数理解析研究所講究録
第639巻 1988年 1-20



# $\bar{\partial}_b$-cohomology と Bochner-Martinelli 核

新潟大·教養　田島慎一 (Shinichi TAJIMA)

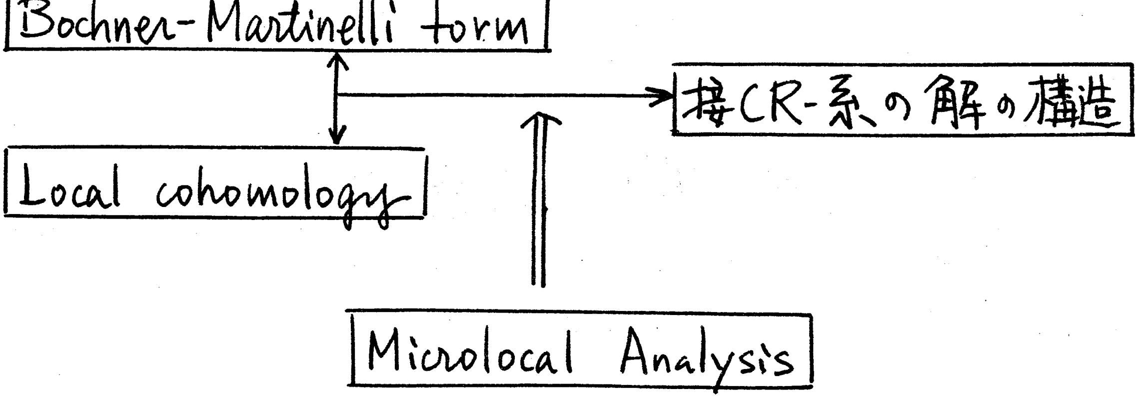
非退化な Levi form を持つ実超曲面上の接 Cauchy-Riemann 複体に対しては Poincaré の補題が成立しないことは良く知られています (Andreotti-Hill [1])。ここでは Levi form が退化する場合も含めた一般の場合にも、microfunctions を係数とした接 Cauchy-Riemann 複体に対して Poincaré の補題が成立しないことを示します。

証明の基本的アイデアは次の2つの点にあります。

イ) (一般化された) Bochner-Martinelli form を local cohomology の立場から捉える。

ロ) 「local cohomology」と「microfunctions 係数の接 Cauchy-Riemann 複体」との関係を利用する。

図式化すれば次の様になります。




得られた結果（定理４）を擬凸領域に適用すれば，擬凸領域における $\bar{\partial}$-Neumann 問題に対する Catlin[4], Diederich-Pflug[5] らの結果に類似した結果（系５）が得られることをあらかじめ注意しておきたいと思います。

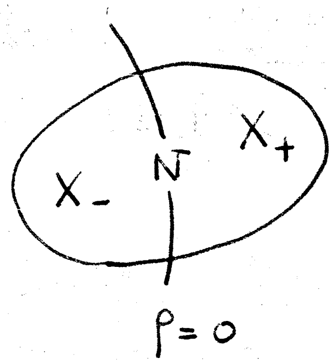
## §1. 問題の背景

この節では，擬凸境界面上の接 Cauchy-Riemann 系の場合に例をとって，我々の考えている問題を明らかにします。

$X \subset \mathbb{C}^n$ を領域とし，$\rho$ は $X$ 上定義された実数値実解析的な関数とします。

$$X_\pm = \{ z \in X \mid \rho(z, \bar{z}) \gtrless 0 \}$$

$$N = \{ z \in X \mid \rho(z, \bar{z}) = 0 \}$$




と定めます。 但し

$$\mathrm{grad}\,\rho\,|_N \neq 0$$

を仮定します。

$N$は実解析的多様体なので、$N$を複素化した複素多様体 $Y$ が自然に考えられるので、埋め込み $N \hookrightarrow Y$ に associate した spherical conormal bundle $S^*_N Y$ が構成されます。$S^*_N Y$ 上に定義される microfunctions のなす層を $C_N$ で表わします。

$N$上に induce された接Cauchy-Riemann系を考えれば、microfunctions を係数とする次の様な複体 $K$ が自然に定義されます。

$$K:\ 0 \longrightarrow C_N \xrightarrow{\bar{\partial}_b} C_N^{\binom{n-1}{1}} \xrightarrow{\bar{\partial}_b} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_b} C_N \longrightarrow 0$$

