数理解析研究所講究録
第 635 巻 1987 年 1-15

C^*環論と位相力学系

東京都立大理　富山　淳 (Jun Tomiyama)

1. はじめに。力学系 $\Sigma=(X,G)$ が与えられると、それから変換群 C^*環と呼ばれる C^*環 A_Σ がつくれる。ここで一般には X は局所コンパクト空間で G は局所コンパクト群である。従って Σ は flow であっても、又離散力学系であってもよい。そして"原理的には" Σ を考えることと C^*環 A_Σ を考えることとは等価と考えられる。C^*環論においては変換群 C^*環は重要な位置を占めており理論に豊富な材料を与えている。その代表的なものは単位円周上の無理数角 θ の回転 σ_θ よりつくられた無理数回転 C^*環 A_θ であろう。A_θ は単位元をもつ可分な単純 C^*環であるが豊富な projection をもち、AF環（有限次 C^*環の増大列からつくられる C^*環）の中に埋めこめる等々豊かな構造が見出されている。

さて A_Σ を C^*環として研究すること自体はその方向として

はΣの力学系としての研究と勿論異なるわけであるが，A_Σを力学系の研究の代数的アプローチととらえることも出来る。しかしこのような立場をとったとき本来原理的に等価な構造をもつ筈のA_θの構造の豊かさは元の力学系$\Sigma_\theta=(T, \sigma_\theta)$にとって何を意味しているのであろうか？ C*環$A_\Sigma$の構造についての研究は非常に多い。しかし上の様な立場からの結果は次の2つだけである。1つは$\Sigma=(X, \sigma)$（Xはコンパクト空間）の場合，Σの極小性とA_Σの単純性が同値という結果で他の1つは最近のA_ΣがAF環に埋めこめるための力学系としての条件を与えたPimsnerの結果（[3]）である。そしてこの2つともA_θのそれぞれの特性の力学系としての背景を示しているが，他の特性の（力学系としての）解析にはとても及んではいない。

本稿はこのようなΣとA_Σとの相互連関の立場からの研究の一端を示すものである。

2. C*クロス積－位相変換群C*環. これより以後はコンパクト空間X上に離散群Gが位相同型群として作用している力学系$\Sigma=(X, G, \sigma_s)$を考える。C*環A_Σは技術的には次のようにして作られる。先ずσ_sにより$C(X)$にひき起された*-同型をα_sとかく，即ち$\alpha_s(f)(t)=f(\sigma_s^{-1}t)$。これによる$G$の$C(X)$への作用$\alpha$が与えられる。このとき$\{C(X), G, \alpha\}$は一般にC*-力

力学系と呼ばれている。$k(G, C(X))$をG上の有限個のGの元以外は0となるような、$C(X)$に値をとる関数$x(s)$の集合とする。このとき$k(G, C(X))$は作用αの"ひねり"を入れた次のような演算により単位元をもつ$*$-ノルム環になる。即ち $x, y \in k(G, C(X))$について

$$xy(t) = \sum_s x(s)\alpha_s(y(s^{-1}t))$$

$$x^*(s) = \alpha_s(x(s^{-1})^*), \quad \|x\|_1 = \sum_s \|x(s)\| .$$

このようなノルム環のヒルベルト空間上の有界線形作用素環$B(H)$の中への表現は(準同型πで$\pi(a^*) = \pi(a)^*$となるもの)常に$\|\pi(a)\| \leqq \|a\|$をみたすことが知られている。そこで$k(G, C(X))$に新しいノルム

