数理解析研究所講究録
第639巻 1988年 77-97

Remarks to Moduli Hol(N, Γ\D) and Applications

野口潤次郎

Junjiro Noguchi

東工大・理

序.

本小論の目的は論文[10]の内容の解説及びそれに対する注意を述べることである. 従って[10]で詳しく述べてある所はスケッチ風にし, [10]でスケッチ風に或いは全く説明していない所を詳しく述べてゆきたい.

Faltings [3] により遂に証明された Mordell 予想の関数体上のアナログの高次元版について [11], [13], [17] の結果があるが, 特に小林による双曲的多様体の理論がうまくフィットし曲線の場合にも Manin [9] と Grauert [4] による証明とは異なる, エレメンタリーな第3の証明を与えることが出来た([13]). ところで実際には Faltings は Shafarevich 予想と呼ばれる予想を解決することにより Mordell 予想を証明した. 関数体上の Shafarevich 予想は Parshin-Arakelov の定理と呼ばれ既に示されていた([15], [1]). これにつ

いても双曲的多様体の理論から何か分ることはないだろうかというのが第1の動機である．第2の動機としては，有界対称領域のコンパクト商多様体への正則写像のモジュライについて詳しいきれいな結果が分っているが（[19], [20]），これを非コンパクトな場合にも証明しようというものである．これは正則写像論からの動機といえる．

Parshin-Arakelov の定理のアーベル多様体に対するアナログについては Faltings [2]，正標数の場合については Szpiro [21] がある．また最近今吉-志賀 [5] は Teichmüller 理論を用いた Parshin-Arakelov の定理の別証を与えている．関数体上のアーベル多様体の部分多様体内の有理点についての Raynaud [16] の定理の別証を Parshin [14] は双曲的多様体の理論を用いて与えており，他にも興味ある応用を得ている．

以下解説する結果を順次述べる．$\overline{N}$ を複素多様体，N をその Zariski 開部分集合で，境界 ∂N は正規交叉超曲面とする．X を双曲的複素空間で $\overline{X}$ に双曲的に埋込まれているとする．$Hol(N, X)$ で N から X への正則写像の全体を表わし，位相は広義一様収束の位相を入れておく．このとき

$Hol(N, X)$ の写像列に対する"拡張-収束定理"

を証明する．次に，$\overline{N}$ と $\overline{X}$ はコンパクト，X は完備双曲

的と仮定する．次が分る：

$Hol(N, X)$ はコンパクト化を持つ複素空間

M_g を種数 $g \geqq 2$ のコンパクトリーマン面（曲線）のモジュライ空間とすると，有限ガロワ被覆 $M_g' \longrightarrow M_g$ があって M_g' は完備双曲的で，また

M_g' はあるコンパクト化 $\overline{M_g'}$ の中にで曲的に埋込まれる

これを用いて曲線の場合の Parshin-Arakelov の定理の証明中の "boundedness part" が示される．

次に D を有界対称領域，$X = \Gamma \backslash D$ を非特異商空間，$\overline{N}$ は Kähler と仮定する（細かな条件は§4を参照）．このとき

evaluation 写像

$$f \in Hol(N, \Gamma \backslash D) \to f(x) \in \Gamma \backslash D$$

は ${}^{\forall}x \in N$ に対し，$\Gamma \backslash D$ の全測地的複素部分多様体の上へのプロパー挿入になっている．

応用として，$D = \mathfrak{S}_g$，$\Gamma = Sp(2g, \mathbb{Z})$ とすると，$\Gamma \backslash D$ は非特異ではなくなるが，上の結果が使えて，Faltings [ ] の結果の中でモジュライの次元が0になる判定条件以外のことは分ることになる．

§1．拡張一収束定理．

$\overline{N}$ を複素多様体，N をその Zariski 開部分集合で ∂N は正規交叉超曲面とする．X を双曲的複素空間とし，複素空間

$\overline{X}$に双曲的に埋込まれているとする．つまり，Xは相対コンパクトでd_XでXの双曲的距離を表わすと，2つの収束点列

$$x_\nu \in X,\ \nu=1,2,\cdots,\quad x_\nu \to x \in \overline{X}$$
$$y_\nu \in X,\ \nu=1,2,\cdots,\quad y_\nu \to y \in \overline{X},\ y \neq x$$