複体 $K$ に対する次の問題は基本的で、重要です。

<u>問題</u>　この複体 $K$ の cohomology sheaves の構造を決定せよ。

<u>注意</u>　超曲面 $N$ を実解析的多様体と見做し $N$ 上の実解析的関数の作る層 $\mathcal{A}_N$ を層 $\mathcal{C}_N$ のかわりにとれば $K$ と同様に複体

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_N \xrightarrow{\bar\partial_b} \mathcal{A}_N^{\binom{n-1}{1}} \xrightarrow{\bar\partial_b} \cdots\cdots \xrightarrow{\bar\partial_b} \mathcal{A}_N \longrightarrow 0$$

を考えることが出来ます。この $\mathcal{A}_N$ 係数の複体に対しては Poincaré の補題が成立し. しかも $\operatorname{Ker} \bar\partial_b$ は $X$ 上の正則函数の作る層 $\mathcal{O}_X$ を $N$ に制限して得られる層 $\mathcal{O}_X|N$ と一致することが知られています。従って microfunctions 係数の複体 $K$ の構造が分れば佐藤超函数の作る層 $\mathcal{B}_N$ を係数とした次の複体

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_N \xrightarrow{\bar\partial_b} \mathcal{B}_N^{\binom{n-1}{1}} \xrightarrow{\bar\partial_b} \cdots\cdots \xrightarrow{\bar\partial_b} \mathcal{B}_N \longrightarrow 0$$

の構造もわかります。

さて，超局所解析学における佐藤の基本定理により，次の結果を得ます。

<u>基本定理</u>　$S_N^*Y - S_N^*X$ 上で複体 $K$ は exact．

今の場合 $N \hookrightarrow X$ は実余次元が 1 ですから（$X_-$ に対する）単位外法線ベクトル全体の成す集合を $N_+$，単位内法線ベクトル全体の成す集合を $N_-$ とおけば

$$S_N^*X = N_+ \sqcup N_-$$

と直和分解されます。従って複体 $K$ の解析を行なう際には $N_+$ 及び $N_-$ で別々に超局所解析をすればよいことが分ります。

以後，複体 $K$ を $N_+$（の近傍）で考えたものを $K_{N_+}$ で表わし，$N_-$（の近傍）で考えたものを $K_{N_-}$ で表わすことにします。又，点 $p \in N$ に対応する $N_+$ 上の点を $p_+$ で表わし，点 $p \in N$ に対応する $N_-$ 上の点を $p_-$ で表わすことにします。

$N$ が領域 $X_-$ の強擬凸境界面であるときの複体 $K$ の構造は 佐藤－河合－柏原 [13] によって次の形で決定されています。

<u>例</u> $N$ は $X_-$ の強擬凸境界面とする。このとき

$$\begin{cases} \mathcal{H}^0(K_{N_+}) = \operatorname{Ker} \bar{\partial}_b|_{N_+} \neq 0 \\ \mathcal{H}^k(K_{N_+}) = 0 \qquad \text{for } k \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}^k(K_{N_-}) = 0 \qquad \text{for } k \neq n-1 \\ \mathcal{H}^{n-1}(K_{N_-}) \neq 0 \end{cases}$$

が成りたつ。更に $\mathcal{H}^0(K_{N_+})$ 及び $\mathcal{H}^{n-1}(K_{N_-})$ は flabby sheaf であることも知られている。

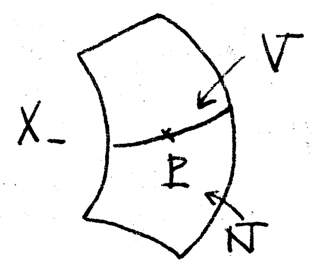
ところが、一般の弱擬凸境界面 $N$ に対しては

$$\begin{cases} \mathcal{H}^0(K_{N_+}) \neq 0 \\ \mathcal{H}^k(K_{N_+}) = 0 \qquad \text{for } k \neq 0 \end{cases}$$

は成立するのですが、$p \in N$ が弱擬凸境界点のとき $\mathcal{H}^k(K_{N_-})_{p_-}$ の構造は一般に複雑で<u>決定されておりません</u>。