$$\|x\|_\infty = \sup \|\pi(x)\| \quad (\pi\text{は}*\text{-表現のすべてを動く})$$

を定義する。$\|x\|_\infty$は定義からC^*環のノルムの特性$\|x^*x\| = \|x\|^2$をもつが、その完備化されたC^*環がA_Σであり、C^*環論ではC^*クロス積として通常$C(X) \rtimes_\alpha G$と記される。ここで$C(X)$の元fについてGの単位元e上でf，他では0という関数をfと同一視すれば、$C(X)$は$k(G, C(X))$の自己共役部分環、従ってA_Σの自己共役部分環としてisometricに埋めこめる。実際A_Σの単位元は$C(X)$のそれのA_Σへの埋めこみである。更に$s \in G$についてsで1，他では0という関数δ_sを考えると、δ_sはA_Σのunitary元でかつ次の共変式をみたす。

$$\delta_s f \delta_s^* = \alpha_s(f) \qquad s \in G$$

一般に$C(X)$の$B(H)$への表現πとGのunitary表現uがあって

$$u_s \pi(f) u_s^* = \pi(\alpha_s(f))$$

となっているとき、これを$\{C(X), G, \alpha\}$の共変表現という。A_Σは上のノルムの定義とδ_sの性質から

(a) $\{C(X), G, \alpha\}$の共変表現についてuniversal特性をもつ。

ことがわかる。ここで$x \in k(G, C(X))$は$x(s) = f_s$とおけば$x = \sum_s f_s \delta_s$（有限和）とかける。この意味で上の積はこの展開による自然な積になっている。即ち

$$xy = \Big(\sum_s x(s)\delta_s\Big)\Big(\sum_t y(t)\delta_t\Big) = \sum_{s,t} x(s)\delta_s y(t)\delta_t$$
$$= \sum x(s)\alpha_s(y(t))\delta_{st} = \sum_t \Big(\sum_s x(s)\alpha_s(y(s^{-1}t))\Big)\delta_t$$

したがって次が成り立つ。

(b) $\{\sum_s f_s\delta_s \mid f_s \in C(X)\}$は$A_\Sigma$の稠密な自己共役部分環である。又$\{\delta_s \mid s \in G\}$は$C(X)$上1次独立である。

(c) A_Σより$C(X)$へのノルム1の射影Eが存在し、

$$E(x) = x(e) \qquad x \in k(G, C(X)).$$

この写像Eは正値写像（$x \geq 0$のとき$E(x) \geq 0$）であるが忠実（$x \geq 0$で$E(x) = 0$のとき$x = 0$）には一般にならず、このことがA_Σと$C(X)$との関係を稀薄にしA_Σの解析を困難にしている。そこで更に縮約変換群C^*環$A_{\Sigma r} = C(X) \times_{\alpha r} G$（縮約$C^*$-クロス積）が考えられている。$A_{\Sigma r}$は(b)の性質と(c)の代りに(共変表現

$\{\pi, \lambda\}$ において $f \in C(X)$ と $\pi(f)$ とを同一視して)次の(c′)の性質をもっている。

(c′) A_{Σ_r} より $C(X)$ へ $\varepsilon(\sum_s f_s \lambda_s) = f_e$ となるような忠実なノルム1の射影が存在する。

A_{Σ_r} の定義の詳細は略するがその解析には上の条件と更に $a \in A_{\Sigma_r}$ について $a(s) = \varepsilon(a\lambda_s^*)$ とおくと $C(X)$ の元の族 $\{a(s)\}$ が次のように a を完全にきめるという点に留意すればよい。

1° $a(s) = 0 \quad \forall s \in G \implies a = 0$

2° $a^*(s) = \alpha_s(a(s^{-1}))^*$,

$$ab(s) = \sum_t a(t)\alpha_t(b(t^{-1}s))$$

(一般に右辺の和は無限和になりその収束はノルム位相ではない他の局所凸位相だが和自体は右辺の定義から部分 C^* 環 $C(X)$ に属する)

A_Σ は X が1点の時には群 C^* 環 $C^*(G)$ に、又 A_{Σ_r} は縮約群 C^* 環 $C_r^*(G)$ になる。(a)の性質から A_Σ から A_{Σ_r} へは自然 $*$ 準同型があるがこれが同型になるのは群 C^* 環のときと同様に

