数理解析研究所講究録
第 637 巻 1988 年 75-88

軸方向流れをともなう渦糸の3次元運動

公害研　宮嵜　武　(Takeshi Miyazaki)
東大理　福本　康秀 (Yasuhide Fukumoto)

1. 序

非粘性非圧縮性流体中における渦糸(空間曲線 $\boldsymbol{X}(s,t)$)の3次元的運動は *Localized Induction Equation* (LIE) によって近似的に記述される[1]。

$$\boldsymbol{X}_t = \left(\frac{\Gamma}{4\pi}\log\frac{L}{a}\right)\boldsymbol{X}_s \times \boldsymbol{X}_{ss}. \qquad (1)$$

ここで, t は時間, s は曲線に沿う長さである。Γ は渦糸の循環, a は渦核半径, L は自己誘導に特徴的な長さを表わす。cut-off parameter $\log\frac{L}{a}$ は一定と仮定する。(この場合, 時間スケールの変換によって(1)式右辺の係数を"1"にすることができる。) Hasimoto[2] は, 渦糸の曲率 κ と捩率 τ からなる複素変数

$$\psi = \kappa \exp\left(i\int \tau\, ds\right) \qquad (2)$$

を導入することによって, LIEが *Nonlinear Schrödinger Equation* (NLS) に帰着できることを示した。

$$i\psi_t + \psi_{ss} + \frac{1}{2}|\psi|^2\psi = 0 . \tag{3}$$

NLSは可積分であり，したがってLIEも可積分な方程式ということになる。しかし，LIEの解$X(s,t)$を与えられた$\psi(s,t)$から構成する作業は容易ではなく，1-Soliton解などの限られた解しか求められていなかった。[2),3)] 近年になってSym[4)]はAKNS形式に幾何学的な意味付けを与え（Soliton Surface Theory），その副産物としてLIEの解を効率よく構成する手法を見い出した。Leviら[5)]はこの手法によって2-Soliton解の表式を求めた。また，これとは独立にFukumoto & Miyazaki[6)]はHirotaによる2次形式の方法を用いて，N-Soliton解を書き下している。

一方，実験的にはHopfingerら[7)]が回転する円筒容器内に形成される集中渦の運動を調らべ，LIEのSoliton解によく似た変形が渦に沿って伝播することを観察した。Maxworthyら[8)]はより精密な実験を行い，観察される変形の伝播速度とSoliton解のそれとを比較した。残念ながら，必ずしも定量的な一致は得られなかった。また，Maxworthyら[9)]は伝播速度の異なる2つの変形が衝突するときには，互いに通り抜け，位相が大きく前進することを観察した。この事実は各変形がSoliton的な性格を持つことを示している。しかし，LIEのN-Soliton解は衝突前後でそのように大きな位相の前進を示さず，実験

結果を説明することができない。

したがって，これらの実験ではLIEに取り入れられていない要因が重要となっているようである。考えられる可能性を挙げると；

1) cut-off parameter $\log\frac{L}{a}$ が渦糸に沿って変化する。Maxworthy[8]らは cutoff parameter が曲率 κ に依存することを指摘している。

2) 渦核内における軸方向流れの影響。上述の実験も含めて，実際的な流れでは回転流と同じ程度の軸方向流が渦核内に存在することが多い。

3) non local induction の影響。

4) 粘性の影響。

等があろう。以下では，2)の可能性に注目し，LIEに軸方向流れの効果を取り込んでゆく。閉じた渦糸を細いトーラスとみなすと，その内部，外部ともに2重連結な領域となっている。通常考える循環は外部領域における速度ポテンシャルの多価性に関連する量である。一方，内部領域における多価性は軸方向流れによってもたらされる。この意味でも，渦核内に軸方向流れの存在を許すことは自然な試みであろう。

2. 軸方向流れ

渦核内に渦度分布と軸方向流分布を持つような細い渦領域

の運動については，すでに様々な研究がなされている。例えば，Widnall ら[10]はMatching法により軸方向流れの影響を$O(\kappa\Gamma)$まで評価し，その効果がcutoff parameterの中に組み込めることを示した。すなわち，このオーダーまででは LIE に対する本質的な修正は現われない。Moore & Saffman[11]は渦核に働く力のつり合いを考えて，$O(\kappa^2 a\Gamma)$までの運動方程式を導いた。

$$\mathbb{X}_t\Big|_\xi = \frac{\Gamma\kappa}{4\pi}\mathbb{b}\left[\log\frac{L}{a} + \frac{\mu}{4} - 4\pi^2\left(\frac{a^2v^2}{\Gamma^2} + \frac{a^2w^2}{\Gamma^2}\right)\right] - \frac{2\pi a^2 w}{\Gamma}\mathbb{t}\times\mathbb{t}_t - \lambda w a^2\,\mathbb{t}\times(\kappa\mathbb{b})_s . \quad (4)$$

