数理解析研究所講究録
第639巻 1988年 39-56

Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains $E(k,\alpha)$ in $\mathbb{C}^n$

金沢大・理　児玉秋雄 (Akio Kodama)

[1] Introduction.

$\mathbb{C}^n$ の領域 D に対して, $Aut(D)$ をその正則自己同型群とする. 以下, D の境界点 p に対して,

$$(*)\quad \begin{cases} D \text{ のあるコンパクト部分集合に含まれる点列 } \{k_\nu\} \text{ と} \\ Aut(D) \text{ の列 } \{g_\nu\} \text{ が存在して, } g_\nu(k_\nu) \to p \text{ である.} \end{cases}$$

が成立するとき, (D, p) に対して (*) が成立する と言う.

$\mathbb{C}^n$ 内の強擬凸領域のカテゴリーの中での, 正則自己同型群による, n 次元開球 B^n の特徴付けに関する B. Wong [8] の結果の拡張として, J. P. Rosay は次のことを示した:

定理 R [7]. $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域 D に対して, D の強擬凸境界点 p が存在し, かつ (D, p) に対して (*) が成立すると仮定する. このとき, D は B^n に双正則同値である.

この結果を見ていると, 自然に次の問題が起こる:

問題. 上の定理において, 点 p が弱擬凸境界点である, すなわち, 点 p において D の局所定義関数の Levi 形式が

退化するときには，領域 D に対していかなることがわかるだろうか？

最近，この問題に関連して，R. E. Greene - S. G. Krantz [2] は弱擬凸領域

$$E(m)=\left\{ z\in\mathbb{C}^n \,\middle|\, |z_1|^2+\cdots+|z_{n-1}|^2+|z_n|^{2m}<1 \right\}$$

$(1<m\in\mathbb{N})$ に対して，次のような特徴付けを得た。彼らの結果を述べる前に，点 $p=(1,0,\ldots,0)$ は $E(m)$ の弱擬凸境界点であることに注意しておこう。

<u>定理 G-K</u> [2]. D を $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域で，次の条件をみたすものとする：

(1) D の境界 ∂D は C^{n+1}-smooth である。

(2) $p=(1,0,\ldots,0)\in\partial D$ である。

(3) $\mathbb{C}^n$ 内で，p のある開近傍 U が存在し $D\cap U=E(m)\cap U$ となる。

(4) (D,p) に対して $(*)$ が成立する。

このとき，D は $E(m)$ に双正則同値である。

彼らの定理の証明方法は，Kohn にはじまる $\bar{\partial}$-方程式の理論を用いるもので，非常に複雑である。従って，∂D 全体での C^{n+1}-smoothness の仮定は落せない。また，Rosay タイプの結果を示すには，問題になっている境界点 p のある開近傍内

で ∂D が C^2-smooth であればよいと思われる．実際，本稿の第一目的はこの点を明らかにすることである．

自然数 k $(1 \leqq k \leqq n)$ と実数 $\alpha > 0$ に対して

$$\rho(k, \alpha; z) = -1 + \sum_{i=1}^{k} |z_i|^2 + \Big(\sum_{j=k+1}^{n} |z_j|^2\Big)^{\alpha} ;$$

$$E(k, \alpha) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(k, \alpha; z) < 0 \}$$

とおく．従って，$E(m) = E(n-1, m)$ であり，$k = n$ 又は $\alpha = 1$ のとき $E(k, \alpha) = B^n$ である．ここで一つ注意しておきたいことは，$\partial E(k, \alpha)$ は点 $p = (1, 0, \ldots, 0) \in \partial E(k, \alpha)$ において，一般的には smooth でないことである．さて，以上の記号のもとで，Greene-Krantz の結果は次のように一般化される [5]：

<u>定理 I</u>　D を $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域で次の条件をみたすものとする：

