界値写像も、∞ 階の微分作用素によって書ける。これは初め、Kashiwara によって示唆され、Matumoto が

$sl(2,\mathbb{R})$のときに、real-splitのときはOshimaによって得られた結果である。$sl(2,\mathbb{R})$のときは、したがって

$$\mathcal{U}^{\omega}(\mathfrak{g}) = \{G上の左不変\infty階微分作用素\} \supset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

とおくと、$\Omega \in Z(\mathfrak{g})$をCasimir作用素として、

$$W_{u,\lambda} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) / \mathcal{U}(\mathfrak{g})(\Omega - \chi_{\lambda+1}(\Omega)) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})(N-u) \quad (★)$$

とすると $\lambda \notin \mathbb{Z}$ に対して

$$\mathcal{U}^{\omega}(\mathfrak{g}) \underset{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}{\otimes} W_{u,\lambda} \cong \left(\mathcal{U}^{\omega}(\mathfrak{g}) \underset{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}{\otimes} V_{\lambda}\right) \oplus \left(\mathcal{U}^{\omega}(\mathfrak{g}) \underset{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}{\otimes} V_{-\lambda-2}\right)$$

一般のλについても、$\lambda \geqq -1$として

$$(W_{u,\lambda} = W_{u,-\lambda-2})$$

$$0 \to \mathcal{U}^{\omega}(\mathfrak{g}) \underset{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}{\otimes} V_{\lambda} \to \mathcal{U}^{\omega}(\mathfrak{g}) \underset{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}{\otimes} W_{u,\lambda} \to \mathcal{U}^{\omega}(\mathfrak{g}) \underset{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}{\otimes} V_{-\lambda-2} \to 0$$

(exact)

となる。一般のreal splitの場合も、(★)に対応するKostantのWhittaker moduleの$\mathcal{U}^{\omega}(\mathfrak{g})$による係数拡大は、Verma moduleの直和の係数拡大となることが言える。

References

[1] R. Goodman and N.R. Wallach : Whittaker vectors and conical vectors, J. Funct. Anal 39 (1980) 199-279

[2] M. Kashiwara et. al : Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, Ann of Math 107 (1978) 1-39

[3] M. Kashiwara, T. Oshima, Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, Ann. of. Math. 106 (1977) 145-200.

[4] T. Oshima, A definition of boundary value of solutions of partial differential equations with regular singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 19 (1983), 1203-1230

[5] T. Oshima, Boundary value problems for systems of linear partial differential equations with regular singularities, Advanced Studies in Pure Math.

[6] H. Matumoto : Boundary value problems for Whittaker functions on real split semisimple Lie groups preprint. (1984)