例　領域 $X_-$ は弱擬凸で、$P\in N$ を通る complex hypersurface（の germ）$V$ で $N$ に含まれる様なものが存在すると仮定する。

このとき




$$\mathcal{H}^0(K_{N_-})_{P_-} \neq 0$$

が成りたつ。

境界面 $N$ が強擬凸でない場合でも、点 $P\in N$ におけるその「退化の程度」がわずかであれば、複体 $K_{N_-}$ の低次の cohomology group $\mathcal{H}^k(K_{N_-})_{P_-}$ 達は消滅すると予想されるので、次の大胆な conjecture も自然と思われます。

<u>Conjecture</u> (cf. Kohn [10], Bedford-Fornaess [3])

$N$ は $X_-$ の<u>実解析的</u>擬凸境界面とする。このとき次の幾何的条件(1)と解析的条件(2)とは同値である。

(1) 点 $P\in N$ を通る complex codimension $q$ の subvariety の germ で $N$ に含まれるものが存在

し、かつ、codimension が $q-1$ 以下で同じ条件を満たすものは存在しない。

(2) $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathfrak{I}_b, C_N)_{p_-} = \cdots = \mathcal{E}xt^{q-2}_{\mathcal{E}_Y}(\mathfrak{I}_b, C_N)_{p_-} = 0$

かつ

$$\mathcal{E}xt^{q-1}_{\mathcal{E}_Y}(\mathfrak{I}_b, C_N)_{p_-} \neq 0 .$$

但し、ここでは記号 $\mathcal{H}^0(K_{N-})_{p_-}$ の代りに $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathfrak{I}_b, C_N)_{p_-}$ 、$\mathcal{H}^k(K_{N-})_{p_-}$ の代りに $\mathcal{E}xt^k_{\mathcal{E}_Y}(\mathfrak{I}_b, C_N)_{p_-}$ なる記号を使っている。

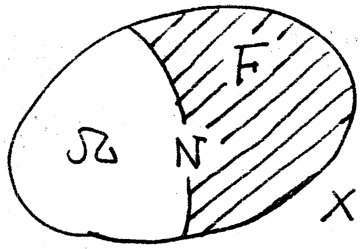
上記の conjecture を解くことが我々の当初の目的であった。

## §.2. Local cohomology に関する結果.

この節では local cohomology に対して得た結果を紹介します。§.1 とは記号を少し換えて以下の様に定めます。

$X \subset \mathbb{C}^n$ は領域とし、$\rho$ は $X$ 上定義された実数値連続関数とします。更に

$$\Omega = \{ z \in X \mid \rho(z, \bar{z}) < 0 \}$$
$$F = \{ z \in X \mid \rho(z, \bar{z}) \geqq 0 \}$$
$$N = \{ z \in X \mid \rho(z, \bar{z}) = 0 \}$$




と定めます。

$X$ 上の正則函数のなす層を $\mathcal{O}_X$ とし，$\mathcal{H}^k_F(\mathcal{O}_X)$ によって（$k=1,2,\cdots,n$）$F$ に台を持つ local cohomology を表わすことにします。

<u>注意</u>　$j$ を $\Omega \hookrightarrow X$ なる inclusion map とすれば

$$\begin{cases} j_* j^{-1}\mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X \cong \mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X) \\ R^k j_* j^{-1}\mathcal{O}_X \cong \mathcal{H}^{k+1}_F(\mathcal{O}_X) \end{cases}$$

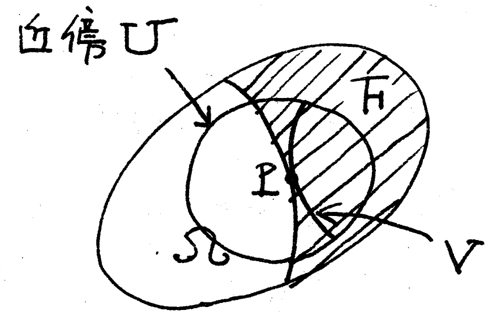
が $N$ 上成立します。特に $\mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X)$ は解析接続の obstructions を表わす層になっていることに注意します。（例えば [12] を御覧ください）