定理1. G が amenable のとき、上の対応は同型になる。

したがって amenable 群(たとえば可換群)については $A_\Sigma = A_{\Sigma_r}$ について(a)と(c′)の両方の特性が使えることになる。上の $\{a(s) \mid s \in G\}$ は a のフーリエ係数と呼ぶ。実際 $G = Z$ で X が

一点のときには，Σはamenableだから

$$A_\Sigma = A_{\Sigma_r} = C^*(Z) = C_r^*(Z) = C(T) \quad (Tはトーラス)$$

となり，εは正規化されたルベーグ測度での積分になるので上の $\{a(s)\}$ は関数 a のフーリエ係数になっている。これから非可換のフーリエ展開の意味で a と $\{a(s)\}$ との対応を $a = \sum_s a(s)\lambda_s$ とかくことも多い。

変換群 C^* 環（一般には C^* クロス積）の構成は元々は $L^1(G, C(X))$ の関数が主体なので力学系が離散系でなく連続系のときには $C(X)$ を A_Σ の部分環と考えることも，またユニタリー元 δ_s を A_Σ の元と考えることも出来ない。それらは A_Σ をもっと拡大した C^* 環の中で実現されるので，A_Σ の構造の議論はいささか局面が変ることを注意しておく。

本稿のような立場で問題を考えるときには通常の力学系で課される可算性の条件は必ずしも容認出来ないことがあることも強調せねばならない。C^* 環的には可算性は $C(X)$ の可分性（それと G の可算性）の問題になる。しかし C^* 環の中でも特に可換な von Neumann 環は有限次元以外には可分にならず，その上 shift 作用素の問題（[1]）のようにそれらを $C(X)$ と同一視した時の，コンパクト空間 X 上の力学系が対象になることがあるからである。

A_Σ の構成について最後に次のような観点をのべておく。位

相空間Xを代数的にとり扱えばその上の連続関数環$C(X)$を考えることであると言える。Xに更に群Gの作用σがあるとき$\{X, G, \sigma\}$を考えることはGの$C(X)$への作用$\{C(X), G, \alpha\}$を考えることと同値である。そこで$\{C(X), G, \alpha\}$が忠実な共変表現$\{\pi, u\}$をもつとすると、$\{C(X), G, \alpha\}$を考えることは$\{\pi(C(X)), u(G)\}$, ひいてはそれらの生成したC^*環を考えることと同等であると言える。このC^*環はGの作用が自明でない限り必然的に非可換になるがいくつかの生成C^*環から(a), (b), (c)という一番望まれる生成の性質をもつものを選んだのがA_Σであると言える。(条件ではfと$\pi(f)$は同一視している)。

3. Gの軌道とA_Σの既約表現. C^*環としてのA_Σはその表現の構造が大きな問題になるが、それとGの軌道の性質との関係を考えてみる。表現を構成する具体的な方法としては、C^*環A上の正値汎関数φによるGNS-表現(Gelfand-Neumark-Segal)がある。

$$N_\varphi = \{x \in A \mid \varphi(x^* x) = 0\}$$ とおく。

N_φはφの正値性から導びかれるSchwartzの不等式によってAの左イデアルになる。そこでηを商写像: $A \to A/N_\varphi$としてA/N_φの内積を

$$(\eta_\varphi(x) \mid \eta_\varphi(y)) = \varphi(y^* x)$$

で入れこれを完備化したヒルベルト空間を H_φ とする。$a\in A$ について A/N_φ 上の有界線形作用素 $\pi_\varphi(a)$ を $\pi_\varphi(a)\eta_\varphi(x)=\eta_\varphi(ax)$ と定義しこれを H_φ 上に拡大したものを又 $\pi_\varphi(a)$ とかくことにすると、π_φ は A の H_φ 上への表現を与え、φ は H_φ の vector ξ_φ によって $\varphi(a)=(\pi_\varphi(a)\xi_\varphi\mid\xi_\varphi)$ とかける。$1\in A$ のときには $\xi_\varphi=\eta_\varphi(1)$ である。$\{H_\varphi,\pi_\varphi,\xi_\varphi\}$ の3つ組を φ の GNS 表現と呼ぶ。ここで $[\pi_\varphi(A)\xi_\varphi]=H_\varphi$ である。

