数理解析研究所講究録
第639巻 1988年 21-38

複素多様体上での複素Monge-Ampère方程式に対するDirichlet問題

東工大 理　鈴木 誠　(Makoto Suzuki)

Mを連結パラコンパクトなn次元複素多様体とし、Ωをその相対コンパクトな開集合とする。M上、$d=\partial+\bar{\partial}$, $d^c=i(\bar{\partial}-\partial)$と表す。Ω上の局所有界な多重劣調和関数uに対し、Bedford-Taylor [2] の方法に従って、

$$(dd^c u)^k := \underbrace{(dd^c u)\wedge\cdots\wedge(dd^c u)}_{k\text{回}} \qquad (k\leq n)$$

が、(k, k)-型正カレントとして定義できる。よって$(dd^c u)^n$は、Ω上の、Radon測度を係数に持つ(n, n)-型微分型式とみなすことができる。

次の非線型Dirichlet 問題を考える：Ω上の非負値関数f及び、∂Ω上の実数値関数φに対し、

$$(\mathrm{M})\quad \begin{cases} (dd^c u)^n = f\,dV & \text{on } \Omega \\ u = \phi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

をみたす多重劣調和関数uをみつけよ。但し、dVは、M上に

あらかじめ与えられたエルミート計量から得られる体積要素を表すものとする。

Bedford - Taylor [2] は、$M=\mathbb{C}^n$, Ωをその相対コンパクトなC^2級の境界を持った強擬凸領域とするとき、$\overline{\Omega}$(ΩのMにおける閉包)上の連続関数f、及び$\partial\Omega$(Ωの境界)上の連続関数ϕに対し、Dirichlet 問題(M)を解き、その解が$\overline{\Omega}$で連続になることを示した。彼らは、本質的には、各多重劣調和関数uに、$\left(\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$なるRadon測度を対応させる作用素$\Phi$を定義し、それに対するPerron - Bremermann の方法によって解いたが、実は、局所有界な多重劣調和関数の単調列に対する作用素$u \longmapsto (dd^c u)^n$の連続性(測度空間における弱収束性)から、Φを媒介せずに少しよい結果が得られる。さらにこの結果を用いて、複素多様体上の相対コンパクトな強擬凸領域に対して Dirichlet 問題(M)をf及びϕにある条件をつけて解けることを示す。

以下 §.1 では、Monge-Ampère 作用素$u \longmapsto (dd^c u)^n$の基本的な性質を述べ、§.2 でそれを用いてまず$\mathbb{C}^n$内の単位球$B^n=\{z\in\mathbb{C}^n : \|z\|<1\}$上で、(M)を解く。§.3では、§.2. の結果を用いて連結パラコンパクトな複素多様体上で(M)を考察する。以下の節を通じて、Mは、連結パラコンパクトなn次元複素多様体とする。

§1 複素 Monge-Ampère 作用素 $u \mapsto (dd^c u)^n$ の基本的性質

この節では、複素 Monge-Ampère 作用素についての重要な性質を後に使われる形でまとめておく。

複素 Monge-Ampère 作用素 $u \mapsto (dd^c u)^n$ は、連続な多重劣調和関数の中では一様収束位相に関して連続に働く(Bedford.Taylor[2])が局所有界多重劣調和関数の中では、うまくいかない。しかし、単調な関数列に関しては連続に作用する:

定理 I·1 (Bedford, Taylor [4], 福島[8])

複素多様体Mが、その上に大域的に定義された連続な強多重劣調和関数を持つと仮定する。ΩをM内の開集合とする。$\{u_j\}$ を局所有界な多重劣調和関数の単調減少あるいは単調増加な列で、Ω上ほとんどいたるところで、ある局所有界な多重劣調和関数 u に収束しているものとする。このとき $(dd^c u_j)^n$ は $(dd^c u)^n$ にΩ上で弱収束する。

証明は、Mに対する条件から、$\mathbb{C}^n$ の場合と同様にしてできる。さらに次の性質は、重要:

