数理解析研究所講究録
第635巻 1987年 16-29

離散群のS^1への作用について

日大理工　松元重則 (Shigenori Matsumoto)

§1. 序文

本稿の目的は　離散群Γの　S^1上への連続的作用を調べることである。　$G=\mathrm{Homeo}^+(S^1)$で，S^1の、向きを保つ同相写像全体の為す群を表わすこととする。　このとき上記の作用は、準同型　$\phi:\Gamma\to G$　と考えられる。　従って我々の目標は，準同型　$\phi:\Gamma\to G$　の定性論的研究であると言い直すことができる。

$\Gamma=\mathbb{Z}$の特別な場合には，準同型ϕは，さらに，同相写像　$f=\phi(1)$　により、定まるわけだから、　ϕの研究とは、とりも直さず　単一の元　$f\in G$の　研究にすぎない。
この場合には、すでにPoincaréにより、満足のいく結果が、得られている。

いま、$\tilde{G}$で，Gの普遍被覆群を表わす。$\tilde{G}$は、具体的には，$\mathbb{R}$の同相写像fで，$f\circ T=T\circ f$　をみたすものの為す

群である。被覆準同型 $\pi: \overline{G} \to G$ は、被覆写像 $\mathbb{R} \to S^1$ に付随して定まる。このとき

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

なる中心拡大が得られたわけである。$\mathbb{Z}$ の生成元は T である。ここに、$T(x) = x + 1$ とする。

G の元 f に対し、それを被覆する $\overline{G}$ の元をひとつ定め、$\overline{f}$ とおこう。このとき、$x \in \mathbb{R}$ に対し、極限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \overline{f}^n(x)$$

は定まり、しかも x に依存しない。この数を $\overline{f}$ の<u>移動数</u>と呼び、$\mathrm{trans}(\overline{f})$ で表わす。G の元 f に対しては、$\overline{f}$ のとり方により、$\mathrm{trans}(\overline{f})$ は異なる。しかし、その違いは、整数の差のみである。そこで

$$\mathrm{rot}(f) = \mathrm{trans}(\overline{f}) \bmod 1 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

とおけば、これにより、f の<u>回転数</u> $\mathrm{rot}(f)$ が定まる。

このとき、本質的に Poincaré による次の定理が成り立つ。

<u>定理</u> (Poincaré) $f_1, f_2 \in G$ に対し

f_1 と f_2 が半共役 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rot}(f_1) = \mathrm{rot}(f_2)$

半共役という概念は通常、連続写像による共役の意味で

用いられ、これは同値関係ではない。しかし、その生成する同値関係を考えることはできる。ここでは、この意味とする。しかし実は、S^1の場合は、後に、定義するように、DOM写像なる概念を用いての容易な特徴づけがある。

本稿の主目的のひとつは、Poincaréの定理の、一般の離散群Γの表現への拡張であるところのGhysの定理の解説であり、これは§2にて行われる。しかしながら、これに際し、回転数に変わるものは、(通常、無限次元の)Banach空間に値をとり、計算困難である。しかし、ここから数値的不変量をひきだすことができる。これを、§3にて解説する。§4で、様々の応用を紹介する。

§2. 有界オイラー類と半共役

(定義1) 写像$h: S^1 \to S^1$がDOM (degree one monotone)とは、hの持ち上げ$\tilde{h}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$で、単調増加(広義)かつ$T$と可換なものがとれることとする。($h$は連続でなくとも良い。)

(定義2) $\phi_i: \Gamma \to G$においてϕ_1とϕ_2が半共役とは、DOM hが存在して$\phi_1(\gamma)h = h\phi_2(\gamma)$, $^\forall\gamma \in \Gamma$を満すこととする。

以下準同型 $\phi : \Gamma \longrightarrow G$ は、しばしば Γ-作用 $\Gamma \times S^1 \to S^1$ と、みなされる。ϕの固定点、周期点、極小集合等は、このように、作用とみなしたときの意味に用いられる。以下の諸注意はすべて簡単に証明できることばかりである。

