数理解析研究所講究録
第633巻 1987年 57-63



# Hyperbolic imitations of 3-manifolds with finite group actions

大阪市大理 河内明夫 (Akio Kawauchi)

3次元コンパクト有向連結多様体を $M$ で表わす. $\partial M$ 内の各球面成分を3-球体で埋めて, $M$ からできたものを $\hat{M}$ と表わす. $L$ によって空集合かまたは $M$ 内の有限グラフとする. 各 $d \geq 0$ に対して, $L$ の次数 $d$ の頂点からなる集合を $V_d(L)$ と表わす. $V_0(L)=\phi$, $L \cap \partial M \subset V_1(L)$ と仮定しておく. この報告では, [Ka,1], [Ka,2] において得られた3次元多様体に関する imitation の結果の, 有限群作用を持つ場合への拡張について論ずる.

ある有限群 $G$ が $M$ に (なめらかにかつ faithful にかつ向きを保存して) 作用しているとし, また $L$ は $G$-不変であるとする. $I=[-1,1]$ とおく. $(x,t) \in M \times I$ に対し, $g(x,t)=(gx,t)$, $g \in G$, とおくことにより, $G$ を $(M,L) \times I$ 上の変換群とみなす. $\alpha(x,1)=(x,-1)$, $x \in M$, かつ $Fix(\alpha, M \times I)$ が3次元多様体となるような $(M,L) \times I$ 上のなめらか $G$-involution $\alpha$ を $(M,L) \times I$ の <u>G-reflection</u> という. また, $(Fix(\alpha, M \times I), Fix(\alpha, L \times I))$ を

($\alpha$ による) $(M,L)\times I$ の <u>$G$-reflector</u> という. 明らかに, $G$ は $(\mathrm{Fix}(\alpha, M\times I), \mathrm{Fix}(\alpha, L\times I))$ に作用している. あるなめらかな $G$-imbedding $\phi:(M^*, L^*)\to(M,L)\times I$ に対して, $\phi(M^*, L^*)$ が (ある $\alpha$ による) $(M,L)\times I$ の $G$-reflector となるならば, その $\phi$ を <u>$G$-reflector imbedding</u> と呼ぶことにする.

$\boxed{\text{定義}}$ ある $G$-reflector imbedding $\phi:(M^*, L^*)\to(M,L)\times I$ と射影 $r:(M,L)\times I\to(M,L)$ の合成 $g=r\phi:(M^*, L^*)\to(M,L)$ を <u>$G$-imitation</u> という. 2つの $G$-reflector imbeddings $\phi, \phi':(M^*, L^*)\to(M,L)\times I$ が $G$-isotopic ならば, $G$-imitations $g=r\phi$, $g'=r\phi':(M^*, L^*)\to(M,L)$ は <u>$G$-合同</u> であるという.

任意の $G$-imitation $g:(M^*, L^*)\to(M,L)$ は $G$-写像であり, しかも $G$-imitation $(M^*, L^*\cup\mathrm{Fix}(G,M^*))\to(M, L\cup\mathrm{Fix}(G,M))$ を定義している. さらに, $g'|L^*: L^*\cong L$, $g'|\partial M^*: \partial M^*\cong\partial M$, かつ $g'|\mathrm{Fix}(G,M^*): \mathrm{Fix}(G,M^*)\cong\mathrm{Fix}(G,M)$ となるような $G$-imitation $g':(M^*, L^*)\to(M,L)$ に $G$-合同になる. このような $G$-imitation $g'$ は <u>normal</u> であるという.

$L=L^*=\phi$ の場合の結果を述べると次のようになる:

$\boxed{\text{定理 I}}$ 任意の $K>0$ と $M$ に対し, normal $G$-imitation $g: M^* \longrightarrow M$ で次を満たすものが存在する:

(1) $\hat{M}^*$ は (non-torus 境界成分が totally geodesic であるような有限体積の) 双曲多様体,

(2) $\mathrm{Vol}(\hat{M}^*) > K$,

(3) $\mathrm{Isom}(\hat{M}^*) \cong G$.

(注意) $M^*$ の $G$-作用は $\hat{M}^*$ の $G$-作用に拡張できるから, (1) を満たすだけで, 単射準同型 $G \to \mathrm{Isom}(\hat{M}^*)$ が存在することは Mostow Rigidity からわかる. もし Thurston の orbifold uniformization theorem [T] (その証明は現在未発表) を仮定するならば, 上の (1), (2), (3) に加えて次の (4) をもつような normal $G$-imitation $g: M^* \to M$ が存在する:

(4) 有限群 $G^*$ が $\hat{M}^*$ に作用するならば, $G^*$ は $\mathrm{Diff}\,\hat{M}^*$ において $\mathrm{Isom}(\hat{M}^*)$ の部分群に共役である.