定理 1·2 (Bedford, Taylor [2])

M, Ωは定理1·1と同じとする。Ω上の局所有界な多重劣調和関数 u, v に関して、次が成立する:

(1) $(dd^c[\max(u,v)])^n \geqq \max((dd^c u)^n, (dd^c v)^n)$

(2) $(dd^c(u+v))^n \geqq (dd^c u)^n + (dd^c v)^n$

u, vが連続な場合の結果から、単調減少する近似列を通して得られる。これらを用いて次の比較定理を得る。

定理1·3（Bedford, Taylor [2],[4]; Cegrell [6], 福島 [8]）

M, Ωは定理1·1のとおりとする。Ω上の有界な多重劣調和関数u, vが、各点$\zeta \in \partial\Omega$に対し

$$\liminf_{\Omega \ni z \to \zeta} (u(z) - v(z)) \geqq 0$$

かつ、Ω上で$(dd^c u)^n \leqq (dd^c v)^n$をみたすならば、$\Omega$上で$u \geqq v$。

さらに次の比較定理も重要である：

定理1·4（福島 [8]）

Ωを$\mathbb{C}^n$内の開集合、Ω'をΩ内の相対コンパクトな開集合とする。Ω上の有界多重劣調和関数u, vが$\partial\Omega'$上で$u \geqq v$, Ω'上で$(dd^c u)^n \leqq (dd^c v)^n$をみたすならば$\Omega'$上で$u \geqq v$。

§.2. B^nに対する解

さて、複素Monge-Ampère方程式(M)を解くために、以下ではPerron-Bremermannの方法（例えばBremermann [5]）を用いる。Bedford. Taylorは上包関数（upper envelope）の連続性を保証するために作用素Φを用いざるを得なかったが、定理1·1のおかげでその必要はなくなる。次のPerron族を定義する。Mをn次元複素多様体でその上に大域的に定義された連続な強多重

劣調和関数が少くとも1つ存在するものと仮定する(以下、特にことわらない限りMはこの条件をみたすものと仮定する)。

MのHermite計量から得られる体積要素をdVとし、ΩをM内の開集合とする。$\partial\Omega$上の実数値($\pm\infty$も含めて)関数ϕ, Ω上の非負値局所可積分関数fに対し、

$$\mathcal{L}(\phi, f) := \{ v \in P(\Omega) \cap L^{\infty}_{loc}(\Omega) : \limsup_{\Omega \ni z \to \zeta} v(z) \leq \phi(\zeta) \quad \text{for } {}^{\forall}\zeta \in \partial\Omega, \\ \text{かつ} \ (dd^c v)^n \geq f\, dV \ \text{on } \Omega \}$$

と定義する。但し、$P(\Omega)$は、Ω上の多重劣調和関数の集合，$L^{\infty}_{loc}(\Omega)$は、Ω上の局所有界可積分関数全体の集合とする。Ωをバリヤーの存在するような領域とし、ϕ及びfに条件をつけると次の基本的な命題が得られる(Bedford, Taylor [2], Theorem 6.2と比較せよ)。

定理2.1

ΩはM内の相対コンパクトな強擬凸領域とする。$\partial\Omega$上の連続関数ϕ及びΩ上の非負値有界可測関数fに対し、Ω上で．

$$u(z) := \sup\{ v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f)\}$$

とおくと、各$\zeta \in \partial\Omega$に対し、

$$\lim_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) = \phi(\zeta).$$

で $u \in \mathcal{L}(\phi, f)$ である．

(証明) M上の連続な強多重劣調和関数rに対し、適当な実数$C_1>0$, $C_2>0$をとれば、ϕ及びfの有界性から、$C_1 r - C_2$

は、$\mathcal{L}(\phi, f)$に属するようにできることに注意する。まず$\varepsilon>0$をとり固定すると各$\zeta\in\partial\Omega$に対し、ある多重劣調和関数$v_\zeta\in\mathcal{L}(\phi, f)\cap C(\bar{\Omega})$で