単位元をもつ A_Σ のような C^* 環上では正値汎関数が $\|\varphi\|=1$ となることと $\varphi(1)=1$ とは同値になるのでこのような正値汎関数(以下 state と呼ぶ)の全体 $S(A_\Sigma)$ は共役空間の弱 $*$ コンパクトな凸集合をつくっている。したがって端点を充分沢山持つがこれらを pure state という。φ が pure state なことと GNS 表現 $\{H_\varphi,\pi_\varphi,\xi_\varphi\}$ が既約なこととは同値である。

さて $x\in X$ の G 軌道を $O(x)$ とかく。また

$$X_n=\{x\in X\mid |O(x)|=n\},\quad X^n=\{x\in X\mid |O(x)|\leqq n\},$$

G_x を x の isotropy 群とする。A_Σ 上の state の中では X の点 x の評価から得られる $C(X)$ 上の pure state φ_x (i.e. $\varphi_x(f)=f(x)$) を A_Σ まで拡大したものが力学系の情報を自然にになっていると考えられる。そこでその GNS 表現の構造から次のような G_x の表現からの A_Σ の誘導(共変)表現 $\rho_{x,u}$ を定義する。u を G_x の H_u 上へのユニタリ表現, $R=\{\gamma_\alpha\}$ (ただし $\gamma_0=$

$\mathcal{R}$ を左 coset 空間 G/G_x の代表元の集合，そして

$$H = \ell^2(G/G_x)\otimes H_u = \sum_\alpha e_\alpha \otimes H_u \quad (\text{ヒルベルト和}).$$

とおく。ここで $\{e_\alpha\}$ は $\ell^2(G/G_x)$ 上の直交基である。そこで $C(X)$ の表現と G のユニタリ表現を

$$\pi_x^{\mathcal{R}}(f)(e_\alpha\otimes\xi) = f(\gamma_\alpha x)\, e_\alpha\otimes\xi \quad (\sigma_{\gamma_\alpha}x \text{ を } \gamma_\alpha x \text{ とかく}).$$

$$L_u^{\mathcal{R}}(s)(e_\alpha\otimes\xi) = e_\beta\otimes u_t\xi \quad (s\gamma_\alpha = \gamma_\beta t \quad t\in G_x)$$

と定義すると $\{\pi_x^{\mathcal{R}}, L_u^{\mathcal{R}}\}$ は共変表現となり A_Σ の表現を定義する。ここでユニタリ同値性の意味でこの表現は $\mathcal{R}$ のとり方（もち論 $\{e_\alpha\}$ のとり方）に関係しないのでこれを以下 $\rho_{x,u} = \pi_x\times L_u$ とかく。

命題2 (a) ϕ を φ_x の A_Σ への state 拡大とすると ϕ の GNS 表現は上の形をしている。

(b) $\rho_{x,u}$ が既約となるのは u が既約のとき，そのときのみ。

ここで H_ϕ の中で $e_0\otimes H_u$ に対応する部分空間は

$$\{\xi\in H_\phi \mid \pi_\phi(f)\xi = f(x)\xi,\ \forall f\in C(X)\}$$

である。

定理3. $\rho_{x,u}$ と $\rho_{y,v}$ がユニタリ同値になるための条件は $O(x)=O(y)$ でかつ $y=\gamma_0 x$ とおいたとき，G_x の2つの表現

$t \to u_t$ と $t \to v_{\gamma_0 t \gamma_0^{-1}}$ がユニタリ同値になることである。

このことから具体的な力学系について φ_x と φ_y の state 拡大のGNS表現がいつ同値になるかが判定出来る。例えば無理数回転 σ_θ においては isotropy 群はすべて自明であるから条件は $O(x)=O(y)$ のみになる。