(1)　$p = (1, 0, \ldots, 0) \in \partial D$ である．

(2)　$\mathbb{C}^n$ 内で，点 p のある開近傍 U が存在し $D \cap U = E(k, \alpha) \cap U$ となる．

(3)　(D, p) に対して $(*)$ が成立する．

このとき，D は $E(k, \alpha)$ に双正則同値である．

正則写像族に対する正規族の理論を用いることにより，$\bar{\partial}$-方程式を用いることなく，定理 I の証明が出来る．

さて，定理Ⅰの(2)は非常にきつい条件であるので，これを落したいのであるが目下のところ，まだ完全には成功していない．しかし，収束 $\varphi_\nu(k_\nu) \to p$ にある種の条件を付けると，次のことがわかる．（R-$\lim$ の定義は 図 を見て下さい．）

定理Ⅱ．D を $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域で次の条件をみたすものとする：

(1) $p = (1, 0, \ldots, 0) \in \partial D$ である．

(2) p の開近傍 U と，連続関数 $\rho : U \to \mathbb{R}$ で

$$D \cap U = \{ z \in U \mid \rho(z) < 0 \};$$

$$\rho(z) = \rho(k, \alpha; z) + R(z);$$

$$R(z) = o\Big(|z_1 - 1|^2 + \sum_{i=2}^{k} |z_i|^2 + \Big(\sum_{j=k+1}^{n} |z_j|^2 \Big)^{\alpha} \Big)$$

$(z \to p)$，をみたすものが存在する．

(3) D のあるコンパクト部分集合に含まれる点列 $\{k_\nu\}$ と $\mathrm{Aut}(D)$ 内の列 $\{\varphi_\nu\}$ が存在して，R-$\lim \varphi_\nu(k_\nu) = p$ である．

このとき，D は $E(k, \alpha)$ に双正則同値である．

p が強擬凸境界点である場合を考えれば，点 p のまわりでの D の局所定義関数 $\rho(z)$ が条件(2)にある形をしていることが最も合理的であることがわかる．また，条件(3)は model space $E(k, \alpha)$ に対しては常に成り立つ条件であることがわかる．

最後に，B. L. Fridman [1] の結果が，我々の model space $E(k,\alpha)$ に対しても成立することを示したい．すなわち，複素多様体 M, D に対して，M が D の双正則像によって exhaust される とは，任意のコンパクト集合 $K \subset M$ に対して，D から M の中への双正則写像 $f_K : D \to M$ で $K \subset f_K(D)$ となるものが存在すること，と定義するとき次のことが成り立つ：

定理III．n 次元双曲型多様体 M が $E(k,\alpha)$ の双正則像によって exhaust されると仮定する．このとき，M は $E(k,\alpha)$ と双正則同値であるか，または M は開球 B^n に双正則同値であるかのいずれかが成立する．

Fridman は上の定理において，$E(k,\alpha)$ のかわりに $\mathbb{C}^n$ 内の C^3-smooth 境界をもつ強擬凸有界領域 D に対して同様の結果を示している．

2 $E(k,\alpha)$ の構造．

定理の証明に必要な $E(k,\alpha)$ の構造に関する結果をまとめておこう．

(2.1) $E(k,\alpha)$ は S. Kobayashi [4] の意味で完備双曲型である有界ラインハルト領域である．従って，$E(k,\alpha)$ は H. Wu [9] の意味で taut である [6]．

(2.2) 点 $q=(0,\dots,0,1)\in\partial E(k,\alpha)$ の近くで $\partial E(k,\alpha)$ は実解析的であり，かつ q は $E(k,\alpha)$ の強擬凸境界点である.