(注1) 半共役は同値関係である。

(注2) ϕ_1, ϕ_2 ともにすべての軌道が S^1 上稠密とする。このとき、ϕ_1 と ϕ_2 は半共役ならば、位相共役である。

(注3) ϕ_1 と ϕ_2 が、同じ周期の周期軌道を持ち、しかも ϕ_1 の周期軌道から ϕ_2 の周期軌道へ、順序を保つ同変全単射が存在するならば、ϕ_1 と ϕ_2 は半共役である。

次に、$\Gamma = \mathbb{Z}$ のときの回転数が、どう拡張されるかを、述べなくてはならない。それは有界Euler類という姿をとるわけであるが、その値をとる場所は、Γの有界コホモロジー群である。まず、これから解説しよう。係数Aは$\mathbb{R}$または$\mathbb{Z}$とする。Γの普通のコホモロジーは、余鎖複体 $\{C^n, \delta^n\}$ からつくられる。ここに

$$C^n = C^n(\Gamma ; A) = \{u : \Gamma^n \to A,\ 写像\}$$

$\delta^n : C^n \longrightarrow C^{n+1}$ は、

$$(\delta^n u)(\gamma_1, \cdots, \gamma_{n+1}) = u(\gamma_2, \cdots, \gamma_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i u(\gamma_1, \cdots, \gamma_i\gamma_{i+1}, \cdots, \gamma_n) + (-1)^{n+1} u(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$$

にて定義される。さて，C^nの部分加群

$$C_b^n = \{u : \Gamma^n \to A \mid \mathrm{Im}(u) \text{ は有界}\}$$

を考えると、部分複体 $\{C_b^n, \delta^n\}$ を得る。このコホモロジーとして<u>有界コホモロジー</u> $H_b^n(\Gamma; A)$ が、定義される。

有界コホモロジーは，普通のコホモロジーとかなり趣きを異にしている。以下に、いくつかの結果を挙げておく。

（例1） $H_b^1(\Gamma; A) = 0$ が，すべての群Γについて成り立つ。

（例2） Γが，アメナブル群ならば，$H_b^n(\Gamma; \mathbb{R}) = 0$

（例3） Σを，双曲的曲面とすれば，$H_b^2(\pi_1(\Sigma), \mathbb{R})$ は，無限次元Banach空間*)。（[B-S], [Mit]）

（例4） $H_b^2(G; A) = A$，　$H_b^2(PSL_2\mathbb{R}; A) = A$　([M-M])

有界コホモロジーについての、包括的取扱いについては[Gr]を参考されたい。面白いのは，例3のように自由群に近いような群については，通常のコホモロジーに較べ，爆発的に大きくなるが，例4のような代数的に、精密な群については，逆に小さくなるということである。（$PSL_2(\mathbb{R})$の通常のコホモロジーは、Sah-Wagonerにより計算されているが，これは大変大きい。）

---

*) 実は $H_b^n(\Gamma; \mathbb{R})$ には pseudo-norm が定義される。

さて，係数の完全系列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to 0$ は，有界コホモロジーの完全系列を生むが，これと(例1)，(例2)を合せると次を得る。

(例5) $H_b^2(\mathbb{Z};\mathbb{Z}) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

有界コホモロジーの話は，これくらいにして，次に有界オイラー類に移ろう。被覆準同型 $\pi : \overline{G} \to G$ の切断として $\sigma : G \to \overline{G}$ を考える。(もちろん準同型ではない。) σが<u>有界</u>とは $\sigma(f)(0)$ が有界のこととする。有界切断σに対し，$c_\sigma(f, g) = \sigma(fg)^{-1}\sigma(f)\sigma(g) \in \mathbb{Z}$ にて定義するとき，次が直ちにわかる。

