

## 外乱による T-S 波動の励起過程

阪府大工 浅井雅人 (Masahito Asai)

阪府大工 西岡通男 (Michio Nishioka)

### 1. まえがき

主流の乱れが弱い場合、平板上境界層の乱流遷移が線形安定論に従う T-S 波動 (粘性型不安定波) の空間増幅から始まることは周知である。この不安定波を励起させるいわゆる外乱には、主流中の乱れや音、機械的振動等があげられるが、外乱による T-S 波動の励起、即ち境界層の受容性に関する研究が始まったのはごく最近である。受容性の問題は、数学的には上記外乱が与えられた条件下で線形安定論に基づき固有モードで記述される攪乱にいかに変化するかであり、そこで問題となるのは、外乱と T-S 波動 (対応する周波数の) の空間スケール (波長) の大きな違いである (例えば、音の波長  $\gg$  T-S 波の波長)。Nishioka & Morkovin (1983, 1986) 及び Goldstein (1985) は、この問題 (特に音による励起) をそれぞれ実験的及び理論的に解析し、外乱 (音) が T-S 波動を励

起するためには、音（圧力変動）により形成されるストークス層が下S波動の空間スケールを含む空間変化を伴う必要があることを示した。

本研究では、これらの結果をふまえて、与えられた外乱（壁面境界上の局所的な変動）から下S波動が生まれる過程を平面ポアズイユ流（二次元チャンネル流）を対象として数値シミュレーションする。

## 2. 基礎方程式

速度場  $U(x, y, t) = (u, v)$  及び圧力  $P(x, y, t)$  は二次元非圧縮ナビエ・ストークス方程式により表わされる。

$$\partial U / \partial t + (U \cdot \nabla) U = -\nabla P + \nabla^2 U / R \quad (1)$$

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (2)$$

ここで、方程式はチャンネル半分深さ  $h$  と中心流速  $U_c$  で無次元化されており、 $R (= U_c h / \nu)$  はレイノルズ数である。外乱は時刻  $t = 0$  からチャンネル下壁上の一部 ( $-a \leq x \leq a, y = -1$ ) に時間的に周期変化する  $u$  変動を与えることにより基本流、

$$u = U(y) = 1 - y^2, \quad v = 0 \quad (3)$$

に導入される。即ち、下壁面上の境界条件が次のように与えられる。

$$u(x, y = -1, t) = U_w(x) \sin \omega t \quad (t \geq 0), \quad v(x, y = -1, t) = 0 \quad (4)$$

ここで、

$$U_w(x) = \begin{cases} A_w \cos^2(\pi x/2a) & ; |x| \leq a \\ 0 & ; |x| > a \end{cases} \quad (5)$$

上壁 ( $y=1$ ) では、

$$U(x, y=1, t) = V(x, y=1, t) = 0 \quad (6)$$

外乱源 ( $|x| \leq a$ ) の十分上流の流れは外乱の影響を受けないと仮定し、上流境界 ( $x=X_u$ ) で次の条件を課す。

$$U = U(y) = 1 - y^2, \quad V = 0 \quad (7)$$

一方、下流境界 ( $x=X_d$ ) では波動の存在を許す次の波動型条件 (Fasel 1976) を使う。

$$\partial^2 U / \partial x^2 + \alpha_0^2 (U - U) = 0, \quad \partial^2 V / \partial x^2 + \alpha_0^2 V = 0 \quad (8)$$

ここで、 $\alpha_0$  は励起される波の波数に対応する値である。本計算においては、レイノルズ数は亜臨界値  $R=5000$  (線形安定論による臨界レイノルズ数 5772), 外乱の周波数  $\omega=0.3$  である。

### 3. 数値解法

方程式はスタガードメッシュで定義された  $U$  及び  $P$  を用いて差分化される。慣性項については Kawamura & Kuwahara (1984) の三次風上差分, 他の空間微分については二次の中心差分で近似し、差分方程式は境界条件(4)~(8) と共に以下の反復計算により解かれる。

$$(U_0^{n+1} - U^n) / \Delta t = -\nabla P^n - (U^n \cdot \nabla) U^n + \nabla^2 U^n / R \quad (9)$$

$$(U_k^{n+1} - U_{k-1}^{n+1}) / \Delta t = -\nabla \delta P_k^{n+1} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (10)$$

