数理解析研究所講究録
第636巻 1987年 170-182

A new proof of the Whitney Conjecture

大阪市立大理 鎌田 聖一
(Seiichi Kamada)

§1. はじめに

$\mathbb{R}^4$ (あるいは S^4) の中に locally-flat に埋め込まれた closed, non-orientable surface F を考える。
H. Whitney は、1940年に

(1.1)「Fのオイラー標数を χ とすれば、Fのオイラー数は、$2\chi-4$, 2χ, $2\chi+4$, ---, $4-2\chi$ のうちのいずれかしか取らない。」

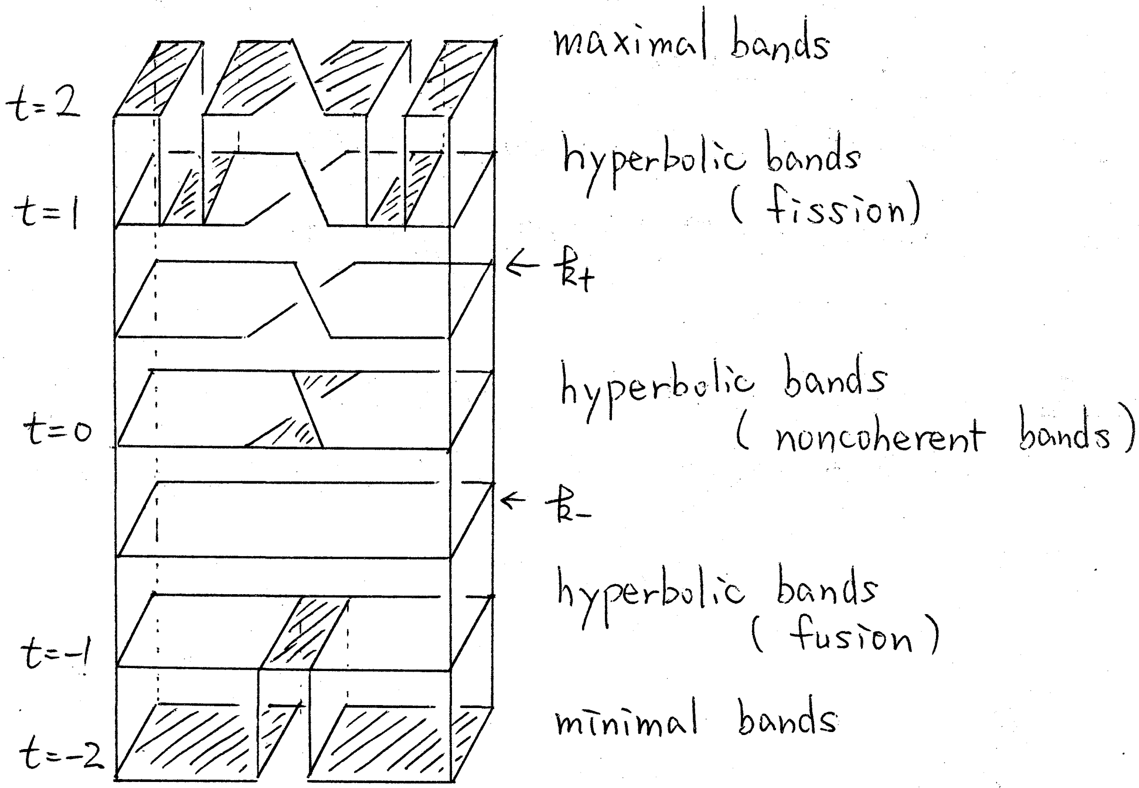
と、予想した[6]。そして W. S. Massey は 1969年 Atiyah-Singer index theorem を用いてこれを証明した[5]。ここで、Fのオイラー数とは、$\mathbb{R}^4$ におけるFの normal bundle のオイラー数をいう。(Fが non-orientable なので、局所係数を使う。[5]を参照)