(2.3) $\mathrm{Aut}(E(k,\alpha))$ は次の形の変換から成る連結リー群である： $z'=(z_1,\dots,z_k)$, $z''=(z_{k+1},\dots,z_n)$ とおくとき

$$(z',z'')\longmapsto\left(\frac{Az'+b}{cz'+d},\ \frac{U\cdot z''}{(cz'+d)^{1/2\alpha}}\right),\quad \begin{pmatrix}A, & b\\ c, & d\end{pmatrix}\in SU(k,1),\quad U\in U(n-k).$$

(2.4) 任意の点列 $\{p^\nu\}\subset E(k,\alpha)$, $p^\nu\longrightarrow p=(1,0,\dots,0)\in\partial E(k,\alpha)$ に対して, $\mathrm{Aut}(E(k,\alpha))$ 内の列 $\{\psi_\nu\}$ で $\psi_\nu(p^\nu)=(0,\dots,0,t_\nu)$, $0\leqq t_\nu<1$ となるものが存在する.

3 定理の証明の概略.

定理Iの証明に定理IIを用いるので，最初に定理IIの証明を与える. そのために，まず R-$\lim$ の定義をしよう. D, ρ を定理IIにおける $\mathbb{C}^n$ の有界領域，および点 $p=(1,0,\dots,0)$ のまわりでの D の局所定義関数とすると，

$$\rho(z)=2\mathrm{Re}(z_1-1)+|z_1-1|^2+\sum_{i=2}^{k}|z_i|^2+\Bigl(\sum_{j=k+1}^{n}|z_j|^2\Bigr)^\alpha$$
$$+\,o\Bigl(|z_1-1|^2+\sum_{i=2}^{k}|z_i|^2+\Bigl(\sum_{j=k+1}^{n}|z_j|^2\Bigr)^\alpha\Bigr)$$

と変形できる. これより，定数 A, B を $0<A<1<B$ と

任意に定めるとき，必要ならば U を中心 p，半径が十分小さな開球にとりなおして，U 上において

$$(3.1)\quad 2\mathrm{Re}(z_1-1)+A\Big[|z_1-1|^2+\sum_{i=2}^{k}|z_i|^2+\Big(\sum_{j=k+1}^{n}|z_j|^2\Big)^{\alpha}\Big]$$
$$\leqq \rho(z)$$
$$\leqq 2\mathrm{Re}(z_1-1)+B\Big[|z_1-1|^2+\sum_{i=2}^{k}|z_i|^2+\Big(\sum_{j=k+1}^{n}|z_j|^2\Big)^{\alpha}\Big]$$

が成立すると仮定してよい。従って，任意の点列 $\{p^{\nu}\}_{\nu=1}^{\infty} \subset D\cap U$，$p^{\nu}\to p$ をとるとき，各 $\nu=1,2,\ldots$ に対して，

$$\zeta(p^{\nu})=(\zeta_1(p^{\nu}),\ldots,\zeta_n(p^{\nu}))\in\partial D\cap U,\quad \lambda(p^{\nu})<0$$

が存在して，

$$p^{\nu}=\zeta(p^{\nu})+\lambda(p^{\nu})N,\quad N=(1,0,\ldots,0)$$

と書ける．この記号のもとで

<u>定義</u>．点列 $\{\mathrm{Re}(\zeta_1(p^{\nu})-1)/\lambda(p^{\nu})\}_{\nu=1}^{\infty}$ が有界数列であるとき，<u>$R\text{-}\lim_{\nu\to\infty} p^{\nu}=p$</u> と記す．

点 $p=(1,0,\ldots,0)$ において ∂D が C^1-smooth の場合には，通常の意味で $\{p^{\nu}\}$ が p に non-tangential に収束すれば $R\text{-}\lim p^{\nu}=p$ であることがわかる．

<u>3.1.</u> <u>定理II の証明の概略</u>： 座標変換 $(u_1,\ldots,u_n)=(z_1-1,z_2,\ldots,z_n)$ を行い，$u'=(u_1,\ldots,u_k)$，$u''=$

$(u_{k+1},\ldots,u_n)$ とおく． (3.1)より，U 上において，

$$(3.2)\quad 2\mathrm{Re}\, u_1 + A[|u'|^2+|u''|^{2\alpha}] \leqq \rho(u) \leqq 2\mathrm{Re}\, u_1 + B[|u'|^2+|u''|^{2\alpha}],$$