(1) c_σ は有界2-コ

(2) $[c_\sigma] \in H_b^2(G;\mathbb{Z})$ は，σによらない。

$\chi_{\mathbb{Z}} = [c_\sigma]$ のことを <u>$\mathbb{Z}$-係数有界Euler類</u> という。c_σはまた $H_b^2(G;\mathbb{R})$の元を定めるが，これを$\chi_{\mathbb{R}}$と書き，<u>$\mathbb{R}$-係数有界Euler類</u>という。また c_σ は $H^2(G;\mathbb{Z})$ の元 e をも定める。これは<u>普通のEuler類</u>である。
位相幾何的には，$\phi : \Gamma \to G$ なる準同型により Eilenberg-Maclane 空間 $K(\Gamma, 1)$ 上に S^1束が定まるが，その Euler 類は $\phi^*(e)$で与えられる。

定理 (Ghys [Gh]) $\phi_i : \Gamma \to G$ に対し

ϕ_1とϕ_2が半共役 $\Longleftrightarrow$ $\phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}}) = \phi_2^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ in $H^2_b(\Gamma;\mathbb{Z})$

(注) $\phi : \mathbb{Z} \to G$ に対し、同一視 $H^2_b(\mathbb{Z};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ のもと、$\phi^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ は、$\mathrm{rot}(\phi)$ に一致する。

従って $\phi_i^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ こそ、回転数の拡張である訳だが、その値域 $H^2_b(\Gamma;\mathbb{Z})$ は前にもみたように一般に巨大であり、計算は普通、容易でない。そこでこれを少しでも取り扱いやすくしようとする試みを、次の章で述べる。

§3. 数量的不変量

$\{\gamma_i\} \subset \Gamma$ を、その類が、$\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ を生成するものとし、対応する準同型 $\bigoplus_i \mathbb{Z} \to \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ を、若干の混同により $\oplus\lambda_i$ で表わす。一方、完全系列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ により、有界コホモロジーの完全系列が得られるが、これらは、次の可換図式をなす。

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Gamma/[\Gamma,\Gamma];\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "(\oplus\lambda_i)^*"'] & H^1(\Gamma;\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta_*"] \arrow[d, "\oplus\lambda_i^*"] & H^2_b(\Gamma;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\oplus\lambda_i^*"] & H^2_b(\Gamma;\mathbb{R}) \\
\mathrm{Hom}(\bigoplus_i \mathbb{Z};\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\approx"] & \bigoplus_i H^1(\mathbb{Z};\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & \bigoplus_i H^2_b(\mathbb{Z};\mathbb{Z}) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & \\
 & & \bigoplus_i \mathbb{R}/\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}
$$

さて、ここで、一番左の下向き矢は単射である。このことから、

$H^2_b(\Gamma;\mathbb{Z}) \ni \alpha$ に対し、$\alpha = 0 \Longleftrightarrow \lambda_i^*(\alpha) = \iota(\alpha) = 0$.

がわかる。 これを $\phi_i : \Gamma \to G$ に対する $\phi_i^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ の一致の問題に適用して、次を得る。

$$\phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}}) = \phi_2^*(\chi_{\mathbb{Z}}) \iff \begin{cases} \lambda_i^* \phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}}) = \lambda_i^* \phi_2^*(\chi_{\mathbb{Z}}) \\ \iota \phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}}) = \iota \phi_2^*(\chi_{\mathbb{Z}}) \end{cases}$$

さて、ここで、同一視 $H_b^2(\mathbb{Z};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ のもと、$\lambda_i^* \phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ は $\mathrm{rot}\,\phi(\gamma_i)$ に一致する。(λ_i は対応する生成元) また $\iota\phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ は $\phi_1^*(\chi_{\mathbb{R}})$ に他ならない。以上より次を得る。

<u>定理1</u> $\gamma_i \in \Gamma$ を、$[\Gamma,\Gamma]$ を法とする生成元とする。
$\phi_1, \phi_2 : \Gamma \to G$ に対して、ϕ_1 と ϕ_2 が共役となるのは、
$\mathrm{rot}\,\phi_1(\gamma_i) = \mathrm{rot}\,\phi_2(\gamma_i)$ $(\forall i)$ かつ $\phi_1^*(\chi_{\mathbb{R}}) = \phi_2^*(\chi_{\mathbb{R}})$ in $H_b^2(\Gamma;\mathbb{R})$
が成り立つときである。