これはFを$\mathbb{R}^4$の中でわずかに動かしたときの自分自身との符号付き交点数の総和に一致する。

ここでは、Atiyah-Singer index theoremを用いずに、次の定理の応用として証明を行うことが目的である。

(1.2) 定理

任意の closed, locally-flat, non-orientable surface F in $\mathbb{R}^4$は、$\mathbb{R}^4$の ambient isotopyによって normal form に変形できる。([3])



この定理は [4] (A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki) の non-orientable version として得られたもので, 詳しくは [3] (S. Kamada), [4] を参照して頂きたい。

(1.3) 定理 (Asano)

F が $\mathbb{R}^4$ の中で 3-mfd を bound するための必要かつ十分条件は、F のオイラー数 $e(F) = 0$ であることである。

この定理は定理 (1.2) の直接的な応用であり、証明は [1] (K. Asano) か [3] を参照。

この2つの定理をもとに Whitney の予想 (Whitney and Massey の定理) を証明していきたい。

<u>注意</u> S^4 の中で考える場合も、S^4 を $\mathbb{R}^4$ の1点コンパクト化と考えて、定理 (1.2), (1.3) はそのまま扱える。

§2. 証明のアウトライン

$F \subset S^4$ で考える。$M(F)$ を F で branch させた S^4 の 2-fold branched covering とする。$M(F)$ は closed, connected, orientable 4-mfd. であり，その signature（index）を $\sigma(M(F))$ と書くことにする。F の non-orientable genus を $n = 2 - \chi$ とすると，次の (1), (2) が成り立つ。

(1)　$\sigma(M(F)) = \frac{\varepsilon}{2} e(F)$　$(\varepsilon = \pm 1)$

ここで，$e(F)$ は F のオイラー数。

(2)　$\beta_2(M(F)) = n$

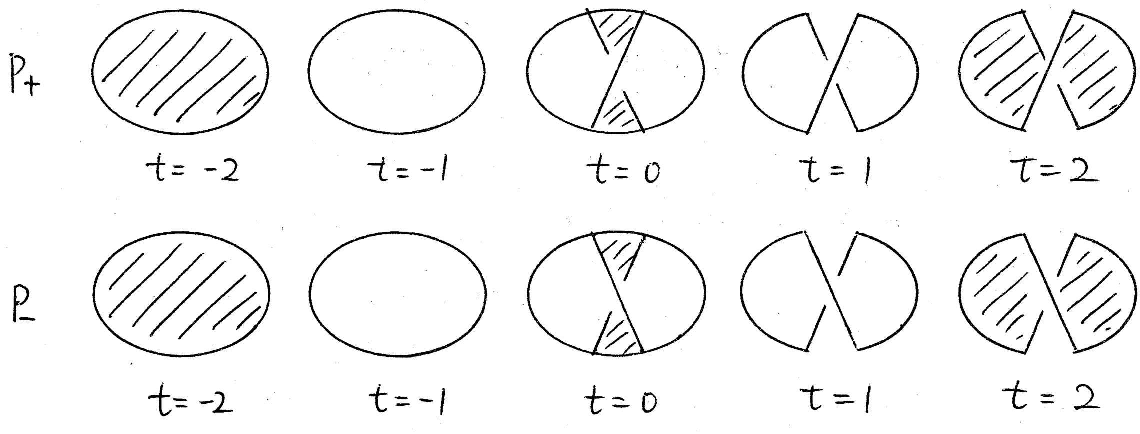
ここで，β_2 は second Betti 数を表す。

この2つが示されると，(2) から $\sigma(M(F))$ の取り得る値は $-n, -n+2, \cdots, n-2, n$ であり (1) によって $e(F)$ の取り得る値が $-2n, -2n+4, \cdots, 2n-4, 2n$ $(2\chi-4, 2\chi, \cdots -2\chi, 4-2\chi)$ であることがわかる。したがって (1), (2) を示せばよい。

§3. 等式 (1)； $\sigma(M(F)) = \frac{\varepsilon}{2} e(F)$ $(\varepsilon = \pm 1)$ の証明

（準備）　まず、次の特別な surface について考えておくと便利である。

(3.1) Example [Standard projective planes]



