数理解析研究所講究録
第636巻 1987年 81-90

Dehn surgered manifolds and knots II

九州大 理 茂手木 公彦 (Kimihiko Motegi)

Dehn surgery はknotsの世界とclosed oriented 3-manifoldsの世界を結ぶ懸け橋といえる。だが、橋が複雑でキチンとした案内板のようなものがまだない。

異なるknot をDehn surgeryすることにより同じoriented manifold が得られる例が"surgery modification"などによって構成されている。(Brakes[1], Lickorish[5], Livingston[6], Maruyama[7], Rolfsen[10])

ここでの目標はDehn surgeryを通してknotsとclosed oriented 3-manifoldsの間の関係を調べることである。

oriented S^3の中の(unoriented な) knot K に対し、$M(K; q/p)$でKに沿ってq/p-Dehn surgeryをして得られるoriented manifoldを表わし、$D_K \equiv \{M(K; q/p) \mid q/p \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}\}$, $H_K \equiv \{M(K; 1/n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$とおく。また、2つのknots K_1, K_2に対し $K_1 = K_2$はそれらがS^3でambient isotopicであることを意味し、2つのoriented manifolds M_1, M_2に対し $M_1 = M_2$はそれらが

orientation preservingly homeomorphic であることを意味するものとする。まず、次の事実に注意する。

命題　任意の knot K に対して、$\# D_K \cap D_{K_i} = \infty$ となるような knot K_i が無限個存在する。

そこで、はじめに surgery の係数が一致する場合について報告し、次に Dehn surgery で得られる homology 3-sphere に限って考察する。

1. surgery の係数が一致する場合

linking number が 0 であるような Brunnian link を考えることにより、異なる knots を r-surgery して同じ oriented manifold が構成されているが、異なる knots を同じ surgery することによりどのくらい同じ oriented manifold が構成されうるかということについて次がわかる。

定理 1.　$K_1 \neq K_2$ とする。次の場合を除いて、$M(K_1; r) = M(K_2; r)$ となるような r は高々有限個.

(i) K_i ; (r_i, s_i) - cable knot で、$r_1 s_1 = r_2 s_2$

(ii) K_i ; composite knot

従って、特に異なる hyperbolic knots K_1, K_2 に対しては、$M(K_1;r)=M(K_2;r)$ となるような r は高々有限個であるが、Dehn surgery で得られた hyperbolic manifold の volume に関して、最近 Ruberman は次を示している。

Theorem（Ruberman [11]） K を任意の hyperbolic knot とし、その mutant knot を K^μ と表わす。このとき、K^μ も hyperbolic knot で、$M(K;r)$, $M(K^\mu;r)$ が hyperbolic ならそれらの volume は一致する。

2. Dehn surgered homology 3-spheres

ここでは特に、Dehn surgery で得られる homology 3-sphere に限って考察し、H_K という集合の交わりの様子を調べる。はじめに、次の問題が考えられる。

問題1. 任意の non-trivial knot K に対し、$\#H_K \cap H_{K'} \geq 2$ となるような knot K' ($\neq K$) が存在するか？

（任意の knots K, K' に対し $H_K \cap H_{K'} \ni S^3$ より、$\#H_K \cap H_{K'} \geq 1$ である。$\#H_K \cap H_{K'} \geq 2$ ということは、H_K と $H_{K'}$ とが本質的に交わっていることを意味する。）

この問に対しては、K'としてKの$(1,2)$-cable、あるいは、$(-1,2)$-cableをとれば、Gordonの結果[4]とcyclic surgery theorem (Culler－Gordon－Lueck－Shalen [3])により、条件をみたすことがわかる。(従って、Kに対し、上のように少なくとも2つのknotsが存在していることがわかる。)

では、いったい$\# H_{K_1} \cap \cdots \cap H_{K_n} \geqq 2$となるようなknots $K_1, \cdots, K_n$の個数はどれくらいまでとれるのだろうか?

<u>問題</u>2. $\# H_{K_1} \cap \cdots \cap H_{K_n} \geqq 2$となるようなknots $K_1, \cdots, K_n$の個数nはboundedか?(ある定数でおさえられるか?)

これについては、Livingstonが構成した例が否定的な答を与えている。

<u>Theorem</u> (Livingston [6]) 任意の自然数nと整数mに対して、$M(K_1; \frac{1}{m}) = \cdots = M(K_n; \frac{1}{m}) \neq S^3$なるknotsの組$K_1, \cdots, K_m$が存在する。

次に、異なるknots K_1, K_2が与えられたとき、$H_{K_1} \cap H_{K_2}$はどうなっているかを考える。

問題3. $K_1 \neq K_2$ とする。$\# H_{K_1} \cap H_{K_2}$ は有限か?