$$v_\zeta(\zeta)=\phi(\zeta)-\varepsilon/2$$

をみたすものがとれる。なぜなら、まずζにおけるΩの局所定義関数ρをとる。即ちρは、ζの適当な近傍N（Mのζにおける1つの局所座標近傍に含まれるようにとっておく。）上のC^2級強多重劣調和関数で、

$$\Omega\cap N=\{z\in N:\rho(z)<0\},\quad \partial\Omega\cap N\subset\{z\in N:\rho(z)=0\}$$

をみたす。そこでζの近傍$N_1\subset\subset N$をとると、ある正数$\delta>0$を十分小さくとれば、$\forall z\in N_1$と$\forall w\in\mathbb{C}^n$に対し、

$$\sum_{j,k}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(z)\,w_j\bar{w}_k\geqq\delta|w|^2$$

をみたすようにできる。$\delta'\in\mathbb{R}$を$\delta>\delta'>0$とする。さらにζの近傍$N_2\subset\subset N_1$をとり、適当な正数$C_3>0$をとれば$\forall z\in N_1\setminus N_2$に対し

$$\inf_{z\in N_1\setminus N_2}\{C_1r(z)-C_2\}>C_3(\rho(z)-\delta'|z-\zeta|^2)+\phi(\zeta)-\varepsilon/2$$

でかつ、N_1上

$$(dd^c[C_3(\rho(z)-\delta'|z-\zeta|^2)])^n\geqq f\,dV$$

なるようにできる。そこで、

$$v_\zeta(z)=\begin{cases}\max\{C_1r(z)-C_2,\ C_3(\rho(z)-\delta'|z-\zeta|^2)+\phi(\zeta)-\varepsilon/2\} & z\in N_1\\ C_1r(z)-C_2 & z\in M\setminus N_1\end{cases}$$

とおくと定理1.2より、$v_\zeta\in\mathcal{L}(\phi, f)\cap C(\bar{\Omega})$でかつ、

$$v_\zeta(\zeta) = \phi(\zeta) - \varepsilon/2.$$

をみたす。ϕ 及び v_ζ の連続性より、各 ζ のある近傍では、$\phi - \varepsilon < v_\zeta$ が成立する。$\partial\Omega$ はコンパクトだから、上記の v_ζ の有限個をとって $z \in \bar{\Omega}$ に対し

$$v_\varepsilon(z) := \sup\{v_\zeta(z)\}$$

とおくと、$v_\varepsilon \in \mathcal{L}(\phi, f) \cap C(\bar{\Omega})$ で $\partial\Omega$ 上 $\phi - \varepsilon < v_\varepsilon$. だから、

$$\phi(\zeta) - \varepsilon < \limsup_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) \qquad {}^\forall\zeta \in \partial\Omega.$$

逆の不等式を得るためには、各 $\zeta \in \partial\Omega$ に対し、$\bar{\Omega}$ 上の連続な多重優調和関数 w_ζ で、$\partial\Omega$ 上では $w_\zeta \geqq \phi$ で、

$$w_\zeta(\zeta) = \phi(\zeta) + \varepsilon/2$$

なるものを作る。w_ζ と ϕ の連続性及び $\partial\Omega$ のコンパクト性より、$z \in \bar{\Omega}$ に対し

$$w_\varepsilon(z) := \inf\{w_\zeta(z)\}$$

とおくと $w_\varepsilon \in C(\bar{\Omega}) \cap P(\Omega)$ で $\partial\Omega$ 上では

$$\phi(\zeta) \leqq w_\varepsilon(\zeta) < \phi(\zeta) + \varepsilon$$

をみたす。従って最大値の原理より、${}^\forall v \in \mathcal{L}(\phi, f)$ に対し Ω 上で $v \leqq w_\varepsilon$。よって各 $\zeta \in \partial\Omega$ に対し、

$$\limsup_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) < \phi(\zeta) + \varepsilon$$