ここで、 $U^n$ ,  $P^n$ は時刻  $t = n\Delta t$  での速度及び圧力である。

$\delta P_k^{n+1}$ は次の時刻  $(n+1)\Delta t$  での速度場が連続式(2)を満たすための圧力補正であり、次式から計算される。

$$\nabla^2 \delta P_k^{n+1} = \nabla \cdot U_{k-1}^{n+1} / \Delta t \quad (k=1, 2, \dots) \quad (11)$$

反復計算はすべてのメッシュで  $U_k^{n+1}$  が  $\varepsilon = 10^{-6}$  の精度で連続式を満たすまで行なった。

$$|\nabla \cdot U_k^{n+1}| < \varepsilon \quad (12)$$

$$U^{n+1} = U_k^{n+1}, \quad P^{n+1} = P^n + \sum_{k=1}^K \delta P_k^{n+1} \quad (13)$$

上流及び下流境界はそれぞれ  $X_u = -9.9$ ,  $X_d = 24.9$  とし、メッシュ間隔(等間隔)  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  はそれぞれ 0.15, 0.05 である。また時間きざみ  $\Delta t$  は 0.02 である。計算はすべて 16ビットマイクロコンピュータ(NEC 9801)で行なった。

#### 4. 結果及び考察

まず、外乱(4)(5式)の振幅  $A_w$  及び幅  $2a$  がそれぞれ 0.01 及び 1.5 ( $=10\Delta x$ ) の場合についてシミュレーションを行なった。図1は、上記外乱により励起される変動の発達を時刻  $t = 22, 42, 62$  及び 102 での  $U$  変動成分により示している。ここで、 $y$  位置は臨界層近くの  $\pm 0.825$  である。図のように攪乱が導入されるとすぐにチャンネルの上下面 ( $y \approx 0$ ) に波

動が励起され、時刻の経過とともに外乱源の下流 ( $x > a$ ) にのみ発達する。一方、上流側には定在波動的な弱い変動が見られるだけである。これは、注目する波動の生成にとって圧力と対流効果が非常に重要であることを意味する。励起された波動は  $t=62$  ですでに下流境界に達しており、 $t > 90$  で全計算領域で流れが周期

的 (周期  $T = 2\pi/\omega \doteq 21$ ) になることを確認した。以下では周期的なパターンが実現された後の流れに注目する。 $t=102$  の波形からわかるように、励起された波動は下流へやっくと減衰し、その減衰波の波長は約 5.85 である。この値は、オルソマーフィールド (O-S) 方程式;

$$\{R(\alpha U - \omega)(d^2/dy^2 - \alpha^2) - \alpha R dU/dy^2 + i(d^2/dy^2 - \alpha^2)^2\} \phi(y) = 0 \quad (14)$$