P_+ のオイラー数は $e(P_+)=+2$ であり、P_- は $e(P_-)=-2$ である。(実際に、少しずらしてみるとよい。)

P_+ の 2-fold branched covering $M(P_+)$ のオイラー標数は、

$$\begin{aligned}\chi(M(P_+)) &= 2\chi(S^4)-\chi(P_+)\\ &= 2\times 2-1\\ &= 3\end{aligned}$$

ところで、$H_1(M(P_+):\mathbb{Z})=0$ であり、Poincaré duality theorem を用いると $H_3(M(P_+):\mathbb{Z})=0$ がわかる。また $M(P_+)$ は closed, connected, orientable 4-mfd. であるので $H_0(M(P_+):\mathbb{Z})\cong H_4(M(P_+):\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$。Euler-Poincaré の公式によって

$$\begin{aligned}\beta_2(M(P_+)) &= \chi(M(P_+))-(\beta_0-\beta_1-\beta_3+\beta_4)(M(P_+))\\ &= 3-(1-0-0+1) = 1.\end{aligned}$$

従って $M(P_+)$ の signature は ± 1 のいずれかである。$\sigma(M(P_+)) = \varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$ とおく。$M(P_-)$ は $M(P_+)$ と向きが逆であるから $\sigma(M(P_-)) = -\varepsilon$. [実はこれらは $\mathbb{C}P^2$ と $\overline{\mathbb{C}P}^2$ である。] 故に standard projective planes P_+, P_- については等式(1)が成り立つ。

(ii) F が unknotted non-orientable surface の場合。

(3.2) Definition

F が先の((3.1)の) standard projective planes P_+, P_- のいくつかの copies の knot sum で得られるときに、non-orientable surface F は unknotted であるという。

ここで knot sum とは、向きのついた 4-sphere S^4_i とそこへ locally-flat に埋め込まれた non-orientable surface F_i $(i=1,2)$ の pairs (S^4_1, F_1) (S^4_2, F_2) があるとき、S^4_1 と S^4_2 の向きが compatible となる様な pair としての connected sum をいう。

$$(S^4, F_1 \# F_2) = (S^4_1, F_1) \# (S^4_2, F_2)$$

さて、F を λ個の P_+，μ個の P_- の knot sum としよう。($\lambda \geqq 0, \mu \geqq 0, \lambda\mu \neq 0$) これを簡単に $F = \lambda P_+ \# \mu P_-$ と表すことにする。

このとき、オイラー数の knot sum に関する additivity により、F のオイラー数は

$$\begin{aligned} e(F) &= e(\lambda P_+ \# \mu P_-) \\ &= \lambda e(P_+) + \mu e(P_-) \\ &= \lambda(+2) + \mu(-2) \\ &= 2(\lambda - \mu) \end{aligned}$$

である。また $M(F)$ は λ個の $M(P_+)$ と μ個の $M(P_-)$ の connected sum であるので、signature の additivity から

$$\begin{aligned} \sigma(M(F)) &= \sigma(\lambda M(P_+) \# \mu M(P_-)) \\ &= \lambda \sigma(M(P_+)) + \mu \sigma(M(P_-)) \\ &= \lambda \cdot \varepsilon + \mu \cdot (-\varepsilon) \\ &= \varepsilon(\lambda - \mu) \end{aligned}$$

故に 等式(1) が成り立つ。

(ii) 一般の non-orientable surface の場合。

F のオイラー数は偶数である。実際、S^4 における F の normal bundle ν の Euler class $e(\nu)$ と $M(F)$ における

F の normal bundle ν' の Euler class $e(\nu')$ との間に

$$e(\nu) = \pm 2 \cdot e(\nu')$$

なる関係があるからである。（詳細は [5] を参照）

F のオイラー数 $e(F)$ を $2s$ $(s \in \mathbb{Z})$ とおく。

$s > 0$ のとき，s 個の standard projective plane P_- の copies を F に knot sum した surface を F' としよう。