<u>系2</u> Γ が完全ならば、ϕ_1 と ϕ_2 が共役 $\iff \phi_1^*(\chi_{\mathbb{R}}) = \phi_2^*(\chi_{\mathbb{R}})$

<u>系3</u> Γ が amenable ならば、ϕ_1 と ϕ_2 が共役 $\iff \mathrm{rot}\,\phi_1(\gamma_i) = \mathrm{rot}\,\phi_2(\gamma_i)$

続けて、$\phi^*(\chi_{\mathbb{R}})$ を調べよう。今 $f, g \in G$ に対し、その持ち上げ $\bar{f}, \bar{g} \in \bar{G}$ をとるとき、

$$\tau(f,g) = \mathrm{trans}(\bar{f}) + \mathrm{trans}(\bar{g}) - \mathrm{trans}(\bar{f}\bar{g})$$

は、持ちあげによらず定まる実数である。

τは、実は有界2-コサイクルになり、$\chi_{\mathbb{R}}$を代表することがわかるが、更に

<u>定理4</u>　$\phi_1, \phi_2 : \Gamma \to G$ に対し、$\phi_1^* \chi_{\mathbb{R}} = \phi_2^* \chi_{\mathbb{R}}$
$\iff \phi_1^{\#} \tau = \phi_2^{\#} \tau$.

つまり、コホモロジー類の一致が、それを代表する、とあるコサイクルの一致により測れるという訳であるが、もちろん普通のコホモロジー理論では見られない現象であり、有界コホモロジーに特有のことである。τを<u>標準オイラー・コサイクル</u>と呼ぶ。さて、定理1と定理4を併せると、

<u>定理5</u>　ふたつの準同型 $\Gamma \to G$ が<u>半共役</u>

$\iff$ $\begin{cases} 1)\ [\Gamma,\Gamma] \text{を法とする生成元と回転数が一致} \\ 2)\ \Gamma \text{の任意の2元に対し} \tau \text{の値が一致} \end{cases}$

さて、次に、定理5の分解において $\tau \equiv 0$ となるような表現を考えよう。このような表現は、力学系として簡単な構造を持つと推察されるが、その特徴づけが、次の定理6である。

<u>定理6</u>　Γを有限生成群，$\phi:\Gamma\to G$を準同型とするとき，次は，同値である。

(1) $\tau(\phi(\gamma),\phi(\gamma'))=0$　$\forall\gamma,\gamma'\in\Gamma$

(2) ϕは，平行移動だけの部分群への準同型と半共役

(3) ϕの作用は極小集合上局所ホロノミーがない。

(4) ϕの作用は，不変測度をもつ。

<u>定理7</u>　定理6と同じ仮定の下で次は同値である。

(1) $\phi^*(\chi_{\mathbb{Z}})$は位数有限

(2) ϕの作用は，有限軌道をもつ。

§4．応用

前に述べたように，[M-M]にて，$H_b^2(G;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$，$H_b^2(PSL_2\mathbb{R},\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$が，示されている。この事実は，$\phi^*(\chi_{\mathbb{Z}})$の受け皿の小ささを表わし，§2のGhysの定理と照し合せ，ϕの少なさを示唆している。実際，

<u>定理8</u>　$PSL_2\mathbb{R}$からGへの準同型写像は，零かまたは，S^1上の（向きを保つとは限らない）同相写像による共役である。

<u>定理9</u>　GからGへの準同型は、零か、または、S^1上の同相写像による共役である。

ここに、「準同型」とは単なる代数的準同型であり、Lie群としてのものではない。　なお定理9は、同型写像に限れば、Whitakerの定理の特別な場合にすぎないが、同型でなければ零であるという部分は著者の知る限り新しい。

