数理解析研究所講究録
第639巻 1988年 68-76

複素力学系と tree 上の区分的線型写像

京大理 宍倉 光広 (Mitsuhiro Shishikura)

$f(z)$ を $\mathbb{C}$ 係数の一変数有理関数（次数 $\geqq 2$）とするとき、Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ からそれ自身への写像 $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ が定義される。これが表題の「複素力学系」である。本稿では、この力学系が (a) attractive periodic point を持つ場合 と (b) Siegel disk または Herman ring を持つ場合（定義は後で述べる）に、ある種の tree T とその上の区分的線型写像 $F: T \to T$ を結びつける方法について述べる。この tree は、もとの複素力学系の不変集合（Julia set など ― 後述）の位相的、関数論的性質を反映するものである。

1. f-invariant foliation, $\mathcal{F}$ と B.

この節では、(a), (b) それぞれの場合に、次の性質をもつ foliation $\mathcal{F}$ (real codimension 1) を定義する。:

$\mathcal{F}$ は ある open set $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ ($U \neq \phi$, $f^{-1}(U) = U$) 上の特異点（次ページの図）を持つ foliation で、f で不変。さらに、

$\mathcal{F}$ の regular leaf（特異点を含まない leaf）は Jordan curve。

$\mathcal{F}$ の特異点の例

(a) attractive periodic point を持つ場合。

$z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ が <u>attractive periodic point</u> とは、ある $p \geq 1$ があって、$f^p(z_0) = z_0$（ただし $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p}$）かつ $|(f^p)'(z_0)| < 1$ となること。（ただし、$z_0 = \infty$ のときは、適当に座標変換してから定義する）

このとき、z_0 の近傍 U_0（$f(U_0) \subset U_0$）と等角写像 $\varphi : U_0 \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r_0\}$（$0 < r_0 < 1$）が存在して、

$$\varphi \circ f^p \circ \varphi^{-1}(z) = \begin{cases} \lambda z & (\lambda = (f^p)'(z_0) \neq 0 \text{ のとき}) \\ z^k & (\lambda = 0 \text{ のとき}, k \text{ は } f^p \text{ の } z_0 \text{ での degree}) \end{cases}$$

とできることが知られている。$\mathcal{F}_0 = \{\varphi^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}) \mid 0 \leq r < r_0\}$ と定義すると、$\mathcal{F}_0$ は U_0 上の invariant foliation になる。そこで、$\mathcal{F}_0$ を f によって次々に引きもどしていけば、$U = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U_0)$ まで invariant foliation $\mathcal{F}$ を定義することができる。このとき $\mathcal{F}$ は上に述べた性質を持つ。

（$f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ は branched covering になっているから、γ を Jordan curve とするとき、$f^{-1}(\gamma)$ の1つの連結成分は Jordan curve かまたは、上図のような特異点をもつ curve になる。後者は f の critical point（f が局所的に1対

1にならない点 —— $z\neq\infty, f(z)\neq\infty$ なら $f'(z)=0$ と同値）を含むときに起こる。）

(b) Siegel disk または Herman ring を持つ場合

open set $U_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ が Siegel disk とは、ある $p \geq 1$ があって、$f^p(U_0)=U_0$ となり、ある等角写像 $\varphi: U_0 \to \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ があって、$\varphi\circ f^p\circ\varphi^{-1}(z)=e^{2\pi i\theta}\cdot z$　$(\theta\in\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ となることをいう。Herman ring とは $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ を annulus $\{z\in\mathbb{C} \mid r_0<|z|<1\}$ $(0<r_0<1)$ に置きかえたものである。Siegel disk あるいは Herman ring をもつ複素力学系が存在することは知られている。

$\mathcal{F}_0=\{\varphi^{-1}(\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=r\}) \mid 0\leq r<1$ あるいは $r_0<|z|<1\}$ は U_0 上の invariant foliation で、これを(a)と同様に f で引きもどして、$U=\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(U_0)$ 上の invariant foliation $\mathcal{F}$ が定義できる。この $\mathcal{F}$ もやはり、この節の最初に述べた性質をもつ。

集合Bの定義：次のような性質をもつ集合Bを定義する。
$f(B)\subset B$；Bは有限個の連結成分からなる；Bは $\mathcal{F}$ の regular leaf とは交わらない。
実際、以下のように定義する。

(a) の場合. $B=\{z_0, f(z_0), \cdots, f^{p-1}(z_0)\}$

(b), Siegel disk の場合 $B=\partial U_0 \cup \partial f(U_0) \cup \cdots \cup \partial f^{p-1}(U_0) \cup \{z_0, f(z_0), \cdots, f^{p-1}(z_0)\}$ ただし. $z_0=\varphi^{-1}(0)$ と定義する。

(b), Herman ring の場合 $B=\partial U_0 \cup \partial f(U_0) \cup \cdots \cup \partial f^{p-1}(U_0)$.

2. leaf space Γ 上の measure m.