Local cohomology sheaves $\mathcal{H}^k_F(\mathcal{O}_X)$ の非消滅に関して次の定理が証明できました。

<u>定理1</u>　点 $P \in N$ のある近傍 $U \subset X$ 上で定義された codimension $q$ の complex variety $V$ で次の2つの条件を満たすものが存在すると仮定する。

(1) $V$ は complete intersection で点 $P$ を含む

(2) $V \subseteq F$




このとき、

$\mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X)_P$, $\mathcal{H}^2_F(\mathcal{O}_X)_P$, $\cdots$, $\mathcal{H}^q_F(\mathcal{O}_X)_P$ の何れか少くとも一つは<u>消滅しない</u>。

<u>系2</u>　定理1の条件の下で更に

$$\mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X)_P = \cdots = \mathcal{H}^{q-1}_F(\mathcal{O}_X) = 0$$

を仮定すれば

$\mathcal{H}^q_F(\mathcal{O}_X)_P \neq 0$ がなりたつ。

この系2は Andreotti-Norguet [2] にある結果の一般化になる。

点 $\{P\}$ 自体を余次元 $n$ の complex submanifold と見做せば，次の系を得る。

<u>系3</u>. $P \in N$ において

$$\mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X)_P, \mathcal{H}^2_F(\mathcal{O}_X)_P, \cdots \mathcal{H}^n_F(\mathcal{O}_X)_P$$

の全てが同時に零になることはない。

特に

$$\mathcal{H}^2_F(\mathcal{O}_X)_P = \cdots = \mathcal{H}^n_F(\mathcal{O}_X)_P = 0 \quad \text{ならば}$$

$\mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X)_P \neq 0$ を得る．

この系3の前半の主張は Kashiwara-Schapira [9] の（$\mathcal{O}_X$ に対する）microsupport の議論からも得られる。又後半の主張は Hörmander [7] の定理4.2.9 —— これは $\mathbb{C}^n$ 内の擬凸領域が正則領域であることの証明において重要な Step の一つであった —— を local cohomology を使って表現したものと一致している。

定理1の証明は Bochner-Martinelli form を使って初等的にできる。§4 において codimension $q=2$ の場合の証明を与える。

## §3　接 Cauchy-Riemann 系への応用

この節では、境界面 $N$ は実解析的と仮定する。$N$ を複素化して得られる複素多様体を $Y$ とおく。$S_N^*Y$ 上に定義される microfunctions の sheaf を $C_N$ で表わし、擬微分作用素のなす環の sheaf を $\mathcal{E}_Y$ で表わす。

$N$ 上の接 Cauchy-Riemann 系を自然に $\mathcal{E}_Y$-Module と見做し、$\bar{\partial}_b$ で表わすことにする。このとき、方程式系 $\bar{\partial}_b$ の microfunction 解全体は $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\bar{\partial}_b, C_N)$ であり、高次の microfunction 解は $\mathcal{E}xt^k_{\mathcal{E}_Y}(\bar{\partial}_b, C_N)$ にほかならない。

これらの microfunction 解と local cohomology に関する次の同型定理は基本的である。([8], [12], [16])

$$\begin{cases} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{J}_b, C_N)|_{N_+} \cong \mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X)|_N \\ \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{J}_b, C_N)|_{N_+} \cong \mathcal{H}^{k+1}_F(\mathcal{O}_X)|_N \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \cdots, n-1$$

この同型定理を使えば定理1の応用として次の結果が直ちに得られる。

<u>定理4</u>　点 $P \in N$ を通る complex codimension $q$ の complex subvariety の germ $V$ で次の条件を充たすものがあるとする。

(1) $V$ は $P$ のある近傍 $U$ 上定義され、complete intersection である。

(2) $(V \cap U) \cap \Omega = \phi$　すなわち　$V \cap U \subseteqq F$。

今、点 $P$ における単位外法線ベクトルを $P_+ \in N_+$ で表わせば次が成りたつ。

$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{J}_b, C_N)_{P_+}$, $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{J}_b, C_N)_{P_+}$, ……, $\mathcal{E}xt^{q-1}_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{J}_b, C_N)_{P_+}$ の少くとも一つは<u>消滅しない</u>。

系5　定理の条件の下で、更に

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{J}_b, \mathcal{C}_N)_{P_+} = \cdots = \mathcal{E}xt^{g-2}_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{J}_b, \mathcal{C}_N)_{P_+} = 0$$