に対し，常に $\underline{\lim}_{\nu\to\infty} d_X(x_\nu, y_\nu) > 0$ となることである。またこれは次のことと同値である．$\overline{X}$上エルミート計量hを一つ固定し，F_XでXの双曲的距離の infinitesimal form を表わすと，ある$c>0$があって

$$(1.1)\qquad F_X \geqq c\sqrt{h}.$$

(1.2)定理．列 $f_\nu \in Hol(N, X)$, $\nu=1,2,\cdots$, がN上広義一様に$f: N \to \overline{X}$に収束しているならば，f_ν (f) は一意的に正則写像 $\bar{f}_\nu : \overline{N} \to \overline{X}$ ($\bar{f}: \overline{N} \to \overline{X}$) に拡張され，$\{\bar{f}_\nu\}$ は$\overline{N}$上広義一様に$\bar{f}$に収束する．

注．$Hol(N, X)$の元の拡張については Kiernan[6] が示している．ここでは $f: N \to \overline{X}$ となっていることに注意されたい．

この定理の証明は[10]に詳しく述べてあるので以下に Key となる補題の説明をする．

(1.3)補題(Wirtinger). $\mathbb{C}^n$のボール$B(R)$内の純k次元解析的集合Sが原点を含むとする．$^\forall r \in (0, R)$に対し$Vol(S \cap B(r))$で$S \cap B(r)$のユークリッド体積を表わ

すと,

$$Vol(S\cap B(r))\geq\frac{\pi^k}{k!}r^{2k}.$$

ちなみに, $\exists r\in(0,R)$ で等号が成立するのはSが線型部分空間のときに限ることが分る. 証明は $Vol(S\cap B(r))$ を計算するのに "Wirtinger の不等式" の等号が成立する場合の式を用いて簡単に分る. この下からの評価は C^∞ のカテゴリーでは成立しない.

次のように置く:

$$\Delta=\{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\},\quad \Delta^*=\Delta-\{0\}.$$

定理(1.2)は $N=(\Delta^*)^n$ の時に示せば十分である. 更に次が分れば十分であろう.

(1.4) 補題. $f_\nu:(\Delta^*)^n\longrightarrow X$, $\nu=1,2,\cdots$, を正則写像列, $a_\nu, b_\nu\in(\Delta^*)^n$ を 0 に収束する2つの点列とする. もし $f_\nu(a_\nu)\longrightarrow P\in\overline{X}$ ならば, $f_\nu(b_\nu)\rightarrow P$ である.

証明は n についての帰納法に依るのであるが, 本質的な $n=1$ の時の証明をスケッチする. $f_\nu(b_\nu)\not\rightarrow P$ とすると, 部分列をとることにより, $f_\nu(b_\nu)\longrightarrow Q\in\overline{X}$, $Q\neq P$ と仮定してよい. 円周 $\{|z|=\delta\}$ $(0<\delta<1)$ の Δ^* における F_{Δ^*} (=ポアンカレ計量) に関する長さ $L_{\Delta^*}(\{|z|=\delta\})$ は次のようになる.

(1.5) $$L_{\Delta^*}(\{|z|=\delta\}) = \frac{2\pi}{|\log\delta|}.$$

双曲的計量の減少性 $f_\nu^* F_X \leqq F_{\Delta^*}$ と (1.1) 及び (1.5) を合せると,

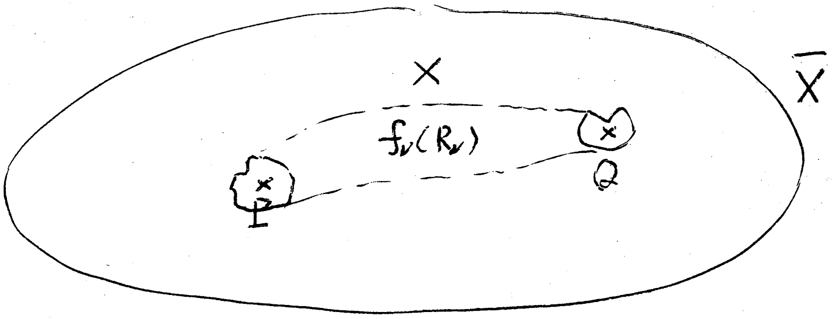
$$f_\nu(\{|z|=|a_\nu|\}) \longrightarrow P$$

$$f_\nu(\{|z|=|b_\nu|\}) \longrightarrow Q$$

が分る.