かつ，U は原点 0 中心の十分小さい半径をもつ開球で あるとしてよい． さて，$\psi_p(u)=\exp u_1$ は D の点 p のまわりでの *local peaking function* であることがわかり，その結果，$\{\varphi_\nu\}$ は定数写像 $C_p: u\longmapsto p,\ u\in D$，に広義一様収束すると仮定してよい．さらに，すべての $\nu=1,2,\ldots$ に対し

$$p^\nu=\varphi_\nu(k_\nu)\in D\cap U, \qquad R\text{-}\lim \varphi_\nu(k_\nu)=p$$

としてよい． 従って，$N=(1,0,\ldots,0)$ に対して，

$$p^\nu=\zeta^\nu+\lambda^\nu N, \quad \zeta^\nu=(\zeta_1^\nu,\ldots,\zeta_n^\nu)\in\partial D\cap U, \quad \lambda^\nu<0$$

とおくとき，

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathrm{Re}\,\zeta_1^\nu/|\lambda^\nu| = d_0 \in \mathbb{R}$$

が存在すると仮定してよい． 各 $\nu=1,2,\ldots$に対して

$$r_\nu=|\lambda^\nu|^{1/2}, \qquad s_\nu=|\lambda^\nu|^{1/2\alpha}$$

とおく． $d_0=0$ と $d_0\neq 0$ の２通りの場合があるが，$d_0=0$ の場合のみ証明する．($d_0\neq 0$ の場合も適当な座標変換を行えば同様に出来る．) このとき，(3.2)より

$$\left(\mathrm{Re}\,\zeta_1^\nu/|\lambda^\nu|,\ \zeta_i^\nu/r_\nu,\ \zeta_j^\nu/s_\nu,\ R(\zeta^\nu)/|\lambda^\nu|\right)\longrightarrow(0,0,0,0)$$

$(1 \leqq i \leqq k < j \leqq n)$ がわかる．さて，D を相対コンパクトな部分領域 D_j の単調増大列で覆っておく：

$$D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \supset \cdots \supset D_{j+1} \supset D_j \supset \cdots \supset D_1 \supset \overline{\{k_\nu \mid \nu = 1, 2, \ldots\}}.$$

任意の j を固定するとき，十分大きな番号 $\nu(j)$ が存在して，

$$\varphi_\nu(D_j) \subset D \cap U, \qquad \nu \geqq \nu(j)$$

となる．そこで正則写像列 $h_\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，$L_\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，$F^\nu : D_j \to \mathbb{C}^n \ (\nu \geqq \nu(j))$ を次のように定義する：

$$h_\nu(u) = (u_1 - \zeta_1^\nu, \ldots, u_n - \zeta_n^\nu),$$

$$L_\nu(w) = (-w_1/\lambda^\nu, w_2/r_\nu, \ldots, w_k/r_\nu, w_{k+1}/s_\nu, \ldots, w_n/s_\nu),$$

$$F^\nu(u) = L_\nu \circ h_\nu \circ \varphi_\nu(u), \quad u \in D_j.$$

このとき，$\{F^\nu\}$ は D_j から $\mathbb{C}^n$ 内の領域

$$W_\nu = (L_\nu \circ h_\nu)(D \cap U)$$

$$= \{ w \in \mathbb{C}^n \mid (L_\nu \circ h_\nu)^{-1}(w) \in U, \ \rho \circ (L_\nu \circ h_\nu)^{-1}(w) < 0 \}$$

の中への双正則写像列であるが，$\rho \circ (L_\nu \circ h_\nu)^{-1}$ を解析することにより $\{W_\nu\}$ は $E(k, \alpha)$ に双正則同値である $\mathbb{C}^n$ の領域

$$W(k, \alpha) = \left\{ w \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, 2\mathrm{Re}\, w_1 + \sum_{i=2}^{k} |w_i|^2 + \left(\sum_{j=k+1}^{n} |w_j|^2\right)^\alpha < 0 \right\}$$