となり、

$$\lim_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) = \phi(\zeta) \qquad \zeta \in \partial\Omega$$

を得る。

さて、上記のことより $u^* \in P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ がわかる。一方、G. Choquet の補題[10]、あるいは、Vitali の被覆定理より、Ω 上の単調増加列で、Ω のほとんどいたるところで u^* に収束するような $\mathcal{L}(\phi, f)$ の元からなる列 $\{u_j\}$ がとれる。従って $(dd^c)^n$ の連続性定理1.1 より

$$f dV \leq \lim (dd^c u_j)^n = (dd^c u^*)^n \text{。}$$

よって $u^* \in \mathcal{L}(\phi, f)$ となり、$u^* \leq u$。従って $u \in \mathcal{L}(\phi, f)$.

[証明終わり]

さて、上包関数 u の regularity を示すには、J.B. Walsh の方法[11]が有効である。これを用いて Bedford, Taylor は、次のことを示した。記号を簡略にするため、次の記法を用いる。非負整数 k と、$0 < \alpha \leq 1$ に対し一様 Hölder 空間 $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$ を $\mathrm{Lip}^{k+\alpha}(\bar\Omega)$ で表す。$\mathrm{Lip}^0(\bar\Omega) = C(\bar\Omega)$ とする。

定理 2.2 (Bedford. Taylor [2], Theorem 6.2).

定理2.1 と同じ記号を用いる。$M = \mathbb{C}^n$, $0 < \alpha \leq 1$ に対し、$\phi \in \mathrm{Lip}^{2\alpha}(\partial\Omega)$, $f \in \mathrm{Lip}^\alpha(\bar\Omega)$ ならば上包関数 u は、$u \in \mathrm{Lip}^\alpha(\bar\Omega)$。

定理2.2 の証明も Φ を用いずにできる(評価に用いる系数を少し変えればよい)。さらに M が定理2.1 の仮定をみたす単連結な多様体のときには、$\bar\Omega$ の単連結な Stein 近傍が存在して、その上の正則接バンドルは、正則的に trivial である。従って、

この場合には浅場［1］の方法により上包関数の連続性を示すことができる（金子［9］も参照）。

B^nに対するDirichlet問題を解こう。以下の定理においても、作用素Φに関する評価を全く使わずに$\mathcal{L}(\phi, f)$の範囲を$(dd^c)^n$で処理できる。Φに対する証明の中の係数を注意して、変更すればよい。B^n上の解析的自己同型群が推移的であることを用いて次のことがわかる。

定理 2.3（Bedford. Taylor［2］Theorem. 6.7）

$\Omega = B^n$（$\mathbb{C}^n$内の単位球）とする。$\phi \in C^2(\partial B^n)$, $f \in C^2(\overline{B^n})$, $f \geqq 0$とする。$z \in B^n$に対し、

$$u := \sup\{v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f)\}$$

とおくと、uは局所有界2階偏導関数を持つ。

そこで、$(dd^c u)^n = f dV$を　　示せば（Bedford-Taylor［2］. Theorem 8.1も、Φに関することは使わない）次の結果が得られたことになる。なお．Bedford, Taylor［2］のTheorem 8.1におけるfについての仮定$f^{\frac{1}{n}} \in C^2(\overline{B^n})$は、（$\Phi$を用いなかったおかげで）不要になる。

定理 2·3

$\Omega = B^n$とする。$\phi \in C^2(\partial B^n)$, $f \in C^2(\overline{B^n})$, $f \geqq 0$に対し、

$$u(z) := \sup\{v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f)\} \quad z \in B^n$$