この問に対しては次が成り立つ。

定理2.1. K_1, $K_2 (\neq K_1)$ の一方は Property P をもつとする。このとき、$\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid M(K_1; \frac{1}{m}) = M(K_2; \frac{1}{n})\}$ は有限集合(但し、K_i は non-trivial)。特に、$\# H_{K_1} \cap H_{K_2}$ は有限。

この定理は次の2つの命題から得られる。

命題2.2. K_1, K_2 の一方は Property P をもつとする。各 K_i に対し有限集合 $D(K_i) \subset \mathbb{Z}$ が存在して、$m \notin D(K_1)$, $n \in D(K_2)$ なる (m, n) に対し、$M(K_1; \frac{1}{m}) = M(K_2; \frac{1}{n})$ ならば、$K_1 = K_2$ となる。

命題2.3. Kを任意の non-trivial knot とする。このとき、

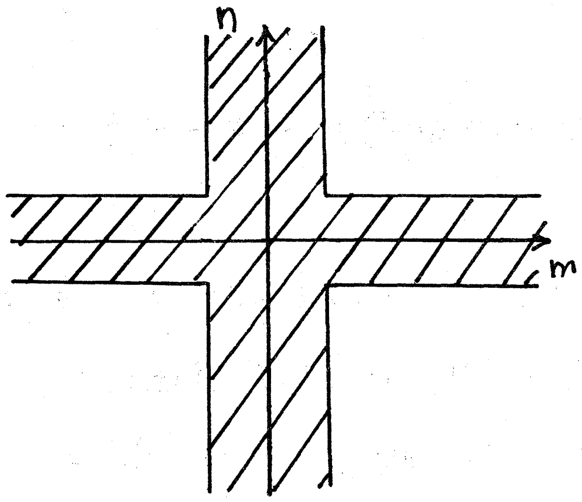
$$
\begin{array}{cccc}
f_K : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{\text{homology 3-spheres}\} \\
& \Psi & & \Psi \\
& n & \longmapsto & M(K; \frac{1}{n})
\end{array}
$$

は有限対1写像である。

注意. 1°. Kが trivial knot のとき、$f_K(\mathbb{Z}) = \{S^3\}$

2°. Kの normalized Alexander polynomial を $\Delta_K(t)$ としたとき、$\Delta_K''(1) \neq 0$ ならば、f_K は1対1 であることが示されている (Casson [2]).

$K_1 \neq K_2$ とする。命題 2.2. より、$M(K_1; \frac{1}{m}) = M(K_2; \frac{1}{n})$ なる(m, n)は下の図の斜線部にしかありえない。



また、斜線部に上のような(m, n)の組が無限個あれば、無限個のm_iに対し$M(K_1; \frac{1}{m_i})$がすべて一致するか、無限個のn_iに対し$M(K_2; \frac{1}{n_i})$がすべて一致することになり、命題2.3. に反する。

特に、surgery の係数が一致していると、すなわち、$m=n$ のときは、Property P に関する条件は不要で、次が成り立つ。

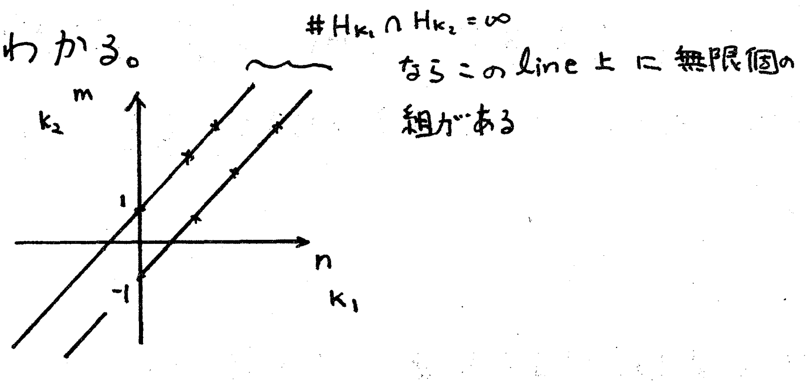
系　無限個の整数 n に対して $M(K_1; \frac{1}{n}) = M(K_2; \frac{1}{n})$

となるための必要十分条件は $K_1 = K_2$ である。

"Property P conjecture" に関連した予想として、"knot type conjecture"（knot complement は knot を決定する）があるが、この予想と関連して次が成り立つ。

系　任意の異なる knots の組 (K_1, K_2) に対して、$\# H_{K_1} \cap H_{K_2}$ が有限であることと "knot type conjecture" が正しいことは同値.