ただし，$\mathbb{t}$, $\mathbb{n}$, $\mathbb{b}$ はそれぞれ接線，法線，従法線ベクトルであり，wが軸方向流れを表わす。その他の定数は渦度分布，軸方向流分布に関係するものである。また，ξは渦糸のマーカー座標を示す。彼らの式は複雑で，このままでは扱いにくい。そこで，右辺第2項の $\mathbb{t}\times\mathbb{t}_t$ を $\mathbb{t}\times(\kappa\mathbb{b})_s$ で置き換え，時間スケールを変換し，さらにsを独立変数として用いることにすると，

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_t &= \kappa\mathbb{b} + W\left(\kappa_s\mathbb{n} + \kappa\tau\mathbb{b} + \frac{\kappa^2}{2}\mathbb{t}\right)\\ &= \mathbb{X}_s\times\mathbb{X}_{ss} + W\left(\mathbb{X}_{sss} + \frac{3}{2}|\mathbb{X}_{ss}|^2\mathbb{X}_s\right) \quad (5)\end{aligned}$$

と単純化される。多少，乱暴な操作を行っているように見えるかも知れないが，次節で示すとおり，Widnall ら[10]の用いたMatching法を高次まで進めることによって(5)式を系統的に

導くことができる。実際，(5)式はLIEの自然な拡張となっている。というのは，(5)式は可積分性というLIEの最も重要な性質を引きついでいるのである。

3. Matching

Widnallらの Matching法を $O(k^2 a \Gamma)$ まで進めることにより，(5)式を導出する。係数 ϖ は渦核内の渦度，軸方向流分布と結び付けられる。

◎座標系，無次元化

Widnallらに従い，渦糸に沿って局所toroidal座標系 (r, θ, s) を導入する。（彼女たちとは異なるnotationを用いる。Moore & Saffman, Callegari & Ting[2]も同様の座標を使っている。図1）

内部変数 r と外部変数 $\tilde{r}$ はそれぞれ渦核半径 a と代表的な曲率半径 R_0 によって規格化される。展開parameter $\varepsilon = a/R_0$ は1に比らべ充分に小さいと仮定する。速度 v，時間 t は $\Gamma/2\pi a$，$2\pi R_0^2/\Gamma$ によってそれぞれ無次元化される。

$$v = v^* \Big/ \left(\frac{\Gamma}{2\pi a}\right),$$
$$r = r^*/a,$$
$$\tilde{r} = r^*/R_0,$$
$$s = s^*/R_0,$$
$$t = t^* \Big/ \left(\frac{2\pi R_0^2}{\Gamma}\right),$$
$$p = p^* \Big/ \left(\frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2.$$

◎外部解

外部領域での流れは渦なしであり，外部解は渦糸による誘導流を計算することによって与えられる。

$$\boldsymbol{v} = \frac{\varepsilon}{2}\int \frac{d\tilde{s} \times (\tilde{x} - \tilde{X})}{|\tilde{x} - \tilde{X}|^3} - \frac{\varepsilon^2}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr\, w\right) \widetilde{\mathrm{grad}} \int \frac{d\tilde{s} \cdot (\tilde{x} - \tilde{X})}{|\tilde{x} - \tilde{X}|} . \qquad (6)$$

第1項は通常の Biot - Savart 積分であり，Localized Induction Approximation のもとに $O(\varepsilon^2)$ まででは，

$$\frac{e_\theta}{r} + \frac{\varepsilon\tilde{\kappa}}{2}\left[\log\left(\frac{1}{\varepsilon\tilde{\kappa}r}\right)\right]\boldsymbol{b} + \frac{\varepsilon\tilde{\kappa}}{2}\cos(\theta - \theta_0)\, e_\theta \qquad (7)$$