$\boxed{\text{系}}$ $G$ を位数 $m$ の群で, 位数 $m_1, m_2, \cdots, m_r$ の元 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ で生成されていると仮定する. 任意の $K>0$ に対し, 自由 $G$-作用をもつ 3 次元有向連結閉 多様体 $M^*$ で, 次をみたすものが存在する:

(1) $M^*$ は双曲多様体,

(2) $H_1(M^*;\mathbb{Z})$ は rank $1+n(r-1)-\sum_{i=1}^{r}(n/n_i)$ の自由アーベル群 で $\mathrm{Vol}(M^*)>K$,

(3) $\mathrm{Isom}(M^*)\cong G$.

条件(2)を除けば, これは Kojima [Ko] によって得られた事実である. $G=\{1\}$ である $G$-imitation は単に imitation と呼ばれる(cf. [Ka,1], [Ka,2]).

$\boxed{系}$ 任意の $K>0$ と 3次元コンパクト有向連結多様体 $M$ に対し, $M^*$ は双曲多様体で $\mathrm{Vol}(M^*)>K$ かつ $M^*$ は有限群作用を持たないような *imitation* $g: M^*\to M$ が存在する.

この結果は [K/K/S] の主結果の *hyperbolic version* である.

$\boxed{定義}$ $M$ 内の $G$-不変グラフ $L$ に対し, $V_0(L)=\phi$, $V_1(L)=L\cap\partial M$ かつ, $\partial M$ 内の任意の球面 $S$ に対し $|V_1(L)\cap S|\geq 2$, かつ $L-\mathrm{Fix}(G,M)\neq\phi$ となるならば, $L$ は $M$ で good であるという.

$Cl_L(L-\mathrm{Fix}(G,M))$ 内の $|G|$ 成分の open arcs からなる $G$-不変な family を <u>$G$-open arc family</u> という.

いま, $M^*=M$ となる $G$-imitation $q:(M,L^*)\to(M,L)$ を考えよう.

$\boxed{定義}$ $L\subset M$ が good であるような normal $G$-imitation $q:(M,L^*)\to(M,L)$ を考える. もし $q|\partial M = id_{\partial M}$ ならば, $q$ は <u>$\partial$-identical である</u>という. もし $q$ が $\partial$-identical で, しかも open $G$-arc families $a^*\subset L^*-\mathrm{Fix}(G,M)$, $a\subset L-\mathrm{Fix}(G,M)$ に対して, $L^*-a^*$ と $L-a$ が $M$ で $\partial M$ を固定して $G$-ambient isotopic ならば, $q$ は <u>almost identical $G$-imitation</u> であるという.

次が主結果である:

$\boxed{定理 II}$ 任意の $K>0$ と good $G$-graph $L\subset M$ に対して, $G$-exterior $E(L^*,M)$ が hyperbolic で $\mathrm{Vol}\,E(L^*,M)>K$ となるような almost identical $G$-imitation $q:(M,L^*)\to(M,L)$ が存在する.

imitation の一般的性質を考えてみれば, この定理は [Ka1], [Ka2] の主定理の自然な一般化であることがわかるだろう. $E(0^*,S^3)$ が hyperbolic で $\mathrm{Isom}\,E(0^*,S^3)=\{1\}$ と

なるような imitation $q:(S^3,O^*)\to(S^3,O)$ ($O$ は trivial knot を表わす)が存在することに注意すると，定理IIから次の結果が出る:

**[定理II*]** 任意の $K>0$ と good $G$-graph $L\subset M$ に対して，$E(L^{**},M)$ が hyperbolic で，$\mathrm{Vol}\,E(L^{**},M)>K$ かつ $\mathrm{Isom}(E(L^{**},M))\cong G$ となるような $\partial$-identical normal $G$-imitation $q:(M,L^{**})\to(M,L)$ が存在する.

定理I は 定理II* からそう遠くない.

# 参考文献


[Ka, 1] 河内, Hyperbolic imitations of 3-manifolds, 城崎シンポジウム「モジュライ空間と3·4次元多様体」報告集(1987年2月), 32-50.

[Ka, 2] A. Kawauchi, Hyperbolic imitations of 3-manifolds, preprint.

[K/K/S] A. Kawauchi / T. Kobayashi / M. Sakuma, On 3-manifolds with no periodic maps, Japan. J. Math. 10 (1984), 185-193.

[Ko] S. Kojima, Isometry transformations of hyperbolic 3-manifolds, preprint.

[T] W. Thurston, Three-manifolds with symmetry, preprint.