は、次の Dirichlet 問題：

$$u \in P(B^n) \cap C(\bar{B}^n).$$

$$\lim_{z \to \zeta} u(z) = \phi(\zeta) \qquad {}^\forall \zeta \in \partial B^n$$

$$(dd^c u)^n = f dV \quad \text{on } B^n$$

の一意な解でしかも u は、局所有界2階偏導関数を持つ。

一意性は定理 1.3 より従う。退化する場合を含んだ解の正則性についての結果が得られたわけである。

§3. M上での解の存在

この節では、まず、B^n上で、境界データ ϕ および Monge－Ampère データ f の regularity を弱めても、それに対する Dirichlet 問題の解の存在が保証されるかということについて述べよう。比較定理 1.3 より、データの単調列に対して得られる解の列の単調性が保証される。従って与えられたデータ関数に単調収束する関数列を作り、それから得られる解の列の極限が、もとのデータに対する解であることを $(dd^c)^n$ の連続性定理に照らして検証すればよい。この方法によりまず次の結果を得る：

定理3.1 (Bedford - Taylor [2], Theorem 8.2)

$\Omega = B^n$ とする。$\phi \in C(\partial B^n)$, $f \in C(\overline{B^n})$, $f \geqq 0$ とし、

$$u := \sup\{ v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f)\} \qquad z \in B^n$$

とおくと、u は $\overline{B^n}$ まで連続に拡張できて(それを同じく u で表そう), 次の Dirichlet 問題の解を与える:

$$u \in P(B^n) \cap C(\overline{B^n})$$

$$(dd^c u)^n = f dV \qquad \text{on } B^n$$

$$u = \phi \qquad \text{on } \partial B^n$$

さらに、同じ方法を用いて、次の結果を得る.

定理3.2 (Cegrell [6], Lemma 2).

$\Omega = B^n$, $\phi \in C(\partial B^n)$, $f \in L^\infty(B^n)$, $f \geqq 0$ とする。このとき、

$$u := \sup\{ v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f)\} \qquad z \in B^n$$

は、次の Dirichlet 問題の一意な解である:

$$u \in P(B^n) \cap L^\infty(B^n)$$

$$(dd^c u)^n = f dV \qquad \text{on } B^n$$

$$\lim_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) = \phi(\zeta) \qquad \zeta \in \partial B^n。$$

さて、考える領域を、複素多様体上に拡げよう。定理3.2 は、Ω が $\mathbb{C}^n$ 内の強擬凸領域の場合にも成立する (Cegrell [6], Lemma.2）。これは、局所有界な多重劣調和関数のMonge-Ampère測度が局所的に改変できることによる（福島[ ]）。そこで、与えられたMonge-Ampèreデータを達成する関数の存在を示す。Ω上の局所可積分関数fに対し、

$$\Omega_f := \{z\in\Omega : z\text{のある近傍}N\text{上では } f|_N\in L^\infty(N)\}$$

とおく。Ω_fは開集合である。またΩ上の関数uに対し、

$$u^*(z) := \limsup_{\Omega\ni x\to z} u(x) \qquad z\in\Omega \qquad (u\text{の upper regularization})$$

とおく。次の定理は、福島[8]による。

定理3.3

複素多様体M（dim M = n）の開部分集合をΩとし、MのHermite計量から得られる体積要素dVを定めておく。このとき、Ω上の正値局所可積分関数f, $\partial\Omega$上の実数値関数（$\pm\infty$の値も許す）ϕに対し、$\mathcal{L}(\phi,f)\neq\phi$で、

$$u := \sup\{v(z) : v\in\mathcal{L}(\phi,f)\}$$

が局所的に上に有界ならば、$\Omega_u\cap\Omega_f$上で、

$$(dd^c u^*)^n = f\,dV.$$

（証明）

まず、次のことを証明する。

定理3.3の条件のもとで、$^\forall v\in\mathcal{L}(\phi,f)$及び$^\forall z\in\Omega_f$に対し、あるzの近傍$N\subset\Omega_f$と、$\Omega$上の多重劣調和関数$\tilde{v}$で次の条件をみたすものが存在する：