上の表現は A_Σ の表現としては非常にわかり易い形をしているが一般にはたとえ既約表現でも上のような形をしているとは限らない。例えば $L^2(T)$ 上に $C(T)$ の表現として掛算作用素 $\pi(f)g=fg$ をとり、ユニタリを $(u_\theta f)(x)=f(x-\theta)$ と定義した $\{C(T),\mathbb{Z},\alpha_\theta\}$ の共変既約表現(即ち A_θ の既約表現)はこの形にはなっていない。C^*理論としては A_Σ についてもっと一般の誘導表現が定義され、A_Σ の既約表現が常にその形になるための条件などが議論されているが、それには軌道空間 X/G が常識的測度論的にかなり良い空間になっていなければならない。X/G はたしかに原理的には A_Σ の表現の構造をになっている筈なのであるが explicit な対応をとると、σ_θ の場合でもこの意味では非常に"悪い"空間になっているので(Connes の非可換積分論を用いる方法もあるが)この辺の解析は今の所そう進んではいない。

点 x が有限軌道をもつとき $\rho_{x,u}$ を有限型の表現と呼ぶ。上

にのべたことを考慮すれば下の結果がそう自明なものでないことも伺えよう。

定理4. X の点がすべて有限軌道をもてば A_Σ の既約表現はすべて有限型である。逆も成り立つ。

ここで有限型既約表現は G_x の表現の割合があるので、一般には有限次元にはならないが、例えば G が可換のときには G_x の既約表現は1次元になるので有限型と有限次元とは同じになる。そしてこのときには u は G_x の character にほかならない。
ここで X 全体に条件をつけなくても A_Σ の有限次元既約表現は $\rho_{x,u}$ の形になることは言えるので、G が可換なときには、次元を固定すれば A_Σ の n 次元既約表現の空間は積空間 $X_n/G \times \hat{G}_x$ として実現出来る。しかし異った次元を合せるとその継目の位相のずれが問題になり、G の作用に何か好条件を仮定しなければ表現空間の global な実現結果は期待出来ない。
C^*環の種類としてはすべての既約表現が有限次元になるのが有限次元 C^*環の次に簡単な構造をもつと考えられている。即ち A_Σ については G が可換なときには力学系が上の定理のようになっている時である。しかし力学系としてはどうであろうか？

§4. A_Σ のイデヤルの構造とGの作用　この節全体でGのXへの作用はeffectiveとする。即ち $s \neq e$ のとき s は X 上の位相同型として恒等写像ではないとする。Σの作用の時と同様にX上のG軌道が全部稠密であるとき Σ が極小ということにする。またXの任意の空でない開集合U, Vをとったとき

$$\exists s \in G \,!\, sU \cap V \neq \phi$$

となるときを regionally transitive, X に稠密な軌道が存在するときを Σ を位相推移的と呼ぶことにする。C^*環論では上のregionally transitiveが位相推移的と呼ばれることが多い。Xを距離空間とすれば、Gが可算なときには両者の区別がないことはよく知られているが、我々の立場ではむしろこの違いが大事な問題になる。

さて上の様相に対してA_ΣのC^*環としての基本様相は単純か、primeかprimitiveかということになる。ここでprimeとはA_Σの閉イデヤル I, J がもし $I \cap J = \{0\}$ ならIまたはJが0イデヤルということで、A_Σが忠実なファクター表現（表現の生成するノイマン環の中心が自明）をもつこととほぼ同値である。

A_Σが忠実な既約表現をもつときをprimitiveという。対応してA_ΣのイデヤルIは商C^*環A/Iがprime, primitiveのときそれぞれprime, primitiveと呼ぶ。1節でのべたように単純性については、$\Sigma = (X, \sigma)$ のときにはΣの極小性と同値で

