数理解析研究所講究録
第 637 巻 1988 年 14-18

磁性流体の運動についてのコメント

大阪府大　工　後藤金英 (Kanefusa Gotoh)

1. はじめに

磁性流体の特徴は，外部からの磁場の作用に伴う流体自体の磁化と内部角運動量の励起である。　この事実にもとづいて，磁性流体の力学の基礎方程式は確立されているが，界面変形や非一様温度分布が本質的と考えられる問題の解析には，基礎方程式に含まれる緩和時間を 0 とする瞬間磁化の取扱いが有効で，現象をよく記述する。　この取扱いでは，磁化は磁場と常に平行であり，流体の温度・密度・磁場の強さで決る既知量となる。　一方，内部角運動量は解析に寄与しない。　これらの事柄は，解析を著しく簡単にする。

ところで，磁性流体の流れが本質的な問題では，この瞬間磁化の取扱いは有効ではない。　特に，流体の温度と密度の分布が一様で，そのうえ界面変形を伴わない流れ，例えば圧力勾配による管流などの場合には，磁場の効果が全て圧力項に吸収されてしまって，この取扱いによる解析では，圧

力分布の他に磁性流体であることの変化はどこにも現れず，現実の流れを記述しない。

磁性流体が流れている場合は，磁場が作用しても磁化の向きは磁場と完全に一致することはなく，流体にモーメントが働く。　このモーメントは流体の回転角速度（$=\frac{1}{2}$渦度）と粒子の回転角速度（角運動量／慣性能率）のずれと釣合って，結局モーメントは働かないが，回転角速度のずれが運動方程式の粘性項にはね返り，磁性流体の流れに外部磁場が作用すると，流れに対する磁場の方向性が，あたかも粘性が方向性をもつかの様な結果を導く。

流れがあるとき，たとえ定常流であっても，瞬間磁化の取扱いが破綻するのは，磁場と平行な磁化が実現しないことに原因がある。この観点から，瞬間磁化の取扱いという術語は適当とは思えない。　むしろ，平行磁化の近似と呼ぶ方が内容をよく表している。

2. 定常流を支配する方程式

磁性流体力学の基礎方程式系は，非圧縮性流体として取扱う場合，無次元形で

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=-\nabla p_m+\frac{1}{R}\nabla^2\boldsymbol{u}+\Pi(\boldsymbol{M}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}+Q\,\nabla\times(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{\omega}) \qquad (1)$$

$$N\frac{d\mathbb{S}}{dt}=\Pi\,\mathbb{M}\times\mathbb{H}-2Q(\mathbb{S}-\boldsymbol{\omega}),\qquad(2)$$

$$\varepsilon\frac{d\mathbb{M}}{dt}=\varepsilon\,\mathbb{S}\times\mathbb{M}+M\frac{\mathbb{H}}{H}-\mathbb{M},\qquad(3)$$

の形に表される。 ここに，$\mathbb{u}$ は速度，$\mathbb{M}$ は磁化，$\mathbb{H}$ は磁場，$\mathbb{S}$ は内部角運動量にもとづく回転角速度，$\boldsymbol{\omega}$ は流体の回転角速度（$=\frac{1}{2}$ 渦度）であり，それぞれ代表量 U_0，M_0，H_0，IU_0/L_0，U_0/L_0 で無次元にした量である。 無次元パラメターは

$$R=\frac{\rho L_0U_0}{\eta},\qquad \Pi=\frac{\mu_0M_0H_0}{\rho U_0^2},\qquad \varepsilon=\frac{U_0\tau_b}{L_0}$$

$$N=\frac{2}{5}\frac{\rho_s}{\rho}\left(\frac{a}{L_0}\right)^2\varphi,\qquad Q=\frac{I}{2\tau_s\rho L_0U_0}\left(=\frac{3\varphi}{R}\right)$$

で定義される。 ここに，η と ρ は流体の粘性率と密度，μ_0 は真空の透磁率，ρ_s は磁性流体に分散している粒子の密度，a は半径，φ は体積濃度である。 $\tau_b=3\eta_0V/kT$（V は1粒子の体積，k はボルツマン定数，T は絶対温度）は，粒子の回転ブラウン運動の緩和時間，$\tau_s=a^2\rho_s/15\eta_0$ は，粒子の粘性回転緩和時間であり，I（$=8\pi a^5\rho_s n/15$，n は粒子数密度）は，単位体積中の粒子の慣性能率の和である。 また，p_m は $p+\frac{1}{2}\mu_0\mathbb{M}\cdot\mathbb{H}-\mathbb{S}(\boldsymbol{\omega}-\mathbb{S}/I)$ を無次元にした量である。