$\Gamma=\{\gamma$: regular leaf of $\mathcal{F}$ | $\forall n \geq 0$ $f^n(\gamma)$ は B を分割する。$\}$ と定義する。ここで、Jordan curve γ が B を分割するとは、B が $\overline{\mathbb{C}}-\gamma$ の２つの連結成分と交わることをいう。

任意の $\gamma_0 \in \Gamma$ に対し、次のような近傍 V がとれる：

$\gamma_0 \subset V$ open $\subset \overline{\mathbb{C}}$ ； 等角写像 $\psi: V \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid r_V<|z|<1\}$ $(0<r_V<1)$ が存在して. $\gamma_0=\psi^{-1}(\{|z|=r_0\})$; さらに、$r_V<r<1$ をみたす r について. $\psi^{-1}(\{|z|=r\})$ は Γ に属する $\mathcal{F}$ の leaf。

このとき、Γ 上の measure m を、上の V について

$$m(\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \subset V\})=\frac{-1}{2\pi} \log r_V$$

をみたすように定義できる。(これは annulus V の modulus に等しい。)

3. tree T と map $F: T \to T$ の定義.

$\overline{\mathbb{C}} \ni x, y$ に対し、$d(x,y)$ を

$$d(x,y) = m(\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \text{は} x \text{と} y \text{を分離する}\})$$

で定義する。γ が x と y を<u>分離</u>とは、x と y が $\overline{\mathbb{C}} - \gamma$ の異なる成分に属することをいう。

このように定義すると、d は有限個の点を除いて有限で、$\overline{\mathbb{C}}$ 上の pseudo metric になる。すなわち、$d(x,x)=0$ $d(x,y)=d(y,x)$, $d(x,z) \leqq d(x,y)+d(y,z)$ をみたす。そこで、

<u>Tの定義</u>　$T = \overline{\mathbb{C}}/\sim$, ただし $x \sim y \Leftrightarrow d(x,y)=0$

さらに、$\pi: \overline{\mathbb{C}} \to T$ を projection とし、$x, y \in T$ に対し、$d(x,y) = d(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y))$ とすれば well defined である。

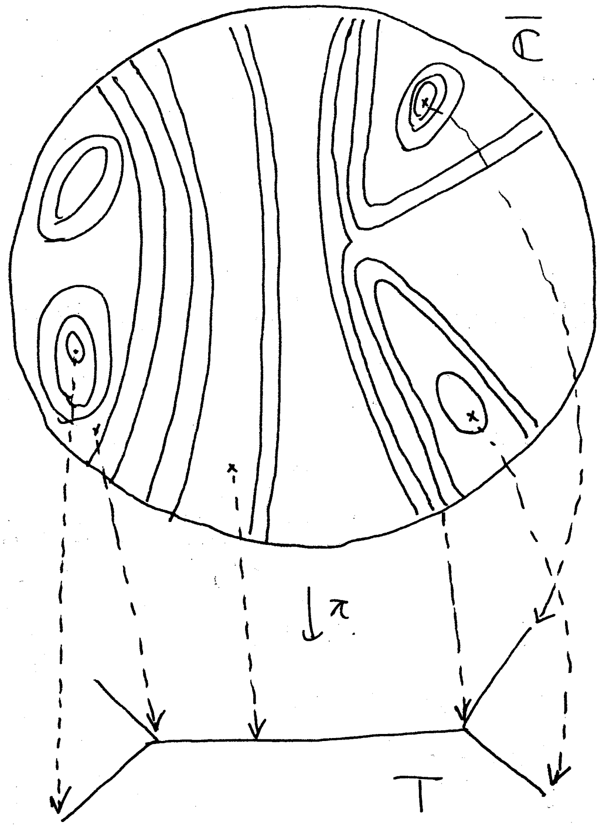
<u>Fの定義</u>　$F: T \to T$ を $F(x) = \pi \circ f(\partial \pi^{-1}(x))$ で定義する。ただし、$\partial \pi^{-1}(x)$ は $\pi^{-1}(x)$ の $\overline{\mathbb{C}}$ 内での境界である。この F は well defined である。

この (T, d, F) について次の定理が成立する。

<u>定理1</u>　T は tree（単連結な1次元単体的複体）であり、$F: T \to T$ は、連続な区分的線型写像（ある有限集合 $S \subset T$ があって、$T - S$ の各連結成分 T' に対し、定数

$k = k_{T'}$ があって　$d(F(x), F(y)) = k \cdot d(x, y)$　$(x, y \in T')$ となる。)
さらに、上の定数 $k_{T'}$ は　正の整数になる。

証明は述べないが、右図をみれば、何故 T が tree になるか理解できるであろう。また、$T' \ni x$ で $\gamma = \pi^{-1}(x) \in \Gamma$ のとき、$k_{T'} =$ (covering map $f : \gamma \to f(\gamma) = \pi^{-1}(F(x))$ の degree) であることも注意しておく。