$$\phi = d\phi/dy = 0 \quad \text{at } y = \pm 1 \quad (15)$$

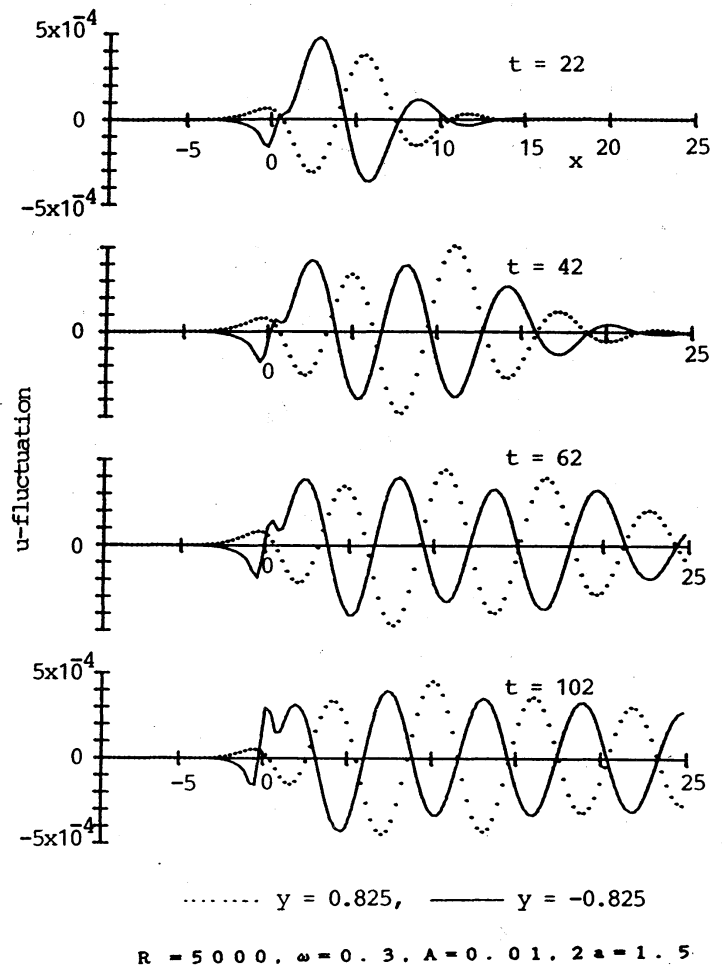


図 1.

$$U = \text{Real} \{ d\phi/dy e^{i(\alpha x - \omega t)} \}, \quad V = \text{Real} \{ -i\phi e^{i(\alpha x - \omega t)} \} \quad (16)$$

から計算される T-S 波 (減衰率  $\alpha_i$  が最小の固有モード) の波長  $\lambda_{TS} = 2\pi/\alpha_r = 5.82$  ( $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ ) とほとんど完全に一致する。

また、図 2 は  $x = 18$  ( $\sim 3\lambda_{TS}$ ) での  $U$  と  $V$  の変動の振幅・位相の  $y$  分布を T-S 波動 (上記 O-S 方程式の解) のそれと比較しているが、両者の一致は外乱源の下流に確かに T-S 波動が励起されることを示している。

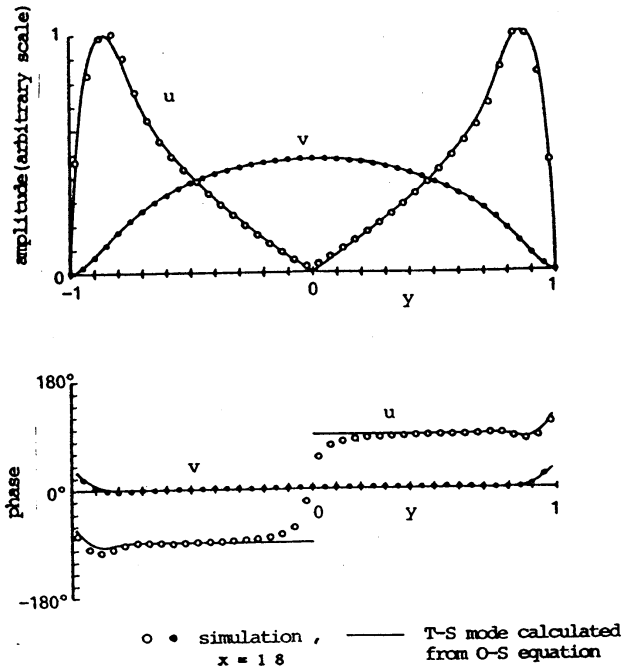


図 2.