に収束することがわかる．このとき，$E(k, \alpha)$ が taut であることと，Kobayashi distances が正則写像の下で距離非増加性を持つことを用いて，$\{F_\nu\}$ の部分列 $\{F_{\nu_j}\}$ で双正則写像 $F : D \to W(k, \alpha)$ に収束するものが存在することがわ

かる．

<u>3.2.</u> <u>定理Iの証明の概略</u>：　定理II, IIIの証明のアイデアもこの定理Iの証明に含まれているので，多少詳しく証明を与えることにする。まず $\{k_\nu\}$ はコンパクト集合に含まれているから，ある点 $k_0 \in D$ が存在して

$$k_\nu \longrightarrow k_0 \quad \text{as} \quad \nu \to \infty$$

としてよい．また，点 p のまわりでの *local peaking function* の存在性から

$\{\varphi_\nu\}$ は定数写像 $C_p : z \mapsto p$ に広義一様収束する

と仮定してよい．(2.4) から，与えられた点列

$$p^\nu := \varphi_\nu(k_0) \in D \cap U = E(k,\alpha) \cap U, \quad p^\nu \to p$$

に対して，$\psi_\nu \in Aut(E(k,\alpha))$ が存在して

$$q^\nu := \psi_\nu(p^\nu) = (0,\dots,0,t_\nu), \quad 0 \leqq t_\nu < 1.$$

<u>Case 1.</u> <u>$\{q^\nu\}$ が $E(k,\alpha)$ 内に集積点 q をもつ</u>：　$q^\nu \to q$ と仮定してよい．$D = \bigcup_{j=1}^\infty D_j$ を定理IIのようにとるとき，各 j に対して，十分大きい番号 $\nu(j)$ が存在して

$$\varphi_\nu(D_j) \subset D \cap U = E(k,\alpha) \cap U, \quad \nu \geqq \nu(j)$$

となる．そこで正則写像列

$$f^\nu := \psi_\nu \circ \varphi_\nu |_{D_j} : D_j \to E(k,\alpha), \quad \nu \geqq \nu(j)$$

を考えると，$f^\nu(k_0) = q^\nu \longrightarrow q \in E(k,\alpha)$ であることと，$E(k,\alpha)$ が taut であることより $f^\nu \rightrightarrows f(j) : D_j \to E(k,\alpha)$ と仮定し

てよい．従って，対角線論法により $f^\nu \rightrightarrows f: D \to E(k,\alpha)$ としてよい．f が双正則写像であることを示したい．そのために

$$E_\nu := \psi_\nu(E(k,\alpha)\cap U) = \psi_\nu(D\cap U)\ ;$$

$$g^\nu := \varphi_\nu^{-1}\circ\psi_\nu^{-1}|_{E_\nu} : E_\nu \longrightarrow D$$

とおけば，明らかに

(3.3) $\qquad g^\nu\circ f^\nu = id.\ ,\quad f^\nu\circ g^\nu = id.$

が成り立つ．また，$E(k,\alpha)$ の相対コンパクト部分領域 E' を任意にとるとき，$\psi_\nu^{-1}(E') \longrightarrow \{p\}$ である．従って，ある番号 ν_0 が存在して $E' \subset E_\nu$, $\nu \geqq \nu_0$ となる．この事実と D が有界領域であることから $g^\nu \rightrightarrows g: E(k,\alpha) \longrightarrow \overline{D} \subset \mathbb{C}^n$ と仮定してよい．もしも，$g(E(k,\alpha)) \subset D$ であることがわかれば (3.3) より $f: D \to E(k,\alpha)$ は双正則同型であることがわかる．さて，十分大きいすべての ν に対して，$[f(\overline{D_1}) \cup f^\nu(\overline{D_1})] \subset E' \subset E(k,\alpha)$ となる相対コンパクト領域 E' が存在する．従って，$g^\nu(f^\nu(\overline{D_1})) = \overline{D_1}$ において $\nu\to\infty$ として，$D_1 \subset g(E') \subset g(E(k,\alpha))$ を得る．これより，$g(E(k,\alpha))$ は空集合でない開集合を含むから g は開写像となることがわかり，特に $g(E(k,\alpha)) \subset D$ と結論出来る．