と評価される。第2項の積分は，渦糸に沿う2重湧き出し分布が誘起する流れを与えるもので，軸方向流れの効果を表わしている。渦糸を3次曲線で近似すると $O(\varepsilon^2)$ では，

$$-\frac{\varepsilon^2}{12\pi}\left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r\,dr\, w\right)(\kappa_s \boldsymbol{n} + \kappa\tau \boldsymbol{b}) \qquad (8)$$

と与えられる。Moore & Saffman[11] は渦糸を局所的に円弧で近似したため，この項を見落している。この項は(5)式で新たに加えられた補正項と同じ形ではあるが，上の係数をそのまま W とするわけにはいかない。W の決定のためには，これらの外部解に接続する内部解を求める必要がある。

◎ 内部解

内部領域での流れは連続式と Euler 方程式を満足する。(座標系が曲線座標であり，しかも慣性系ではないので具体的な表式は複雑である。Callegari & Ting[12] 参照。) まず，座標系の移動にともなう速度を分離する。

$$\boldsymbol{v} = \varepsilon \mathbb{X}_t + \mathbb{V}(r, \theta, s, t) , \qquad (9)$$
$$\mathbb{V} = u\,\boldsymbol{e}_r + v\,\boldsymbol{e}_\theta + w\,\boldsymbol{t} .$$

次に $\mathbb{X}_t$, $\mathbb{V}$ の ε 展開を導入する。

$$\mathbb{X}_t = \mathbb{X}_t^{(0)} + \varepsilon \mathbb{X}_t^{(1)} + \cdots ,$$
$$u = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \cdots , \qquad (10)$$
$$v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \cdots ,$$
$$w = w^{(0)} + \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \cdots .$$

ここで，$O(1)$での流れ $v^{(0)}$, $w^{(0)}$は軸対称性を持ち，定常で軸方向にも変化しないものとする。$r \to \infty$での接続条件(7)から，$v^{(0)} \sim \frac{1}{r}$ ，$w^{(0)} \sim 0$ が要求されるが，それ以外には任意の流れを初項として採用できる。(9)，(10) の展開を連続式とEuler 方程式に代入し，外部解(7)，(8)と接続するように $\mathbb{X}_t^{(i)}$, $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, $w^{(i)}$を決定してゆく。（$O(\varepsilon)$はWidnall[10]らによって求められている。）特に，$\cos\theta$，$\sin\theta$に比例する成分から渦糸の運動 $\mathbb{X}_t$ が定まる。$O(\varepsilon^2)$までの結果を次元を摂した形で書き下すと，

$$\mathbb{X}_t^{(0)} = A \kappa \mathbb{b} , \qquad (11)$$
$$\mathbb{X}_t^{(1)} = B \left(\frac{\kappa^2}{2} \boldsymbol{t} + \kappa_s \boldsymbol{n} + \kappa \tau \mathbb{b} \right) .$$

ただし，

$$A = \frac{\Gamma}{4\pi} \Big[\log\left(\frac{L}{a}\right) + \lim_{r\to\infty} \left(\frac{4\pi}{\Gamma^2} \int_0^r r v^{(0)2} dr - \log r \right) - \frac{8\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^\infty r w^{(0)2} dr \Big] ,$$

$$B = \frac{4\pi}{\Gamma}\left(\int_0^\infty r w^{(0)} dr\right) A + \frac{2\pi}{\Gamma}\int_0^\infty r^2 v^{(0)} w^{(0)} dr - \uwave{\frac{1}{6}\int_0^\infty r w^{(0)} dr} \tag{12}$$

となる。

時間スケールの変換ののちに，係数$\mathbb{W}$は，

$$\mathbb{W} = B/A$$

と与えられる。(8)の所で述べたように，Moore & Saffman[11]は外部解に対する軸方向流れの影響を考慮していないので，彼らの運動方程式(4)を簡略化した場合には(12)式の～～部の項は現われない。しかし，cut-off parameterに任意性が残っていることを思えば，この差はそれ程有意なものではないであろう。むしろ大事なことは，(5)式の形が系統的に導出できるという事実であり，しかも(5)式が可積分性を持つ方程式になっていることであろう。

図1．局所toroidal座標系

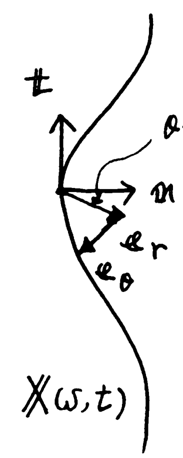
(r, θ, s)