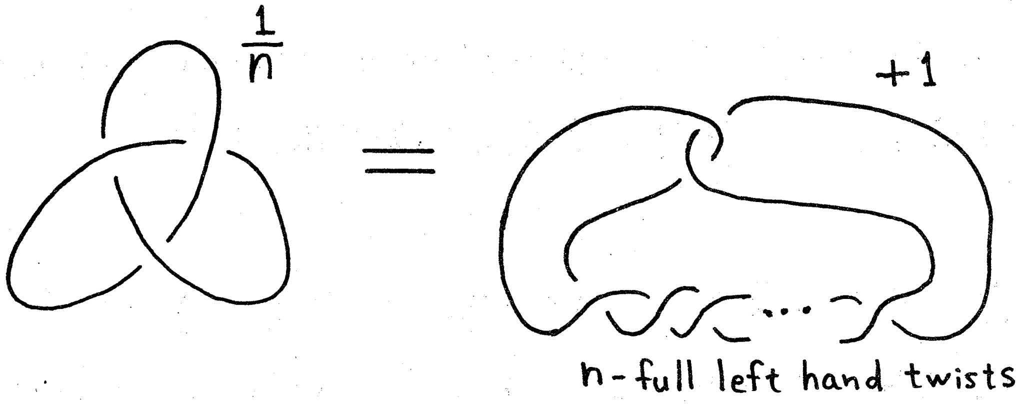
また、もし $\# H_{K_1} \cap H_{K_2}$ が無限であるとすると、cyclic surgery theorem を用いることにより、$M(K_1 : \frac{1}{n}) = M(K_2 : \frac{1}{n+1})$ あるいは、$M(K_1 : \frac{1}{n}) = M(K_2 ; \frac{1}{n-1})$ なる n が無限個なければいけないことがわかる。



注意. 1°. $M(K_1 : \frac{1}{m}) = M(K_2 : \frac{1}{n})$ となるような m, n に対し、$|m|, |n|$ はいくらでも大きな値をとりうる。（Livingston の例）.

2.° $M(K_1 ; \frac{1}{m}) = M(K_2 ; \frac{1}{n})$ となるような m, n に対し、$m-n$ は任意の整数値をとりうる。

例 (Rolfsen [10])



最後に、$H_{K_1} \cap H_{K_2}$ の個数に関して次の問題をあげておきます。

問題 任意の knots $K_1, K_2 (\neq K_1)$ に対して、

$$1 \leqq \# H_{K_1} \cap H_{K_2} \leqq 2$$ が成り立つか?

($\# H_{K_1} \cap H_{K_2} \geqq 3$ となるような例が構成できても面白いと思う)

詳しくは [8] [9] を参照して下さい。

References

[1] Brakes, W.R. : Manifolds with multiple knot surgery descriptions. Proc. Camb. Phil. Soc. 87, 443-448 (1980)

[2] Casson, A.J. : An integer invariant of homology 3-spheres. to appear

[3] Culler, M - Gordon, C.McA - Luecke, J - Shalen, P. : Dehn surgery on knots. Ann. of Math. 125, 237-300 (1987)

[4] Gordon, C.McA. : Dehn surgery and satellite knots. Trans. Amer. Math. Soc. 275, 687 - 708 (1983)

[5] Lickorish, W. : Surgery on knots. Proc. of Amer. Math. Soc. 60, 296 - 298 (1976)

[6] Livingston, C. : More 3-manifolds with multiple knot-surgery and branched cover descriptions. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 91, 473 - 475 (1982)

[7] Maruyama, N. : Knot surgery descriptions of some closed orientable 3-manifolds. Tsuda College, Jan. 16 1-14 (1984)

[8] Motegi, K : Dehn surgered manifolds and knots. Preprint

[9] Motegi, K : Homology 3-spheres which are obtained by Dehn surgeries on knots

[10] Rolfsen, D : Rational surgery calculus : Extension of Kirby's theorem. Pacific. J. Math. 110, 377-386 (1984)

[11] Ruberman, D : Mutation and volumes of knots in S^3. Invent. Math. 90, 189-215 (1987)