Case 2. $\{q^\nu\}$ が $E(k,\alpha)$ 内に集積点をもたない)：この場合，D と $E(k,\alpha)$ がともに開球 B^n に正則同値であることを示したい．

$$q^\nu \longrightarrow q := (0,\dots,0,1) \in \partial E(k,\alpha)$$

と仮定してよい. (2.2) より q は $E(k,\alpha)$ の強擬凸境界点であるから, 点 q の十分小さい開近傍 W 上で定義された C^2-smooth な強多重劣調和関数 $\rho : W \to \mathbb{R}$ が存在して,

$$E(k,\alpha) \cap W = \{ z \in W \mid \rho(z) < 0 \}, \quad d\rho(z) \neq 0, \ z \in \partial E(k,\alpha) \cap W$$

となる. このとき, 点 q のまわりでの適当な座標系 $w = (w_1, \dots, w_n)$ をとれば, この座標系に関して, 次のことが成立することがわかる:

(3.4) $q = (0, \dots, 0)$;

(3.5) $q^\nu = (0, \dots, 0, \delta_\nu)$, $(\delta_\nu, \ \delta_\nu / |\delta_\nu|) \longrightarrow (0, -1)$;

(3.6) $'w = (w_1, \dots, w_{n-1})$ とおくとき, 適当な複素数 c_j に対して

$$\rho(w) = 2\mathrm{Re}\, w_n + |'w|^2 + A(w) ;$$

$$A(w) = 2\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j w_j \overline{w_n} \right) + o(|w|^2).$$

従って, $\mathbb{R} \ni 0$ のまわりで定義された連続関数 $\varepsilon(x)$ と定数 $C > 0$ とが存在して次のことが成り立つ:

(3.7) $\varepsilon(x) \longrightarrow 0 \quad (x \to 0)$;

(3.8) $|A(w)| \leqq C|w||w_n| + \varepsilon(|w|^2)|w|^2$ near $w = 0$.

$D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ を以前のものとし, 任意に固定した j に対して, 正則写像列 $f^\nu = \psi_\nu \circ \varphi_\nu |D_j : D_j \to E(k,\alpha)$ を考えると $f^\nu(k_0) = q^\nu \to q = (0, \dots, 0) \in \partial E(k,\alpha)$, かつ q が強擬凸境界点であることより $f^\nu \rightrightarrows C_q$ と仮定してよい. 従って, 十分大きい ν_j が存在して

$$f^\nu(D_j) \subset E(k,\alpha) \cap W, \quad \nu \geqq \nu_j$$

が成り立つ．そこで，正則写像列 $L_\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $F^\nu : D_f \to \mathbb{C}^n$ を次のように定義する：

$$L_\nu(w) = ('w/\sqrt{|\delta_\nu|}, -w_n/\delta_\nu), \quad w \in \mathbb{C}^n ;$$

$$F^\nu(z) = L_\nu(f^\nu(z)), \quad z \in D_f .$$

このとき，$F^\nu(k_0) = (0, \ldots, 0, -1)$ かつ $F^\nu(D_f)$ は領域

$$W_\nu := L_\nu(E(k,\alpha) \cap W) = \{w \in \mathbb{C}^n \mid L_\nu^{-1}(w) \in W, \ \rho \circ L_\nu^{-1}(w) < 0\}$$

に含まれる．さて，今

$$\rho^\nu(w) = [\rho \circ L_\nu^{-1}(w)]/|\delta_\nu| , \quad A^\nu(w) = [A \circ L_\nu^{-1}(w)]/|\delta_\nu|$$

