数理解析研究所講究録
第632巻 1987年 218-224


# 主系列表現の行列要素に対する CONSTANT TERMについて

津田塾大学　　三鳥川寿一
(Hisaichi Midorikawa)

§1.

Gを非コンパクト,連結実半単純Lie群とし、その中心が有限とする。 Gの放物型部分群Pは次の様な分解を持つ。AをPのsplit torusとすれば $P=Z(A)N$。ここでNはPのunipotent radical, $Z(A)$はAのGに於ける中心化群である。更に$Z(A)$は或るreductive部分群Mにより、$Z(A)=MA$, $M\cap A=\{1\}$と分解される。さて $\mathfrak{m}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$を各々M, A, NのLie代数としよう。Pの元pに対し$Ad(p)$の$\mathfrak{n}$への制限を$Ad(p)|\mathfrak{n}$と書くことにする。そこでP上の函数$d_P$は次の如く定義される:

$$d_P(p)=\left|\det Ad(p)|\mathfrak{n}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

この稿での主題は、主系列表現のK-有限な行列要素fに対するN上の積分 $f^{(P)}(ma)\equiv\int_N (d_P f)(man)dn$ を具体的に書き表わすことにある。Harish-Chandraの意味のSchwarz空間の元fに対しては上記の積分が存在すること

については知られているが（Schwarz spaceの定義については P.156, [5] 参照、積分の存在については Proposition 8.3. 7.5, [5] 参照）、主系列表現に属する K－有限な行列要素は Schwarz 空間に含まれない。そこで上記積分 $f^{(P)}$ の或る種の正当化を試み、$f^{(P)}$ についての具体的表示を求めることにする。

§2.

この節の始めに、まず、Gの主系列ユニタリ表現の説明しておく。P＝MANを Gのcuspidalな放物型部分群とする。この時、Mは二乗可積分なGの既約ユニタリ表現を持つが、この様な表現をdiscrete series に属する表現と呼ぶことにする。ωをMの discrete series に属する表現とし、λをAのユニタリ指標とする。そこで Pの表現 $\omega\otimes\lambda$ を次の如く構成する；

$$(\omega\otimes\lambda)(man) = (\lambda\cdot d_p)(a)\,\omega(m),$$
$$m\in M,\ a\in A,\ n\in N.$$

$\omega\otimes\lambda$ から誘導されたGの表現を $\pi = \mathrm{Ind}_P^G\ \omega\otimes\lambda$ と書く。πはユニタリ表現であるが、これは主系列ユニタリ表現と呼ばれている。次に主系列表現のK－有限な行列要素fに対する積分の正当化を試みる。$G = KA_0N_0$ をGの岩沢分解，θを対(G,K)に対する Cartan involution とする。以下、我々はGの極大放物型部分群 P＝MAN として $A\subset A_0$, $N\subset N_0$

なる条件を満すもののみを考える。そこで $G$ は $G=KMAN$ と分解される。$N$ の元 $n$ に対して $\bar{n}=\theta(n)$ と置く。$\bar{n}$ に対しては次の様な $\mathfrak{a}$ の元 $H(\bar{n})$ が一意的に定まる; $\bar{n}\in KM\exp H(\bar{n})N$.
$\mathfrak{g}$ を $G$ の Lie 代数 $\mathfrak{g}_c$ をその複素化とし、$\mathfrak{g}_c$ の展開環を $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ と書くことにする。$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の元は自然に $G$ 上の $C^\infty$-函数全体からなる環 $C^\infty(G)$ に左から作用する。$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の元 $b$ の $C^\infty(G)$ 上の作用を、我々は $bf$, $f(b;x)$ $(x\in G,\ f\in C^\infty(G))$ 等と書くことにする。$\pi$ を主系列ユニタリ表現（或る $G$ の放物型部分群から誘導された）とし、$\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の中心とする。$\pi$ の指標 $\Theta_\pi$ の具体的表示（例えば [2] 参照）が解っているので、或る $\mathfrak{z}$ の character $\chi_\pi$ に対し $z\Theta_\pi=\chi_\pi(z)\Theta_\pi$ となる事が証明出来る。従って $\pi(z)=\chi_\pi(z)1$, $z\in\mathfrak{z}$ を得る。ここで $1$ は $\pi$ の表現空間の恒等変換とする。$\chi_\pi$ は $\pi$ の無限小指標、と呼ばれている。$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環, $\mathfrak{t}_c$ をその複素化、$W(\mathfrak{t}_c)$ を対 $(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ の Weyl 群とする。Harich-Chandra 同型写像 $\mu$ によって $\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{t}_c$ の双対空間上の $W$-不変な多項式全体のなす環 $I(\mathfrak{t}_c)$ と同一視される。そこで上の $\chi_\pi$ に対し或る $\mathfrak{t}_c$ 上の線型形式 $\lambda$ が存在して $\mu(z)(\lambda)=\chi_\pi(z)$ がすべての $z\in\mathfrak{z}$ に対して成立する。そこで $\chi_\pi$ が正則指標であるとは、$\lambda$ が $\mathfrak{t}_c$ 上正則であることを言う。