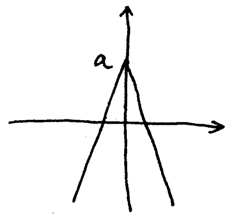
4. 例

(a) の例.　$f(z) = c\left(\frac{z}{1+z^2}\right)^3$　,　$|c|$ 十分大（例えば $|c| > 67$）
$z_0 = 0$ は attractive fixed point $(p=1)$。ここでは B は前の定義を少し変えて、$B = \{z_0 = 0, \infty\}$ とする。（これでも同様の定理が成立し、tree が構成できる。

このとき、 $T=\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

$$\pi(0)=-\infty,\ \pi(\infty)=+\infty,\ \pi(\pm1)=0$$

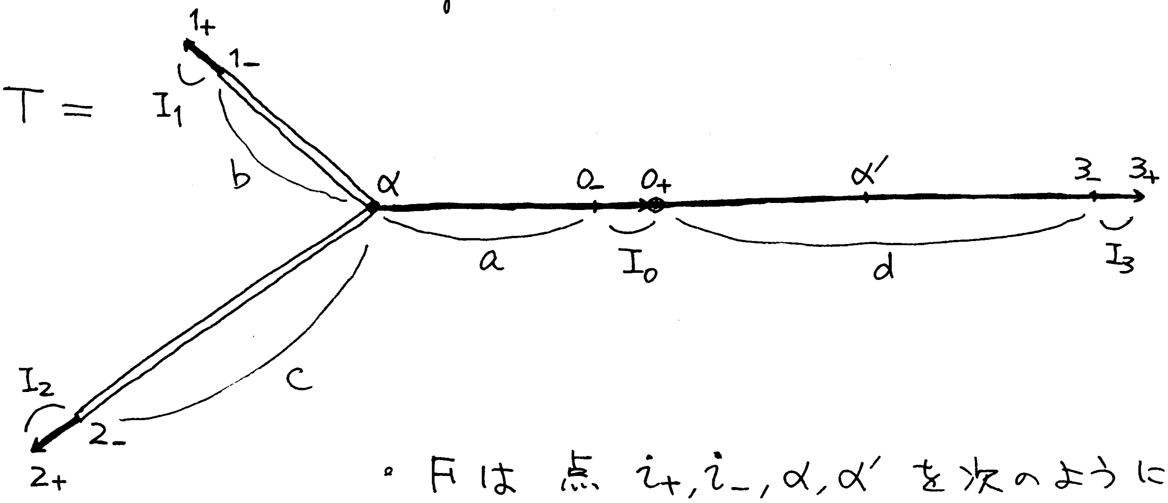
$$F(x)=a-3|x| \qquad (a>0)$$



となる。

(b) の例. Herman ring の場合.

$T=$



- F は 点 $i_+, i_-, \alpha, \alpha'$ を次のように うつす。

$$\begin{cases} 0_+ \to 1_+ \to 2_+ \to 3_+ \to 0_+ & (i_-\text{も同様}) \\ \alpha' \longrightarrow \alpha \circlearrowleft \end{cases}$$

- これら点を除いた各線分上で F は線型
  線分 b, c 上では $k=2$, それ以外で $k=1$
- これらの情報から 各線分の長さを $|I_0|=e$ で表わすことができる。: $|I_i|=e$ $(i=0,1,2,3)$

$|a|=|b|=2e$, $|c|=4e$, $|d|=5e$

・このような tree をもつ有理関数 $f(z)$ を具体的に求めることはできない。しかし、次節で述べる定理によれば、その存在は保証される。（$\deg f = 3$ とできる）

5. tree の実現問題

定理1により、有理関数（複素力学系）から、TとFが構成されたわけだが、逆に定理1の結論をみたすようなTとFに対し、いつ有理関数から得られたものになるか？という問題が生じる。つまり、与えられた tree T とその上の区分的線型写像Fから、それらを実現するような有理関数を構成できるか、という問題である。これに関しては、

(定理2)　TとFがある条件をみたせば、それらを実現する有理関数を構成することができる。

"ある条件"というのは長いので省略するが、少くとも前節の(b)の例には定理2は適用することができる。

定理2は、擬等角写像を用いた手術の方法によって証明される。

6. 応用

いくつかの応用があるが、ここでは1つだけ述べる。

$P(z)$ を z の $\mathbb{C}$ 係数多項式とし、($\deg P \geq 1$) 有理関数 $f(z)$ を $f(z) = z - \dfrac{P(z)}{P'(z)}$ で定義する。

注意. $f(z)$ の iteration $f^n(z)$ を計算するのが、方程式 $P(z)=0$ の解を見つけるための Newton 法である。

tree の理論を使って次が示せる。

<u>定理3</u> $f(z) = z - \dfrac{P(z)}{P'(z)}$ の Julia set は連結である。

有理関数 $f(z)$ の Julia set は

$J = \{ z \in \overline{\mathbb{C}} \mid z$ のどんな近傍でも $f^n (n=1,2,\cdots)$ は同等連続でない$\}$

と定義される。

詳しい内容については、

M. Shishikura, Trees Associated to the Configuration of Herman rings, To appear in Ergodic Theory and Dynamical Systems