i) Ω 上で $\tilde{v} \geqq v$

ii) $\Omega \setminus N$ で $\tilde{v} = v$

iii) N 上で $(dd^c\tilde{v})^n = fdV$ 。

z における局所座標近傍内に z を中心とした、n 次元超球に両正則同値な近傍 B, N を $\Omega_f \supset B \supset\supset N$ なるようにとる。B 上で v に単調減少して収束するような、B 上の多重劣調和関数の列 $\{v_k\}$ を取る。定理 3.2 より、各 v_k に対し、N 上の有界多重劣調和関数 w_k で N 上では、

$$(dd^c w_k)^n = fdV$$

かつ、$\forall \zeta \in \partial N$ に対し、

$$\lim_{B \ni z \to \zeta} w_k(z) = v_k(\zeta)$$

となるものが存在する。比較定理 1.3 より、$\{w_k\}$ は $\bar{N}$ 上の単調減少列で、各 k について、N 上で $w_k \geqq v$ をみたす。そこで

$$w(z) := \lim_{k \to \infty} w_k(z) \qquad z \in N$$

とおくと、w は N 上の有界多重劣調和関数である。そこで、

$$\tilde{v}(z) := \begin{cases} w(z) & z \in N \\ v(z) & z \in \Omega \setminus N \end{cases}$$

とおくと、$\tilde{v}$ は、Ω 上の局所有界多重劣調和関数になる。連続性定理より、N 上では、

$$(dd^c\tilde{v})^n = \lim_{k \to \infty} (dd^c w_k)^n = fdV$$

だから、Ω上で

$$(dd^c\tilde{v})^n \geqq f\,dV$$

境界値はvと変わりないから、$\tilde{v} \in \mathcal{L}(\phi, f)$ を得る。

さて、$\Omega_u \cap \Omega_f$ 上で

$$(dd^c u^*)^n = f\,dV$$

なることを示そう。G. Choquet の補題（Lelong [10]）より、Ω上の単調増加列で、u^*にほとんどいたるところで収束するような、$\mathcal{L}(\phi, f)$ の元からなる列 $\{u_j\}$がとれる。結論は、局所的に、各$z \in \Omega_u \cap \Omega_f$ の近傍で示せばよい。N をΩ_uに入るようにとり、各u_jについてN上で局所改変（上記の主張）したものを$\tilde{u}_j$とする（Nはjについて一様にとれる）。このとき、$j > k$ ならば、$^\forall z \in \partial N$に対し、

$$\tilde{u}_j(z) = u_j(z) \geqq u_k(z) = \tilde{u}_k(z)$$

であるから、比較定理1.4により、N上で

$$\tilde{u}_j \geqq \tilde{u}_k \quad .$$

従って、$\{\tilde{u}_j\}$は、Ω上の単調増加列で、Ω上では、

$$u_j \leqq \tilde{u}_j \leqq u \leqq u^*$$

だから、Ω上のほとんどいたるところで、

$$\lim_{j\to\infty} \tilde{u}_j(z) = u^*(z).$$

$N \subset \Omega_u$ だから $(dd^c u^*)^n$ はN上で定義され、連続性定理より、N上では、

$$(dd^c u^*)^n = \lim_{j\to\infty} (dd^c \tilde{u}_j)^n = f dV$$

を得る。

[証明終わり].

定理2.1，定理3.3、及び比較定理より、ただちに次の定理を得る。

定理3.4.