$(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t})$

$\mathbf{e}_r = \mathbf{n}\cos(\theta-\theta_0) + \mathbf{b}\sin(\theta-\theta_0)$

$\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{n}\sin(\theta-\theta_0) + \mathbf{b}\cos(\theta-\theta_0)$

$\dfrac{\partial\theta_0}{\partial s} = \tau|\mathbf{X}_s|$



4. 可積分性

第2，3節で導出された(5)式は，Hasimotoによる変換(2)を通じてHirota方程式[13]に帰着されることがわかる。

$$i\psi_t + \psi_{ss} + \frac{1}{2}|\psi|^2\psi - iW\left(\psi_{sss} + \frac{3}{2}|\psi|^2\psi_s\right) = 0. \qquad (13)$$

Hirota方程式は$W \to 0$，$|W| \to \infty$の両極限でそれぞれNLSとmd-KdV方程式に一致するような可積分な方程式である。したがって，(5)式も可積分となる。模式的には，

$$\begin{array}{ccc} (5)\text{式} & \longleftrightarrow & \text{Hirota eq.} \\ \cup & \updownarrow (2)\text{式} & \cup \\ \text{LIE} & \longleftrightarrow & \text{NLS} \end{array}$$

という関係が成立している。このように，Localized Inductionの精神を高次まで進めても可積分性が失われないことは興味深い。(5)式には局所的な渦の伸縮が含まれていることも注目される。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial s}{\partial \xi}\right) = -W\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\kappa^2}{2}\right) \quad \text{or} \quad \frac{d}{dt}\left(\int_{\xi_1}^{\xi_2} ds\right) = -W\frac{\kappa^2}{2}\Big|_{\xi_1}^{\xi_2}.$$

ただし，閉じた渦輪，無限遠で直線になるような渦糸では，全体としての伸縮はないことになる。

Hirota方程式はAKNS形式によって線形化される[14]ので，Sym[4]によるSoliton Surface Theoryのわく組をそのまま適用することができる。

$$u(s,t) = \frac{1}{2}\psi(s,t), \quad \Phi : SU(2),$$

$$\Phi_s = \begin{bmatrix} -i\zeta & u \\ -u^* & i\zeta \end{bmatrix} \Phi ,$$

$$\Phi_t = \begin{bmatrix} i(|u|^2-2\zeta^2)+\overline{W}(4i\zeta^3-2i\zeta|u|^2-uu_s^*+u_su^*) & iu_s+2\zeta u+\overline{W}(-4\zeta^2u-2i\zeta u_s+2|u|^2u+u_{ss}) \\ iu_s^*-2\zeta u^*+\overline{W}(4\zeta^2u^*-2i\zeta u_s^*-2|u|^2u^*-u_{ss}^*) & -i(|u|^2-2\zeta^2)+\overline{W}(-4i\zeta^3+2i\zeta|u|^2+uu_s^*-u^*u_s) \end{bmatrix} \Phi . \qquad (15)$$

渦糸の運動は，Φを使って，

$$X(s,t) = -\frac{i}{2}\begin{bmatrix} z & x-iy \\ x+iy & z \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\Phi^{-1}\,\Phi_{,\zeta}\Big|_{\zeta=0} \qquad (16)$$

と与えられる。N-soliton解は，直線渦 $\psi=0$，$z=s$ に Darboux-Bäcklund 変換を施こすことによって求めることができる。幸い(?)にも，N-soliton解の表式はLIEのそれと全く同一であり分散関係だけが，

$$\eta_i = \lambda_i s + \Omega_i t, \quad \Omega_i = i\lambda_i^2 + \overline{W}\lambda_i^3 \qquad (17)$$

と修正される。

もちろん，(5)式を2次形式化することも容易である。

$$
\begin{aligned}
t_1 + i t_2 &= \frac{2 f^* g}{f f^* + g g^*}, \\
t_3 &= \frac{f f^* - g g^*}{f f^* + g g^*}, \\
\psi &= \frac{2 D_s\, g \cdot f}{f f^* + g g^*}, \qquad (18)\\
& D_s (f^* \cdot f + g^* \cdot g) = 0 , \\
& (i D_t + D_s^2 - i W D_s^3) f \cdot g^* = 0 , \\
& (i D_t - D_s^2 - i W D_s^3)(f^* \cdot f - g^* \cdot g) = 0 .
\end{aligned}
$$