を仮定すれば $\mathcal{E}xt^{g-1}_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{J}_b, \mathcal{C}_N)_{P_+} \neq 0$ が成り立つ。

この系5は Catlin [4], Diederich-Pflug[5] の結果と対応する。

## §4. Bochner-Martinelli form と Local cohomology

$V$を複素多様体$X$の complex codimension $g$ の submanifold（の germ）とするとき、$V$に台を持つ delta-function を $\mathcal{H}^g_V(\mathcal{O}_X)$ の元と考えて $\delta(V)$ で表わします。Dolbeault 同型で（$V$の補集合上で定義される）$\delta(V)$ に対応する form が Bochner-Martinelli form になることは知られています。

従って Andreotti-Norguet [2] が local cohomology の non-vanishing を示すのに Bochner-Martinelli form を使ったのは極めて自然な idea と考えられます。

しかし、Andreotti-Norguet らの与えた議論は零にならない Levi form の固有値を利用したものですから我々の目的の為には不十分と思われます。

そこで、この節では、Bochner-Martinelli form を local cohomology の元として正しく捉えることに依り定理1が証明出来ることを示します。記号等が煩雑になるのをさける為、ここでは余次元が2の場合に限定して証明を与えます。

準備（Bochner-Martinelli form の基本的性質）

点 $P$ の近傍 $U$ 上定義された正則函数 $t_1, t_2$ により $V=\{z\in U \mid t_1(z)=t_2(z)=0\}$ と与えられるとしてよい。

$$U_1=\{z\in U \mid t_1(z)\neq 0\},\quad U_2=\{z\in U \mid t_2(z)\neq 0\}$$

$$b_1=\frac{\overline{t_2}}{t_1(t_1\overline{t_1}+t_2\overline{t_2})},\quad b_2=\frac{-\overline{t_1}}{t_2(t_1\overline{t_1}+t_2\overline{t_2})}$$

とおく。

$$b_1-b_2=\frac{1}{t_1t_2}\ (=b\text{ とおく})$$ が $U_1\cap U_2$ において成り立つ。

$$B = \frac{\bar{t}_1 d\bar{t}_2 - \bar{t}_2 d\bar{t}_1}{(t_1\bar{t}_1 + t_2\bar{t}_2)^2} \quad \text{とおくとき}$$

$$\bar{\partial}(t_1 \theta_1) = t_1 B, \quad \bar{\partial}(t_2 \theta_2) = t_2 B$$

が $U - V$ において成り立つ。　準備終り。

<u>定理1の証明</u>（余次元 $q = 2$ の場合）

$\mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X)_p = \mathcal{H}^2_F(\mathcal{O}_X)_p = 0$ を仮定して矛盾を導く。$j : \Omega \hookrightarrow X$ を自然な inclusion とするとき

$$(R^0 j_* j^{-1}\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X)_p \cong \mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X)_p$$

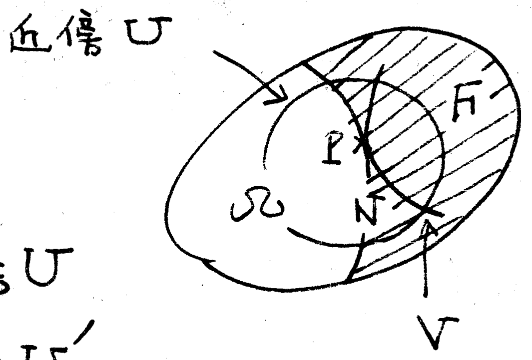
$$(R^1 j_* j^{-1}\mathcal{O}_X)_p \cong \mathcal{H}^2_F(\mathcal{O}_X)_p \quad \text{がなりた）}$$

から

$$(j_* j^{-1}\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X)_p = (R^1 j_* j^{-1}\mathcal{O}_X)_p = 0$$