とおけば次のことが成り立つことがわかる：

$$(3.9) \qquad \rho^\nu(w) = 2\mathrm{Re}(-\delta_\nu w_n/|\delta_\nu|) + |'w|^2 + A^\nu(w) ;$$

$$(3.10) \qquad |A^\nu(w)| \leqq [C\sqrt{|\delta_\nu|} + \Gamma(|L_\nu^{-1}(w)|^2)] \cdot |w|^2 .$$

従って，$w^\nu = F^\nu(z)$, $z \in D_f$ とおけば，(3.9), (3.10) より

$$(3.11) \quad |w_n^\nu + \delta_\nu/|\delta_\nu||^2 - 1 = |w_n^\nu|^2 + 2\mathrm{Re}(\delta_\nu w_n^\nu/|\delta_\nu|)$$
$$> |w^\nu|^2(1 + A^\nu(w^\nu)/|w^\nu|^2)$$
$$\geqq |w^\nu|^2/2 \geqq 0 .$$

これは，$\delta_\nu/|\delta_\nu| \to -1$ に注意すれば，十分大きいすべての ν に対して，F_n^ν は D_f から taut 領域 $\mathbb{C} \setminus \{1/2, 1\}$ への正則写像であることを示している．すべての ν に対して，$F_n^\nu(k_0) = -1$ であったから，$F_n^\nu \rightrightarrows F_n(f) : D_f \to \mathbb{C} \setminus \{1/2, 1\}$, 従って (3.11) より $\{F^\nu\}$ は正則写像 $F(f) : D_f \to \mathbb{C}^n$ に広義一様収束すると仮定してよい．一方，$\rho^\nu(w) \rightrightarrows 2\mathrm{Re}\, w_n + |'w|^2$

であるから，$\{W_\nu\}$ は開球 B^n に双正則同値である領域 $W = \{w \in \mathbb{C}^n \mid 2\mathrm{Re}\, w_n + |'w|^2 < 0\}$ に収束する．このとき，Case 1 と同様にして，$\{F^\nu\}$ の部分列 $\{F^{\nu_k}\}$ で双正則写像 $F: D \to W$ に広義一様収束するものが存在することがわかる．特に，D は等質領域となる．従って，適当な列 $\{\sigma_\nu\} \subset Aut(D)$ に対して，$R\text{-}\lim \sigma_\nu(k_0) = p$ と出来る．このとき，定理II より D は $E(k,\alpha)$ と双正則同値であることが結論される．

3.3. 定理III の証明の概略：任意に点 $k_0 \in M$ を固定し M を相対コンパクト部分領域 M_j の単調増大列で覆っておく：

$$M = \cup_{j=1}^{\infty} M_j \supset \cdots \supset M_{j+1} \supset M_j \supset \cdots \supset M_1 \ni k_0 .$$

M は $E(k,\alpha)$ の双正則像で exhaust されているから，$E(k,\alpha)$ から M の中への双正則写像列 $\psi_\nu : E(k,\alpha) \longrightarrow M$ が存在して，

$$M_\nu \subset \psi_\nu(E(k,\alpha)), \quad \nu = 1, 2, \cdots$$

となる．従って正則写像列

$$\varphi_\nu := \psi_\nu^{-1} : \psi_\nu(E(k,\alpha)) \longrightarrow E(k,\alpha), \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

は M の任意のコンパクト集合上で一様にある正則写像 $\varphi : M \longrightarrow \overline{E(k,\alpha)} \subset \mathbb{C}^n$ に収束したと仮定してよい．また，必要ならば ψ_ν, φ_ν を適当に $\psi_\nu \circ \sigma_\nu^{-1}$, $\sigma_\nu \circ \varphi_\nu$ ($\sigma_\nu \in Aut(E(k,\alpha))$) と取りかえることにより

$$z^\nu := \varphi_\nu(k_0) = (0, \ldots, 0, t_\nu), \quad 0 \leqq t_\nu < 1$$

と仮定してよい．

<u>Case 1. $\{q^\nu\}$ が $E(k,\alpha)$ 内に集積点 q をもつ</u>: このとき, まず Kobayashi distances の正則写像のもとでの距離非増加性より, M は $\mathbb{C}^n$ のある有界領域 D と同一視出来ることがわかる. 従って, 証明は定理I, Case 1 に帰着され, M と $E(k,\alpha)$ とが双正則同値であることがわかる.