ここで，D_s，D_t はHirotaによる2次形式演算子[13]である。やはり，N-soliton解の形はLIEの場合[6]と同一であることが確認できる。

5. 結び

以上，渦核内に軸方向流れをともなう渦糸の運動方程式(5)を導出し，この方程式が可積分であることを示した。ここでは，(5)式に基づいて軸方向流れの影響を具体的に調べてみよう。

Soliton解に関しては，前節の解析から以下の事実がわかる。

1) Soliton解の形状は軸方向流れの存在に全く影響されない。

2) 1-Soliton解の伝播速度は，分散関係(17)に従って修正される。

3) 軸方向流れは，Soliton衝突前後での位相変化には影響を与えない。

1)，2)の結果は，Maxworthyらの実験結果と定性的には合致するもので，定量的な比較を検討中である。位相変化に対する3)の結果によれば，渦核内の軸方向流れを考慮するだけでは実験を説明できないことになる。序節で挙げた別の要因，その他が本質的に現象を支配しているものと思われる。

最後に，軸方向流れを持つら線渦の安定性を考えよう。$\kappa=\kappa_0=$一定，$\tau=\tau_0=$一定のら線渦は(5)式の解となる。このら線渦に対して微小攪乱 $\kappa=\kappa_0+\varepsilon a\sin(ks-\omega t)$，$\tau=\tau_0+\varepsilon b\sin(ks-\omega t)$を与える。簡単な計算によって，攪乱は次の分散関係を満たすことがわかる。

$$\omega = 2\tau_0 k + W k\left(k^3 + 3\tau_0^2 - \frac{3}{2}\kappa_0^2\right) \pm |1+3\tau_0 W|\,|k|\sqrt{k^2-\kappa_0^2} \qquad (19)$$

上式の右辺第3項を見ると，$W=0$ の場合には，$|k|<\kappa_0$の攪乱に対してら線渦が不安定化することがわかる。(Betchov[15])

しかし，$W\neq 0$ のときには，$\tau_0=-\frac{1}{3W}$なる捩率を持つら線渦はすべての攪乱に対して中立安定となる。したがって，実際の流れ場の中でも，このような特別な捩率のら線渦が観察さ

れるものと期待される。定量的には確定できないが，Maxworthy[8]らの実験でも一連のら線渦が観察されている。

以上のように，LIEに軸方向流れの効果を加味した(5)式は実験事実のすべてを説明できるわけではないが，可積分性という際立った性質を持つとともに，渦運動に関する多くの知見をもたらすものと思われる。

参考文献

1) R. J. Arms and F. R. Hama : Phys. Fluids 8 (1965) 553.

2) H. Hasimoto : J. Fluid Mech. 51 (1972) 477.

3) S. Kida : J. Fluid Mech. 112 (1981) 397.

4) A. Sym : Lett. Nuovo Cimento 41 (1984) 353.

5) D. Levi, A. Sym and S. Wojciechowski : Phys. Lett. 94A (1983) 408.

6) Y. Fukumoto and T. Miyazaki : J. Phys. Soc. Jpn. 55 (1986) 4152.

7) E. J. Hopfinger, F. K. Browand and Y. Gagne : J. Fluid Mech. 125 (1982) 505.

8) T. Maxworthy, E. J. Hopfinger and L. G. Redekopp : J. Fluid Mech. 151 (1985) 141.

9) T. Maxworthy, M. Mory and E. J. Hopfinger : Proc. AGARD Conf. Aerodynamics of Vertical Type Flows in Three Dimensions;

AGARD CPP-342, 1983, paper 29.

10) S.E. Widnall, D. Bliss and A. Zalay: "Aircraft Wake Turbulence and its Detection" ed. J.H. Olsen et al., Plenum-Press, New York, (1971) 305.

11) D.W. Moore and P.G. Saffman: Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A272 (1972) 403.

12) A.J. Callegari and L. Ting: SIAM J. Appl. Math. 35 (1978) 148.

13) R. Hirota: J. Math. Phys. 14 (1973) 805.
R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 323.

14) L. Lamb, Jr.: "Elements of Soliton Theory" John Wiley and Sons, New York (1980) Chap. 7.

15) R. Betchov: J. Fluid Mech. 22 (1965) 471.