Mをn次元複素多様体で、その上に大域的に定義された連続な強多重劣調和関数を持つものとする。MのHermite計量から得られる体積要素をdVとする。ΩをMの相対コンパクトな強擬凸領域，∂Ω上の連続関数ϕ及び、Ω上の非負値有界可測関数fに対し、Ω上で

$$u(z) := \sup\{v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f)\}$$

とおく。すると、uは、Dirichlet問題

$$u \in P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

$$\lim_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) = \phi(\zeta) \qquad \zeta \in \partial\Omega$$

$$(dd^c u)^n = f dV \qquad \text{on } \Omega$$

の一意の解である。

定理2.1と定理3.3の方法を、少し精密に（懲りずに）押し進めると、次の、やや nonsense な結果を得ることになる。

定理3.5. M, dV, Ω は定理3.4に同じとする。境界条件 ϕ は、$\partial\Omega$ 上の有界な上半連続関数で次の条件をみたすとする:

(*) 各 $\zeta \in \partial\Omega$ に対し、ζ の近傍 N と、$\Omega \cap N$ 上の局所有界な多重劣調和関数 h があって、$\partial\Omega \cap N$ では $\limsup_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \Omega \cap N}} h(z) = \phi(\zeta)$。

Monge-Ampère データ f は、Ω 上の非負値局所可積分関数で、次の条件をみたすとする:

(**) Ω 上のある多重劣調和関数 p で、$\partial\Omega$ の近くで有界，$\Omega \setminus \{p = -\infty\}$ で局所有界可測なものがあって、Ω 上で

$$(dd^c p)^n \geq f dV$$

となっている。

このとき、

$$u(z) := \sup \{ v(z) : v \in \mathcal{L}(\phi, f) \}$$

は、次の Dirichlet 問題の解を与える:

$$u \in P(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega \setminus \{p = -\infty\})$$

$$\limsup_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) = \phi(\zeta) \qquad \zeta \in \partial\Omega$$

$$(dd^c u)^n = f dV \qquad \text{on } \Omega。$$

境界の近くで有界な多重劣調和関数に対して $(dd^c)^n$ が定義されることは、Demailly [7] による。(**) の条件は、$\mathcal{L}(\phi, f)$ が空でないことを示しているが、あまりいい条件ではない。実際、$f \in L^\infty(\Omega)$ となってしまうかもしれない。p から引き出され

る $(dd^c\varphi)^n$ の情報については、Chern, Levine, Nirenberg 型の評価 (Bedford, Taylor [2][4]) があるが、それ以外には、一般的には、あまり知られていないように思う。Monge-Ampère データがディラック測度の場合には、境界条件が連続な場合、log order の特異性を持たせると一意に解くことができるが、一般の測度に対しては、まだわからない。最後に、2次元の複素多様体の場合には、Bedford. Taylor [3] により、ある場合に、ソボレフ空間内に解を持つことがわかっていることを付け加えておく。

参考文献

[1] Asaba. T., Asymptotic Dirichlet Problem for a complex Monge-Ampère operator, Osaka J. Math. 23 (1986), 815-821

[2] Bedford. E., Taylor. B. A.,: The Dirichlet Problem for a Complex Monge-Ampère Equation, Invent. Math. 37 (1976), 1-44,

[3] ―――――――――: Variational properties of the complex Monge-Ampère equation I., Dirichlet principle, Duke Math. J. 45 (1978), 375-403

[4] Bedford. E., Taylor. B.A.: A new capacity for plurisub-harmonic functions, Acta Math., 149, (1982), 1-41

[5] Bremermann, H.: On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains. Characterization of Silov boundaries. Trans. Amer. Math. Soc 91, (1959) 246-276.

[6] Cegrell. U.: On the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator, Math. Z. 185 (1984) 247-251

[7] Demailly. J.P: Measures de Monge-Ampère et measures pluriharmoniques, Math. Z. 194, (1987) 519-564

[8] 福島正俊：等角拡散過程と多重劣調和関数. 東京工業大学における講義. (1986)

[9] Kaneko. H.: A stochastic resolution of a complex Monge-Ampère equation on a negatively curved Kähler manifold, Osaka J. Math. 24 (1987), 307-320

[10] Lelong. P.: Fonctions Plurisousharmoniques et Formes Différentielles Positives. Gordon and Breach. New York 1968

[11] Walsh. J.B.: Continuity of Envelopes of Plurisubharmonic Functions. J. Math. Mech. 18, (1968) 143-148