<u>Case 2. $\{q^\nu\}$ が $E(k,\alpha)$ 内に集積点をもたない</u>: このとき, $q^\nu \to q := (0,\dots,0,1) \in \partial E(k,\alpha)$ としてよい. また, q が $E(k,\alpha)$ の強擬凸境界点であることから $\varphi_\nu \rightrightarrows C_q$ と仮定してよい. このとき, 定理I の証明中の Case 2 のように, q のまわりでの座標系 $w=(w_1,\dots,w_n)$ を導入し, 正則写像列 $L_\nu: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $F^\nu: M_\nu \to \mathbb{C}^n$ を

$$L_\nu(w) = ({}'w/\sqrt{|\delta_\nu|}, -w_n/\delta_\nu), \quad F^\nu(x) = L_\nu(\varphi_\nu(x))$$

と定義すれば, 定理I の証明の Case 2 とまったく同様にして, $\{F^\nu\}$ の部分列 $\{F^{\nu_k}\}$ で双正則写像 $F: M \to W \cong B^n$ に広義一様収束するものが存在することがわかる.

$\boxed{4}$ 2つの注意.

<u>4.1.</u> D を $\mathbb{C}^n$ 内の領域とし, p を $\overline{D}$ の一点とする. d_D で D の Kobayashi pseudodistance を表す. このとき,

<u>定義.</u> 点 p の $\mathbb{C}^n$ における任意の近傍 W に対して, p のある近傍 V が存在して

$$\overline{V} \subset W, \quad d_D(D\cap(\mathbb{C}^n\setminus W), D\cap V) > 0$$

となるとき，Dは点 p で双曲的に埋込まれている，という．

P. Kiernan [3] の結果によれば，$\mathbb{C}^n$ の任意の有界領域 D に対しては，D は任意の点 $p \in \partial D$ で双曲的に埋込まれている。

注意1. 定理I, II において，$\mathbb{C}^n$ 内の領域 D は有界である必要はなく，一般に「D は点 p で双曲的に埋込まれている」という条件でおきかえられる．

任意の自然数 $n_1, \dots, n_s$ と任意の実数 $\alpha_2, \dots, \alpha_s > 0$ に対して，有界ラインハルト領域 E を次のように定義する：

$$E = \left\{ (z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_s} \;\middle|\; |z_1|^2 + \sum_{i=2}^{s} |z_i|^{2\alpha_i} < 1 \right\}.$$

注意2. 定理IIと同様の結果は，有界ラインハルト領域 E に対しても成立する．

参考文献

[1] B. L. Fridman, *Biholomorphic invariants of a hyperbolic manifold and some applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 276 (1983), 685-698.

[2] R.E. Greene and S.G. Krantz, Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains with non-compact automorphism groups, Lect. Notes in Math. 1268, Springer-Verlag, 1987, 121–157.

[3] P. Kiernan, On the relations between taut, tight and hyperbolic manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 49–51.

[4] S. Kobayashi, Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker, 1970.

[5] A. Kodama, Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains $E(k,\alpha)$ in $\mathbb{C}^n$, to appear in Tôhoku Math. J. 1988.

[6] P. Pflug, About the Carathéodory completeness of all Reinhardt domains, Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory II (G.I. Zapata, ed.), 1984, 331–337.

[7] J.P. Rosay, Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de $\mathbb{C}^n$ par son groupe d'automorphismes, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29, 4 (1979), 91–97.

[8] B. Wong, Characterization of the unit ball in $\mathbb{C}^n$ by its automorphism group, Invent. Math. 41 (1977),

253–257.
[9] H. Wu, *Normal families of holomorphic mappings*, Acta Math. 119 (1967), 193–233.