

Boundaries for spaces of quasi-Fuchsian groups

都立大 理 大鹿健一(Ken'ichi Ohshika)

本稿では 拙論文 "Limits of geometrically tame groups" のうち 曲面群の $PSL_2\mathbb{C}$ への表現に関する結果を述べる。

S を双曲型閉曲面とする。 $AH(S)$ で $\pi_1(S)$ から $PSL_2\mathbb{C}$ への faithful discrete表現全体のつくる空間に algebraic convergenceによる位相をいれたものとする。 $AH(S)$ のよく知られた部分空間として、quasi-Fuchsian groupsの空間 $QH(S)$ がある。Bers によって $QH(S)$ は $\mathcal{F}(S) \times \mathcal{F}(S)$ と位相同型であることが知られている。 $\mathcal{F}(S) \times \mathcal{F}(S)$ から $QH(S)$ へのこの同相写像を qf で表そう。

Bersは[Be]において、 $\mathcal{F}(S)$ の固定された元 m_0 と無限遠へいく列 $\{m_i\}$ について、 $\{qf(m_0, m_i)\}$ のある部分列は $AH(S)$ で収束することを示した。このようにして得られる群を boundary groupとよぶ。

一般にKlein群 Γ で Ω_Γ に唯一つの不変成分があるようなものを b-group とよぶ。Boundary groupは b-groupの例になっている。一方Abikoff [Ab] によって幾何学的有限な b-groupは boundary groupになることが示された。

さてThurstonはuniformization theoremの証明の過程で、ある条件を満たす $\mathcal{F}(S)$ の無限遠にいく列 $\{g_i\}, \{h_i\}$ について $qf(g_i, h_i)$ が $AH(S)$ で収束することを示した。このように boundary group以外にも $AH(S)$ における $QH(S)$ の境界に含まれる群がある。そこで $AH(S)$ 全体と $\overline{QH(S)}$ を比較することによって $AH(S)$ を調べようという方針がたてられる。

まず幾何学的有限な場合については次の定理が得られた。

定理 1. Γ を $AH(S)$ に属する Klein 群で幾何学的有限とする。このとき Γ は $\overline{QH(S)}$ に含まれる。即ち擬 Fuchs 群の列で代数的に Γ に収束するものがある。

上の定理は私の幾何学的有限 Klein 群に関する収束定理を使って Abikoff と類似の議論をすることによって得られる。

定理 2. Γ を定理 1 と同様とする。このとき Γ は正則 boundary groups の代数的極限となっている。

この定理も本質的に収束定理と Marden の同型定理によって示される。

上の二つの定理を一般の場合に拡張することを考える。予想として次のものが考えられる。

予想 1 $AH(S) = \overline{QH(S)}$.

予想 2 $AH(S)$ の元は全て boundary groups の極限である。

予想 1 は定理 1 とあわせると、Thurston の予想 "geometrically tame group は geometrically finite groups の極限としてあらわされる。" の特殊な場合である。予想 2 は Bers 予想 "b-group は boundary groups の極限である。" の一般化である。

上の二つの予想を解く為の障害は geometrically tame group について Marden の同型定理の様な定理がない点にある。

さてそこで今一度 Marden の同型定理を振り返ってみよう。Marden の同型定理

は幾何学的有限なendを無限遠の等角構造によって記述しているとみなせる。即ちEをMの幾何学的有限なendとするときそれに対応する Ω_Γ の成分 Ω_1 についてRiemann面 Ω_1/Γ によってEの双曲構造は決まるということを述べている。

そこで幾何学的無限endに対してもその双曲構造を決定する道具がほしい。幾何学的無限endに対しては、無限遠の等角構造は対応しない。しかしgeometrically tame (infinite) end に対しては、ending lamination が唯一つ定まる。それがend を記述する指標となっていることが期待される。

以上のことを念頭に置いてAH(S)の元 Γ に対してそのmarkingなるものを以下のように定義する。MのなかにSをhomotopy 同値写像によって埋め込む。SによってMは二つの成分 M^+ と M^- に分けられる。それぞれに含まれる accidental parabolic elements によって二つのSの分割が得られる。その分割によって得られたSの部分曲面はそれぞれM (のnon-cuspidal component)のendに対応している。そのendに対して幾何学的有限の場合は無限遠球面から誘導される等角構造が、幾何学的無限の場合はending lamination が定まる。そこで各部分曲面と等角構造,或はending laminationの対を考え、それを並べたものを Γ のmarking と定義する。

このとき以下の二つの定理を示すことができる。

定理 3 AH(S) の任意の元に対して、それと同じmarking を持つ $\overline{QH(S)}$ の元が存在する。

定理 4 AH(S) の任意の元に対して、boundary groups の極限でそれと同じmarking を持つものがある。

これらの定理により予想 1、2 は次の予想に帰着される。

予想 3 AH(S) の二つの元が同じ marking を持てば、それらは同一の元である。