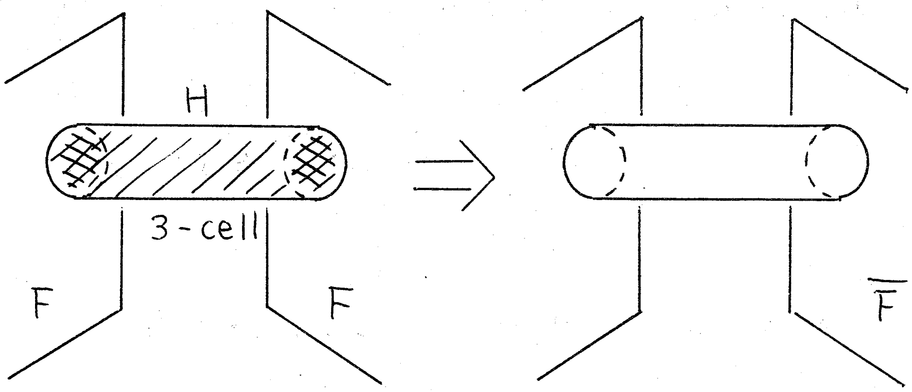
$$F' = F \# sP_-$$

F' のオイラー数は $e(F') = e(F) + s\,e(P_-) = 2s + s(-2) = 0$ である。

(3.3) Lemma

non-orientable surface $F \subset \mathbb{R}^4$（または S^4）のオイラー数が 0 であったとせよ。このとき，F に 1-handle として span する 3-cells $H_1, \cdots, H_m$ で F をこれらに沿って hyperboloidal transformation して得られる surface $\overline{F}$ が unknotted surface となるようなものが存在する。

ここで hyperboloidal transformation とは，次の図の様な変形をいう。



$F \cap H = F \cap \partial H$ = 2枚の disks $(D_1 \cup D_2)$　　　$\overline{F} = F \cup \partial H - \mathrm{Int}(D_1 \cup D_2)$

(図は 1-handle が 1本の図)

<u>Proof of 3.3</u>　$e(F)=0$ であるから、定理 (1.3) によって F は $\mathbb{R}^4$ (または S^4) で 3-mfd. M を bound する。$H_1, \cdots, H_m$ を M の 1-skeleton を残すように M の中にとればよい。$Cl\{M-(H_1 \cup \cdots \cup H_m)\}$ は non-orientable handle-body で その境界は unknotted non-orientable surface である。詳しくは [3]。　$\square$

さて (ii) の場合の証明を続けよう。

Lemma 3.3 により $\overline{F'}$ が unknotted になる様な F' に span する 1-handles $H_1, \cdots, H_m$ が存在する。しかも、$\overline{F'}$ は non-orientable handle-body を bound するので

定理(1.3)から $e(\overline{F}')=0$ である。

(3.4) Lemma

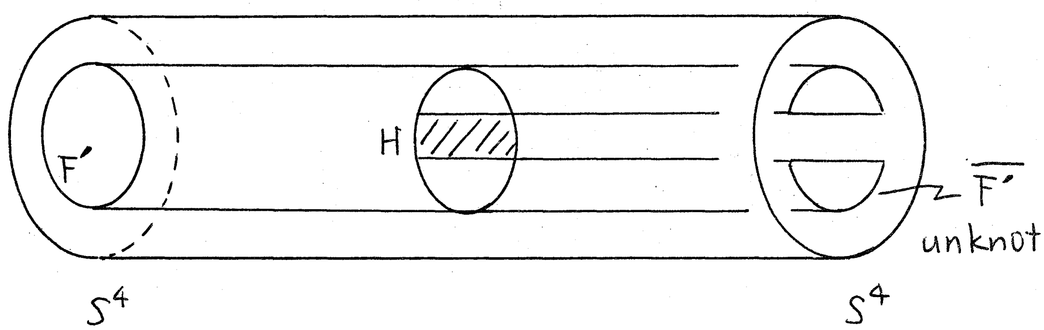
$\overline{F}'$ で branch する S^4 の 2-fold branched covering $M(\overline{F}')$ について、その signature は $M(F')$ の signature に等しい。 $\sigma(M(\overline{F}'))=\sigma(M(F'))$