次の応用例に移ろう。ここでは、Σを、種数2以上の有向閉曲面とし　Γをその基本群とする。　$e \in H^2(G;\mathbb{Z})$を、§2で述べた普通のEuler類とする。　$\phi: \Gamma \to G$に対し

$$eu(\phi) = \langle \phi^* e, [\Sigma] \rangle$$

のことを、ϕのEuler数という。　（我々は$H^*(\Gamma;\mathbb{Z})$と$H^*(\Sigma, \mathbb{Z})$を同一視している。）　$eu(\phi)$は、また、$\phi: \Gamma \to G$に付随した（葉層）S^1束のいわゆるEuler数と一致している。　このとき、つねに、

$$(*) \qquad |eu(\phi)| \leq -\chi(\Sigma)$$

が成立することが、よく知られている。（Milnor-Woodの不等式）　それでは、$(*)$において等号成立のとき、ϕはいかなる制約を受けるであろうか。　これについての解答が次の定理10である。

<u>定理10</u>　$\phi_1, \phi_2 : \Gamma \to G$ にて $eu(\phi_1) = eu(\phi_2) = \pm\chi(\Sigma)$ とすれば，ϕ_1 と ϕ_2 は半共役である。

<u>定理11</u>　定理　にて，G を S^1 の有向 C^2 微分同相のつくる群 $\mathrm{Diff}^2_+(S^1)$ におきかえれば，結論において，ϕ_1 と ϕ_2 は位相共役となる。

(注) $|eu(\phi_i)| < \chi(\Sigma)$ のときには，このような結論は全く期待できない。§2で述べたように $H^2_b(\Gamma; \mathbb{Z})$ は無限生成であることと符号して，極めて沢山の準同型の存在が示される。また定理11は，この場合には ϕ_i の各軌道が S^1 上稠密であるという Ghys の定理 ([Gh']) を利用し，§2 (注2) により示される。

<u>系12</u>　$\phi : \Gamma \to G$ にて $eu(\phi) = \pm\chi(\Sigma)$ ならば，ϕ は，G への忠実離散表現である。

<u>系13</u>　Σ 上の単位接束 $T_1(\Sigma)$ の中の，C^2 級で横断的に有向な，余次元1葉層構造は，コンパクト葉をもたなければ同相写像を除いて一意的に定まる。

系13は，そのような葉層構造は，各ファイバーに横断的で

あるように、イソトープできるというThurstonの定理と、定理11を、結びつけることにより得られる。而来、コンパクト葉を持たない葉層構造を許さない3-多様体の例は多数知られている。(Novikov, Plante) 他方、そのようなものを数多く許す多様体も沢山ある。系13によれば、$T_1(\Sigma)$は、丁度一つしか許さないということであり、このような多様体の存在は、大変面白いと思われる。

REFERENCES

[B-S] Brooks,R.-Series,C., Bounded cohomology of surface groups, Topology 23 (1984) 29-36

[Gh] Ghys,E., Groupes d'homeomorphismes du cercle et cohomologie bornée, Preprint, Lille

[Gh'] Ghys,E., Classe d'Euler et minimal exceptionnele, Topology 26 (1987) 93-106

[Gr] Gromov, M., Volume and bounded cohomology, Publ. I.H.E.S., 56(1982) 5-100

[Ma] Matsumoto,S., Numerical invariants for semi-conjugacy of homeomorphisms of the circle, Proc. A.M.S. 98(1986)163-168

[Ma'] Matsumoto,S., Some remarks of foliated S^1bundles, to appear in Inv.Math.

[M-M] Matsumot,S.,-Morita,S., Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms of the circle, Proc.A.M.S., 94(1985) 539-544

[Mit] Mitsumatu, Y.,Bounded cohomology and ℓ^1-cohomology of surfaces, Topology 23(1984) 465-471

[S-W] C.-H., Sah and J.B.Wagoner, Second homology of Lie groups made discete, Comm.Algebra 5(1977) 611-642

[T] Thurston,W., Foliations of 3-manifolds which are fiber bundles, Theses Berkley

[W] Whittaker,J.V., On isomorphic groups and homeomorphic spaces. Ann.Math. 78(1963) 74- 91

[W] Wood, J.W., Bundles with totally disconnected structure group, Comm.Math. Helv.46(1971) 257-273