管流の解を求める場合の近似の第一は，(2) の左辺の無視である。 これは N に含まれる $(a/L_0)^2$ が $N\approx10^{-13}$ の評価を与えることによる。 次に，$M_0=nmL(\xi_0)$（m は1粒

子の磁化の大きさ, $L(\xi) = \coth\xi - \frac{1}{\xi}$, $\xi_0 = \mu_0 m H_0 / k T_0$)を用いると,

$$\Pi = \frac{Q}{\varepsilon}\xi_0 L(\xi_0) \tag{4}$$

が得られるから, $N = 0$ とおいた (2) から

$$\mathbb{M} \times \mathbb{H} = O(\varepsilon)$$

でなければならない。 つまり, 流れている磁性流体の場合, 磁化 $\mathbb{M}$ は ε の程度だけ磁場の向きからずれる。 そこで,

$$\mathbb{M} = \frac{M}{H}\mathbb{H} + \varepsilon\mathbb{M}' \tag{5}$$

とおくと, $N = 0$ とした (2) から

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2}\xi_0 L(\xi_0)\mathbb{M}' \times \mathbb{H} + \omega \tag{6}$$

が得られる。 (6) と (3) から, 定常流の場合には, $\mathbb{M}'$ を求めることができて,

$$\left.\begin{aligned} M'_{\perp} &= \frac{2M}{H(2 + MH\xi_0 L(\xi_0))}\omega \times \mathbb{H} \\ M'_{\parallel} &= -(\mathbb{u}\cdot\nabla)M \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

となる。 添字 $\perp$ と $\parallel$ は $\mathbb{H}$ と直角および平行方向の成分を表す。 (6) と (7) を (1) に用いると, $\mathbb{u}$ について

$$\begin{aligned}(\mathbb{u}\cdot\nabla)\mathbb{u} = &-\nabla\left(p_m - \frac{3\varphi}{\varepsilon R}\xi_0 L(\xi_0)\int_0^H M\,dH\right) \\ &+ \frac{1}{R}\left\{1 + \frac{3\varphi MH\xi_0 L(\xi_0)}{2(2 + MH\xi_0 L(\xi_0))}\right\}\Delta\mathbb{u} + \frac{3\varphi}{R}\xi_0 L(\xi_0)(\mathbb{M}'\cdot\nabla)\mathbb{H} \\ &- \frac{3\varphi}{R}\mathbb{H} \times \nabla\frac{M\xi_0 L(\xi_0)\,\omega\cdot\mathbb{H}}{H(2 + MH\xi_0 L(\xi_0))} + \frac{3\varphi}{R}\omega \times \nabla\frac{MH\xi_0 L(\xi_0)}{2 + MH\xi_0 L(\xi_0)},\end{aligned} \tag{8}$$

を得る。 この式の磁性流体に固有の項が全て φ/R を含むことに注意。 また，界面変形の現象などの場合には，右辺オ一項内の $O(\varepsilon^{-1})$ の項が最も重要である。

特に，H と M が一様な場合には，(8) で $H = M = 1$ として，

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p_m + \frac{1}{R}\left\{\left(1+\frac{3\varphi}{2}F\right)\Delta\boldsymbol{u} - 3\varphi F\,\boldsymbol{H}\times\nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{H})\right\}, \tag{9}$$

更に $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{H} = 0$ の場合は

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p_m + \frac{1}{R}\left(1+\frac{3\varphi}{2}F\right)\Delta\boldsymbol{u} \tag{10}$$

を得る。 ここに

$$F = F(\xi_0) = \frac{\xi_0 - \tanh\xi_0}{\xi_0 + \tanh\xi_0}$$

である。 (9)(10) いずれの場合も，磁場の効果は粘性率の増加の形をとる。 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H} = 0$ の場合は

$$\boldsymbol{H}\times\nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{H}) = -\nabla\times\{(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{H}\} = \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{u}$$

で，(9) の右辺は $-\nabla p_m + \frac{1}{R}\Delta\boldsymbol{u}$ となり，粘性項には磁場の作用は現れない。

チャネル流・円管流の場合 (9)(10) を解くことは，Shliomis の解析の域を出ないが，(8)(9) は他の問題への見通しをよくする点で有意であろう。

参考文献

後藤金英　磁性流体の流体力学　ながれ $\underline{5}$ (1986) 16–26