積分 $f^{(P)}$ の正当化は次の定理によりなされる。

［定理1］ $\pi$を$G$の主系列ユニタリ表現でその無限小指標$\chi_\pi$が正則であると仮定する。この時$\pi$のK-有限な行列要素$f$に対し極限 $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_N (d_P f)(man) e^{-\varepsilon \rho(H(\bar{n}))} dn$ は存在する。但し$\rho$は$\mathfrak{a}$上の線型形式で$d_P(a) = e^{\rho(\log a)}$ $(a \in A)$により定められたものとする。

$f$を上記定理と同一なものとし、我々は今$f^{(P)}$を

$$f^{(P)}(ma) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_N (d_P f)(man) e^{-\varepsilon \rho(H(\bar{n}))} dn$$

によって定義する。

§3.

この節では$f^{(P)}$を具体的に表わす。$P=MAN$を$G$の極大放物型部分群とすれば$\dim A = 1$。従って$\rho(H_0)=1$を満す$\mathfrak{a}$の元$H_0$を取ることにより，$A$は$a_t = \exp tH_0$，$t \in \mathbb{R}$によってparametrizeできる。$f$をK-有限な$G$の主系列ユニタリ表現の行列要素とすればHarish-Chandraの結果により次の事が解る；$MA$上の函数$f_P$が存在して

$$\lim_{t \to +\infty} \{ (d_P f)(m \exp tH_0) - f_P(m \exp tH_0) \} = 0$$

が任意の$m \in MA$に対して成立する［P.235, Theorem 1, [3]］。我々の主目的はこの函数$f_P$により、$f^{(P)}$が書き表わされる

という事である。その為に以下の準備を行なう。

$\mathfrak{n}$と$\theta(\mathfrak{n})$によって生成された$\mathfrak{g}$の部分環を$\mathfrak{g}^*$としよう。この時$\mathfrak{g}^*$はsplit rankが1の半単純部分環である(Lemma 1、2、3、16，[4]参照)。$\mathfrak{g}^*$に対する$G$の解析的部分群を$G^*$、$G^*$の岩沢分解を$G^*=K^*A^*N^*$とする。$G^*$の定め方から、$A=A^*$, $N=N^*$, $K^*=K\cap G^*$として良い。$N_K(A)$, $Z_K(A)$を各々$A$の$K$に於けるnormalizer, centralizerとする。対$(P, A)$のWeyl群$W$は$W=N_K(A)/Z_K(A)$により与えられ、$\dim A=1$の仮定から$W$の 数は2である。そこで$W$の非自明な元を$\bar{w}$と表わし$\bar{w}$の代表を$w$と表わすことにする。

さて$f$及び$f_P$を上述のものとし、$f$が$K$-有限であることに注意すれば$f_P$を$MAK$上の函数に拡張することにより

$$\lim_{t\to+\infty}\{d_P(m\exp tH_0)f(m\exp tH_0k)-f_P(m\exp tH_0k)\}=0$$

$$,\ m\in MA,\ k\in K$$

とすることが出来る。そこで$MA$上の函数$C(\pi)f_P$を次の如く定義する；

$$[C(\pi)f_P](ma)=\int_N e^{-\rho(H(\bar{n}))}f_P(mawk(\bar{n})^{-1}w^{-1})\,dn$$

$$m\in M,\ a\in A。$$

ここで$k(\bar{n})$は$K^*$の元で$\bar{n}\in k(\bar{n})AN$という条件によっ

で定まったものとする。Harish-chandraによるC－函数の理論によりこの積分の存在は解っている（Lemma 5.3, Lemma 10.1, [1]参照）。そこで次の定理を得る。

[定理2] $\pi$をGの主系列ユニタリ表現でその無限小指標が正則なものとする。又$f$をK－有限な$\pi$の行列要素とする。この時

$$\int_N (d_p f)(man)\,dn = [C(\pi)f_p](ma)$$

がすべての$m\in M$, $a\in A$について成立する。

注意1、上記定理の積分は、§2で$f^{(P)}$と書いたものを意味する。

注意2、$\pi$の無限小指標が正則でなくても、$C(\pi)f_p$が定義出来る表現$\pi$に対しても定理2と同様な命題が成立する。

References


1 Harish-Chandra; Harmonic analysis on real reductive groups III, Ann. Math., 1976 pp. 117-201.

2 T. Hirai; The characters of some induced representations of semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto univ.,vol 8 1968 pp. 313-363.

3 V. S. Varadarajan; Harmonic analysis on real reductive groups, Springer Verlag Lecture Notes in Math. vol 576 1977

4 G. Warner; Harmonic analysis on semisimple Lie groups I, Springer Verlag 1972

5 Harmonic analysis on semisimple Lie groups II, Springer Verlag 1972