次に、外乱源のどれ程下流からこの T-S 波動を確認

できるかを見るために、種々の  $x$  位置で波動の構造を詳細に調べた。図 3 は、外乱源上及びその下流の 6 つの  $x$  位置での  $U$  と  $V$  の変動の振幅の  $y$  分布である。縦軸のスケールは任意であるが、 $U$  と  $V$  の相対的な大きさは比較できる。外乱源上の変動構造は振動境界層 (ストークス層) 的であり、従って  $x$  方向に局所的な渦度攪乱がそこで生まれる。図は、その振動ストークス層が T-S 波動に発達する様子を示していて、ここに示す変動構造から判断する限り、変動を T-S 波動として

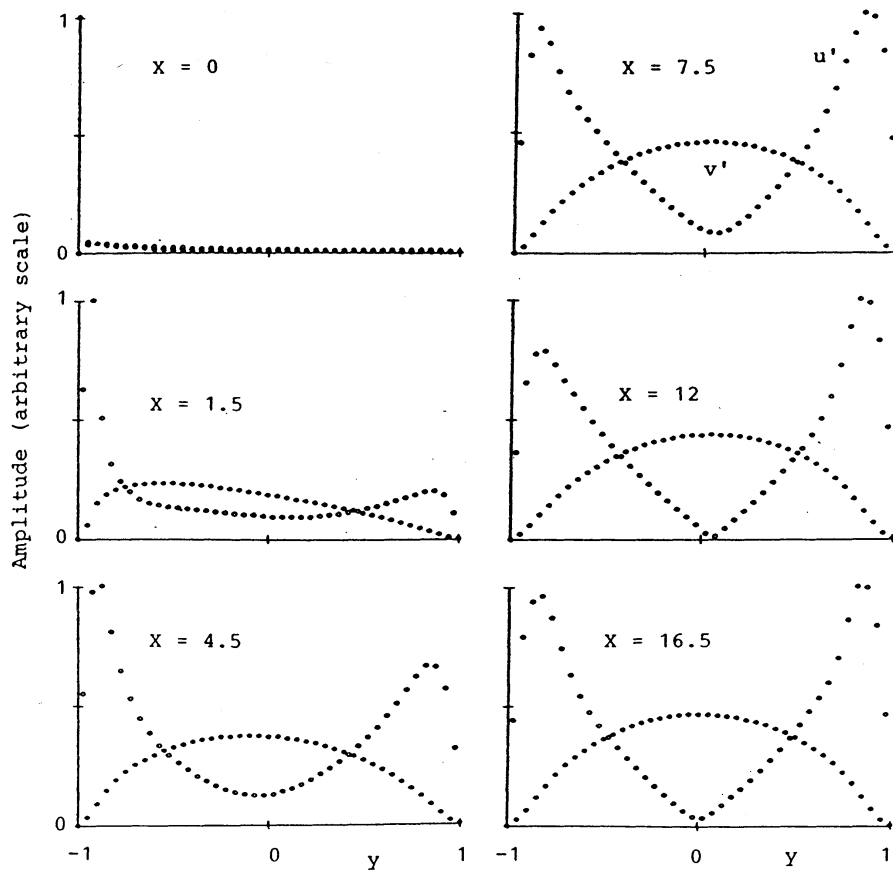


図 3.

十分におこなすことができるのは少なくとも  $2.5 \lambda_{TS}$  以上下流である。しかし、以下に示すさらに詳細な解析から、T-S 波動は外乱源にかなり近い  $x$  位置で確認できる。即ち、外乱源に近い  $x$  位置では、波動は下 S 波モードに加え、(減衰率の大きな) O-S 方程式の高次の固有モード、特に  $u$  成分が  $y$  に関して対称なモードを含んでいる。例えば、 $x=8.4$  位置での  $u$  変動成分を  $y$  に関して対称、反対称成分に分解し O-S 方程式の対応する固有モードの構造と比較すると、図 4 のように、反対称成分は明らかに下 S 波モードであり、対称成分は高次モー

ドの一つに一致しているのがわかる：対称モードの固有値 $\alpha$ は $0.8081 + 0.1915i$ である。これら2つのモードの最大振幅 $U_m$ （実効値の $y$ 分布の最大値）はそれぞれ $6.63 \times 10^{-5}$ （対称モード）と $2.90 \times 10^{-4}$ （反対称モード）である。対称モードは図5に示すように急速に減衰し、下流では反対称のT-S波モードが卓越する。