$$R_\nu = \{\min\{|a_\nu|,|b_\nu|\} \leqq |z| \leqq \max\{|a_\nu|,|b_\nu|\}\}$$

と置く. 像 $f_\nu(R_\nu)$ の h に関する体積(面積) $Vol_h(f_\nu(R_\nu))$



は上の図と補題(1.3)により, $\exists C_1>0$ で

$$Vol_h(f_\nu(R_\nu)) \geqq C_1$$

となることが分る. 一方 (1.1) と $f_\nu^* F_X \leqq F_{\Delta^*}$ より

$$Vol_h(f_\nu(R_\nu)) \leqq \frac{1}{c} Vol_{\Delta^*}(R_\nu)$$

となる. ここで $Vol_{\Delta^*}(R_\nu)$ は F_{Δ^*} に関する体積である.
これは計算により簡単に次のようになり, 矛盾を得る.

$$Vol_{\Delta^*}(R_\nu) = 2\pi\left(\frac{1}{\log\min\{|a_\nu|,|b_\nu|\}} - \frac{1}{\log\max\{|a_\nu|,|b_\nu|\}}\right)$$

$$\longrightarrow 0.$$

§2. $Hol(N, X)$の性質

この節では$\bar{N}$はコンパクト，Xは完備双曲的と仮定する．前節の定理(1.2)により中への同相写像

$$f \in Hol(N, X) \longrightarrow \bar{f} \in Hol(\bar{N}, \bar{X})$$

を得る．この意味で$Hol(N, X) \subset Hol(\bar{N}, \bar{X})$と同一視する．$Hol(\bar{N}, \bar{X})$にはDouady理論により複素解析空間の構造が入っていることが知られており，evaluation写像

$$\Phi : (f, x) \in Hol(\bar{N}, \bar{X}) \times \bar{N} \longrightarrow f(x) \in \bar{X}$$

は正則である．

先ず(1.1)と減少性$f^*F_X \leqq F_N$を用いることにより次が示される．

(2.1)補題．$Hol(N, X)$は$Hol(\bar{N}, \bar{X})$内で相対コンパクトである．

Xが完備双曲的であることより，$f \in Hol(\bar{N}, \bar{X})$に対し$f^{-1}(\partial X)$は空集合か，$\bar{N}$全体か，$\bar{N}$の超曲面でなければならないことが分る．$f \in Hol(\bar{N}, \bar{X})$が$f \in Hol(N, X)$となる為の必要十分条件は

$$f(\bar{N}) \not\subset \partial X$$

$$f^{-1}(\partial X) \subset \partial N$$

($f^{-1}(\partial X)$が空の場合も含めて)

である．これは開閉入り混じた条件になっているが，Xが

完備双曲的であることを本質的に用いて次が示される.

(2.2) 定理. i) $Hol(N, X)$ の $Hol(\bar{N}, \bar{X})$ 内での閉包 $\overline{Hol(N, X)}$ はコンパクト複素部分空間になり, $Hol(N, X)$ はその Zariski 開部分集合になる. そして $Hol(N, X)$ はモジュライ空間としての普遍性質を満たす.

ii) $Hol(N, X)$ は完備双曲的で, $\overline{Hol(N, X)}$ に双曲的に埋込まれている.

ii) について解説を加える. Z を $Hol(N, X)$ の一つの連結成分とする. $f_1, f_2 \in Z$ が相異なるとは, $\exists x \in N$ で $f_1(x) \neq f_2(x)$ となることである. Evaluation 写像

$$\Phi_x : f \in Z \longrightarrow f(x) \in X$$

は正則であるから

$$d_Z(f_1, f_2) \geqq d_X(f_1(x), f_2(x)) > 0$$

となり, Z は双曲的になる. 同様にして, X の完備性から Z が完備であることが出る. 次に双曲的埋込みについて考える. 次の情況を考える:

$$f_\nu, g_\nu \in Z, \quad \nu = 1, 2, \cdots$$

$$f_\nu \longrightarrow f \in \partial Z = \bar{Z} - Z$$

$$g_\nu \longrightarrow g \in \partial Z, \quad g \neq f.$$

最後のことから $\exists x_0 \in N$ で $g(x_0) \neq f(x_0)$ となる. $d_Z(f_\nu, g_\nu) \geqq d_X(f_\nu(x_0), g_\nu(x_0))$ だから,