を仮定したことになる。

さて、$B$ は $U - V$ 上定義された 1-form なので、特に $B$ を $\Omega \cap U$ に制限して、その上の closed 1-form と考えられる。




$$(R^1 j_* j^{-1}\mathcal{O}_X)_P = 0$$

なる仮定より、Pの近傍U を小さく取り直した近傍U' 上で考えれば

$$B = \bar{\partial}\beta$$ をみたす $\Omega\cap U'$ 上の hyperfunction

$\beta$ が存在する。そこで

$$h_1 = t_1 b_1 - t_1\beta, \quad h_2 = t_2 b_2 - t_2\beta$$

とおく。$h_1, h_2$ は共に $\Omega\cap U'$ 上定義された関数であるが

$$\bar{\partial}h_1 = t_1 B - t_1 B = 0, \quad \bar{\partial}h_2 = t_2 B - t_2 B = 0$$

を $\Omega\cap U'$ 上満たしている。もう一つの仮定

$$(j_* j^{-1}\mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X)_P = 0$$

より、点 P の充分小さい近傍を考えれば、関数 $h_1, h_2$ はともにそこへ正則函数として拡張出来ることがわかる。

$h_1, h_2$ を解析接続して得られる函数を再び $h_1, h_2$ で表わすことにする。

さて

$$
\begin{aligned}
t_2 h_1 - t_1 h_2 &= t_2(t_1 g_1 - t_1 \beta) - t_1(t_2 g_2 - t_2 \beta) \\
&= t_1 t_2 (g_1 - g_2) = t_1 t_2 g \\
&= t_1 t_2 \frac{1}{t_1 t_2} = 1
\end{aligned}
$$

が $\Omega \cap U'$ で成りたつが、点 $P \in V$ における左辺の値を考えれば、これは明らかに矛盾である。従って定理が余次元 2 の場合に証明された。

一般の余次元の場合も本質的には同じ様に証明することが出来る。

以上。

References

[1] Andreotti, A. and Hill, C.D.: E.E. Levi convexity and the Hans Lewy problem, I and II. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 26 (1972), pp. 325 - 363 and pp. 747 - 806

[2] Andreotti, A. and Norguet, F.: Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 20 (1966), pp. 197 - 241

[3] Bedford, E. and Fornaess, J.E.: Local extension of CR-functions from weakly pseudoconvex boundaries. Michigan Math. J., 25 (1978), pp. 259 - 262

[4] Catlin, D.: Necessary conditions for subellipticity and hypoellipticity for the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains. Annals of Math. Studies 100 (1981), pp. 93 - 100

[5] Diederich, K. and Pflug, P.: Necessary conditions for hypoellipticity of the $\bar{\partial}$-problem. Annals of Math. Studies 100 (1981), pp. 151 - 154

[6] Eastwood, M.G. and Suria, G.V.: Cohomologically complete and pseudoconvex domains. Comment. Math. Helvetici, 55 (1980) pp. 413 - 426

[7] Hörmander, L.: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. D. van Nostrand 1966

[8] Kashiwara, M. and Kawai, T.: On the boundary value problem for elliptic system of linear differential equations I. Proc. Japan Acad. 48 (1972), pp. 712 - 715

[9] Kashiwara, M. and Schapira, P.: Microlocal Study of Sheaves. Astérisque, 128 (1985)

[10] Kohn, J.J.: Subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains: sufficient conditions. Acta Math. 142 (1979), pp. 79 - 122

[11] Morimoto, M.: Sur les ultradistributions cohomologiques. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 19 (1969), pp. 129 - 153

[12] Pallu de la Barrière, P.: Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielle. J. Math. Pures et Appl., 55 (1976), pp. 21 - 46

[13] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M.: Microfunctions and pseudo-differential equations. Springer Lecture Notes in Math., 287 (1973), pp. 265 - 529

[14] Scheja, G.: Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen. Math. Annalen, 144 (1961), pp. 345 - 360

[15] Sorani, G.: Sulla rappresentazione delle funzioni olomorfe. Lincei Rend. Sc. fis. mat. e nat., 39 (1965), pp. 161 - 166

[16] Tajima, S.: Analyse microlocale sur les variétés de Cauchy-Riemann et problème du prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Pub. RIMS. Kyoto Univ. 18 (1982), pp. 911 - 945

[17] ———— : $\bar{\partial}_b$-cohomology and the Bochner-Martinelli kernel. submitted to Prospect in Algebraic Analysis, Academic Press

[18] Tong, Y.L.L.: Integral representation formulae and Grothedieck residue symbol. Amer. J. Math., 95 (1973), pp. 904 - 917