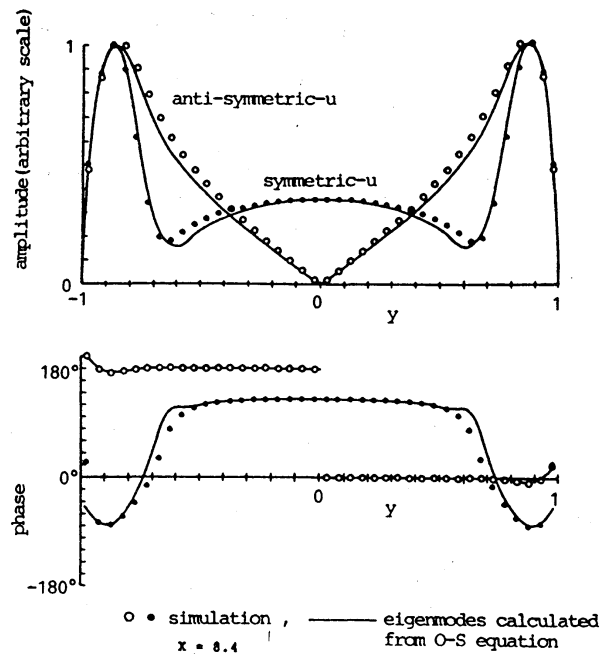


図 4.

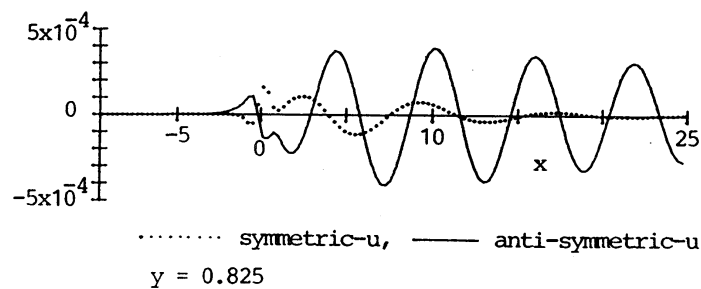


図 5.

以上のように、本計算は弱い外乱によりT-S波動が励起される過程をシミュレートした。ここで与えた外乱は一つの特  
 別なものにすぎないが、T-S波動の励起に関する以下の重要な結論を見い出すことができる。上記の例では、外乱の振幅 $A_w = 0.01$ に対し、励起されるT-S波動の振幅は $2 \times 10^{-4}$ 程度である。この擾乱レベルではT-S波動の励起過程はもちろん線形現象であり、実際外乱の振幅 $A_w$ を $(U_w(x))$ の関数形を変



えることなく) 2倍にすると励起される T-S 波動の振幅も 2倍になることを確認した。一方、励起される T-S 波動の強さは外乱の幅  $2a$  にも強く依存する。即ち、 $2a$  を 1.5 から 3.0 及び 6.0 に増すと ( $A_w$  は 0.01 に固定)、図 6 に示すように T-S 波動の強さが変化する。ここで、縦軸は外乱源の十分下流  $x=21.9$  での最大実効値  $U_m$  であり、横軸は次に説明する外乱の一つの特性量である。(5)式で与えられる外乱  $U_w(x)$  は  $x$  方向に局限されており、従ってフーリエ積分で表現可能である。横軸は、それらフーリエ成分の中で T-S 波動の波数  $\alpha_{TS}$  に対応する成分  $C(\alpha_{TS})$  である。

$$\begin{aligned} C(\alpha_{TS}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_w(x) e^{-\alpha_{TS} x} dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{2}{\alpha_{TS}} - \frac{a}{\pi + a\alpha_{TS}} + \frac{a}{\pi - a\alpha_{TS}} \right) \sin(a\alpha_{TS}) \end{aligned} \quad (17)$$

図 6 の結果は、励起される T-S 波動の強さが外乱のもつフーリエ成分  $C(\alpha_{TS})$  と直線関係にあることを示し、特にその直線が原点を通ることは、T-S 波動が励起されるためには外乱が必ず T-S 波動(対応する周波数の)の波数