あった。しかし極小性はGがどんな群であっても(前述のように)定義出来るので、この結果がどこまで成り立つのかが先ず問題になる。ここでもしA_Σのイデアル構造が

$$I \cap C(X) \neq \{0\} \rightleftarrows I \neq \{0\} \quad \cdots\cdots (A)$$

という形で$C(X)$のそれに帰着するならば、問題は$C(X)$のG不変なイデアルの構造したがってXのG不変な閉集合の構造の話となり、力学系の状況から色々なことが割り出せる。そこで上の状況をみたすような力学系の条件を考えてみる。

$$X_s = \{x \in X \mid sx = x\} \quad (s \in G,\ \sigma_s \text{の代りに} s \text{とかく}).$$

とおく。次の条件を考える。

$$\forall s \neq e : X_s \text{の内点は存在しない} \quad \cdots\cdots (B)$$

定理5. (B) $\Rightarrow$ (A) である. 逆は例えばGが可換群のとき成り立つ。ただしGはamenableとする.

系. Gを可換群とする. このとき

(1) $\Sigma = (X, G)$ が極小であることと, A_Σが単純なことは同値である.

(2) Σ が regionally transitive なことと A_Σ が prime なことは同値である。

両方の証明ともにこのときには集合 X_s が G の作用で不変なことが本質的になっている。そのために例えば Σ が極小のときには $X_s = \phi$ $(s \neq e)$ となり、(A) の条件から A_Σ が単純なことがわかる。

一般に $C(X)$ の、G の作用で不変なイデヤルから A_Σ のイデアルを生成することは常に出来るから、A_Σ の代数的条件から力学系の条件を導びくことはそう困難ではない。しかし普通は(A)の条件は期待できないので A_Σ のイデアルの状況を記述するのは難かしい問題になる。そして(A)に対応する力学系の条件が当然問題とされるが、それが少くとも可換群のときには、(B)の条件になるわけである。さて上の(i)は $G=\mathbb{Z}$ の場合の拡張になっているが、C^*環の枠組では可換群 G に対しては一般の C^*環についてのクロス積 $B \rtimes_\alpha G = B \rtimes_{\alpha r} G$ が単純又は prime になるための力学系 (B, G, α) の条件が知られている。しかしそれらは Connes spectrum を用いた C^*環の言葉で与えられている。C^*環論としては、G が局所コンパクトな可換群の時にはクロス積の研究が良くされているが、非可換群の作用については殆んど理論として手がついていないのが現状である。しかし amenable な非可換群の作用などは通常の力学系でもよく見られるので定理5がそのまま成立するのか又は(B)の代りにもっと"正しい"力学系の条件があるのかは興味ある問題である。

問 amenable群Gの作用が極小のとき(B)は成立するか?

§4. その他. 紙数の都合もあって本稿では測度の役割に全然ふれていないが,例えば不変測度の存在は A_Σ の問題としては trace ($\tau(xy)=\tau(yx)$ となるような state) の存在に直接つながり,その一意性などが議論されている. 例えば A_θ の場合は $C(T)$ 上のルベッグ測度とノルム1のprojection E とをつないだ $\tau=\mu_0\cdot E$ が唯1つのtraceになっている. 又エルゴード測度の存在やその台の構造も $C(X)$ と A_Σ の双方から眺めた形で問題とされ,可算性の下では大事な部分になるが,その仮定なしの一般的議論においては位相的な問題程に測度論的問題は重大な役割を果さないように思える.

文　献

1. 河村‐武元: C^*-algebras associated with shift dynamical systems, J. Math. Soc. Japan 36 (1984), 279-293

2. 河村‐武元‐富山: State extensions in transformation group C^*-algebras, to appear in Acta Sci. Math.

3. M.V. Pimsner; Embedding some transformation group C^*-algebras into AF-algebras, Ergodic theory and Dynam. Sys., 3 (1983), 613-626

4. 富山: Invitation to C^*-algebras and topological dynam. Sys. 1987.