Proof of 3.4 (S^4, F') と $(S^4, \overline{F}')$ を結ぶ cobordism を

$$W \cong S^4 \times I$$

$$\begin{aligned}(W, M) = &(S^4, F') \times [0, \tfrac{1}{2})\\ &\cup (S^4, F' \cup H_1 \cup \cdots \cup H_m) \times [\tfrac{1}{2}]\\ &\cup (S^4, \overline{F}') \times (\tfrac{1}{2}, 1]\end{aligned}$$

と構成する。



M は W の locally-flat, proper な 3-submfd. であり、$H_1(W-M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ (生成元は

$(S^4, F)\times[0]$ の meridian)。そこで M を branch point set とする W の 2-fold branched covering $\widehat{W}$ を考えよう。$\widehat{W}$ の境界は $(-M(F')) \cup M(\overline{F}')$ である。故に $M(F')$ と $M(\overline{F}')$ は cobordic であるから $\sigma(M(F')) = \sigma(M(\overline{F}'))$ 。 $\square$

ところで、$\overline{F}'$ は unknotted surface だから等式 (1) が成り立ち $\sigma(M(\overline{F}')) = \frac{\varepsilon}{2} e(\overline{F}') = 0$

故に、 $\sigma(M(F')) = \sigma(M(\overline{F}')) = 0$

一方、 $M(F') = M(F) \# s M(P_-)$ であるので

$$\sigma(M(F')) = \sigma(M(F)) + s\,\sigma(M(P_-))$$
$$= \sigma(M(F)) - s\cdot\varepsilon$$

従って $\sigma(M(F)) = s\cdot\varepsilon$

$$\sigma(M(F)) = \varepsilon\cdot\frac{1}{2}e(F)$$

$s > 0$ のとき等式 (1) は成り立つ。

$s < 0$ のときは同様の議論を P_- のかわりに P_+ で行えばよい。 $\square$

§4. 等式 (2); $\beta_2(M(F)) = n$ の証明

定理 (1.2) より F は normal form とする。

normal form のその形状から，次がわかる。

(4.2) Lemma

k_+ を normal form をした surface F の upper cross-sectional knot（定理(1.2)の図を参照）とする。このとき自然な全射

$$\pi_1(S^3 - k_+) \longrightarrow \pi_1(S^4 - F)$$

が存在する。

したがって，$H_1(S^3 - k_+ ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(S^4 - F ; \mathbb{Z})$ への全射が存在する。ところが (S^3, k_+) の 2-fold branched covering の H_1 は odd torsion であるので，これらから $H_1(M(F) ; \mathbb{Z}_2) = 0$ を得る。よって，$\beta_1(M(F)) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} H_1(M(F) ; \mathbb{Z}) = 0$。
Poincaré duality theorem を用いて $\beta_3(M(F)) = 0$.
M(F) は closed, connected, orientable 4-mfd. であるので
$\beta_0(M(F)) = \beta_4(M(F)) = 1$.
一方，

$$\begin{aligned} \chi(M(F)) &= 2\chi(S^4) - \chi(F) \\ &= 2 \times 2 - (2-n) \\ &= 2+n \end{aligned}$$

Euler - Poincaré の公式によって

$$\beta_2(M(F)) = n \qquad \square$$

References

[1] K. Asano : The embedding of non-orientable surfaces in 4-space (unpublished).

[2] F. Hosokawa and A. Kawauchi : Proposals for unknotted surfaces in four-spaces, Osaka J. Math., 16 (1979), 233-248.

[3] S. Kamada : Non-orientable surfaces in 4-space (in preparation).

[4] A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki : Descriptions on surfaces in four-space I, Normal form, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 10 (1982), 75-125.

[5] W. S. Massey : Proof of a conjecture of Whitney, Pacific J. Math., 31 (1969), 143-156.

[6] H. Whitney : On the topology of differentiable manifolds, Lectures in topology, Michigan Univ. Press, 1940.