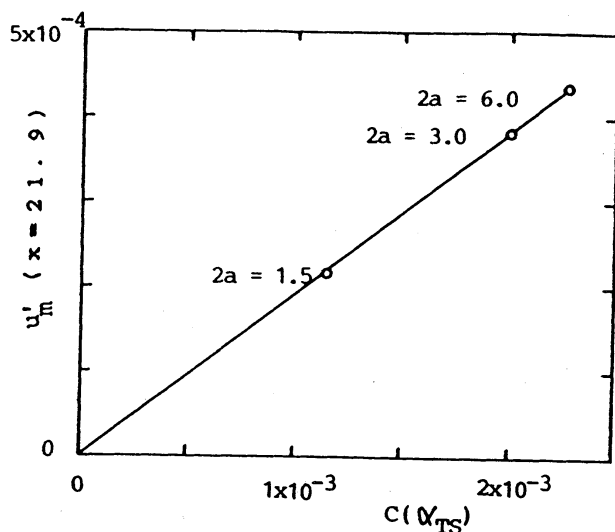


図 6.

に対応するフーリエ成分をもたねばならないことを意味する。

同様の関係式は Goldstein (1985) の行なった壁面形状が局所的に変化する時の音による T-S 波動の励起に関する解析においても得られている。その場合、壁面に沿って進行する音波は壁面が幾何学的に変化する位置で流れ方向の局所変化を伴うストークス層を生む。そのストークス層は、上記問題と同様あらゆる波数のフーリエ成分を含み（各成分の大きさは壁面の関数形のフーリエ成分に比例）、その中で励起される T-S 波動の強さに寄与するのは T-S 波動の波数成分  $|F(\alpha_{TS})|$  ( $F(\alpha)$ ; 壁面  $y_w = f(x)$  のフーリエ係数) である。ただし、 $\alpha_{TS}$  は厳密には複素波数であり、今回のように減衰率  $\alpha_i$  が小さな時には  $|F(\alpha_{TS})| \doteq |F(\alpha_r)|$  である。

この T-S 波動が励起されるための必要条件は、Nishioka & Morkovin (1983) により初めて提案され、 $\alpha_{TS}$  成分を含むストークス層を実際に境界層につくることにより実験的に示されたが、Goldstein 及び本研究はそれを解析的及び数値シミュレーションで確認したと言える。

## 5. まとめ

本研究では、T-S 波動が壁面上の一部に与えられた微弱な外乱により励起される過程を、平面ポアズイユ流 ( $R=5000$ ) を対象としてナビエ・ストークス方程式に基づき直接数値シ

ミュレーションした。以下に主な結果をまとめる。

T-S波動が励起される過程は、まず外乱源上に振動境界層（ストークス層）的な変動場が生まれ、そのすぐ下流から線形安定論に従う波動群が発達し、下流へ進むにつれて減衰率最小のT-S波動が卓越する。一方、上流側には定在波的な弱い変動が現れるだけである。励起されるT-S波動の強さは、与えられた外乱に含まれるT-S波動の波数 $\alpha_{Ts}$ に対応するフーリエ成分の大きさに比例する。この比例関係は、T-S波動が励起されるためには外乱がその周波数に対応する $\alpha_{Ts}$ のフーリエ成分をもたねばならないというNishioka & MorkovinによるT-S波動の励起のための必要条件を明確に示していると言える。

本研究は、大阪府立大学大学院生菅羽喜宣君（現住友電工）の協力のもとで行なわれたことを追記する。

#### REFERENCES

- Nishioka, M. & Morkovin, M.V. 1986 J. Fluid Mech. vol. 171, 219-261 ;  
1983 Bull. APS, 28, 9.
- Goldstein, M.E. 1985 J. Fluid Mech. vol. 154, 509-529.
- Fasel, H. 1976 J. Fluid Mech. vol. 62, 249-261.
- Kawamura, T. & Kuwahara, K. 1984 AIAA paper No. 84-0340.