(2.3) $$\varliminf_{\nu\to\infty} d_X(f_\nu(x_0), g_\nu(x_0)) > 0$$
を言えばよい．もし $f(x_0)\in X$ 又は $g(x_0)\in X$ ならば明らかで，$f(x_0), g(x_0)\in \partial X$ の時でも $X \hookrightarrow \overline{X}$ が双曲的埋込みであるから (2.3) は成立している．

$f\in Hol(N, X)$ に対し
$$\operatorname{rank} f = \max\{\dim N - \dim_x f^{-1}f(x)\,;\, x\in N\},$$
$$Hol(k; N, X) = \{f\in Hol(N, X)\,;\, \operatorname{rank} f = k\}$$
と置く．

(2.4) 命題．$^\forall k$ に対し $Hol(k; N, X)$ は $Hol(N, X)$ 内で開かつ閉．

証明には補題(1.3)を用いてエレメンタリーに出来る．先ず，$Hol(N, X) \hookrightarrow Hol(\overline{N}, \overline{X})$ により，$Hol(k; \overline{N}, \overline{X})$ が開かつ閉を示せばよい．$\bigcup_{l\geq k} Hol(l; \overline{N}, \overline{X})$ は開であるから，これが閉であることを言えばよい．$\overline{N}$ ($\overline{X}$) 上にエルミート型式 ω (λ) をそれぞれ固定する．$\dim N = n$ とする．次は明らかであろう
$$f\in \bigcup_{l\geq k} Hol(l; \overline{N}, \overline{X}) \Leftrightarrow E^k(f) = \int_{\overline{N}} \omega^{n-k}\wedge f^*\lambda^k > 0.$$
点列 $f_\nu \in \bigcup_{l\geq k} Hol(l; \overline{N}, \overline{X})$, $\nu=1, 2, \cdots$, で
$$f_\nu \longrightarrow f\in Hol(\overline{N}, \overline{X})$$
となるものを取る．$\operatorname{rank} f_\nu \equiv k$, $\nu=1, 2, \cdots$, としてよい．
$$E^k(f_\nu) \longrightarrow E^k(f)$$

である．一方 $f(\overline{N})$ は k-次元の解析的集合で，殆んど全ての $y \in f(\overline{N})$ に対して $\dim f^{-1}(y) = n-k$ であることに注意すると，

$$E^k(f_\nu) = \int_{f_\nu^{-1}(y)} \omega^{n-k} \int_{y \in f(\overline{N})} \lambda^k(y).$$

一般に，コンパクト複素空間Y上，エルミート計量を一つ決めると，ある定数 $c > 0$ が存在して，Yの任意の解析的部分集合Zに対しその体積 $Vol(Z) \geqq c$ であることが，補題(1.3)より出る．従って今 $^\exists c_1 > 0$，$^\exists c_2 > 0$ で

$$\int_{f_\nu^{-1}(y)} \omega^{n-k} \geqq c_1$$

$$\int_{f_\nu(\overline{N})} \lambda^k \geqq c_2$$

となり，$E^k(f_\nu) \geqq c_1 c_2$ となる．従って $E^k(f) > 0$．

§3. Parshin-Arakelov の定理への応用．

$\mathbb{T}_g$ を Teichmüller 空間，Π を Teichmüller モジュラー群，$\mathfrak{S}_g$ を Siegel の上半空間とする．自然な準同型

(3.1) $\lambda : \Pi \longrightarrow S_p(2g, \mathbb{Z}) \to 0$

がある．$\mathbb{M}_g = \Pi \backslash \mathbb{T}_g$ が種数 g (ここでは $g \geqq 2$) のコンパクトリーマン面のモジュライ空間，$S_p(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{S}_g$ が g 次元主偏極アーベル多様体のモジュライ空間となる．Π

及び $Sp(2g,\mathbb{Z})$ は isotropy 群が一般に自明でない．特に点 $M\in\mathbb{M}_g$ の Π の isotropy 群 $\Pi(M)$ は M の自己同型群 $Aut(M)$ と一致する．さて，$M\in\mathbb{M}_g$ に対しそのヤコビ多様体 $J(M)$ を対応させる Torelli 写像

$$\tau:\mathbb{M}_g\longrightarrow Sp(2g,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{S}_g$$

は one to one である．τ は (13.1) と両立する自然な持上

$$\tilde{\tau}:\mathbb{T}_g\longrightarrow\mathfrak{S}_g$$

を持つ．つまり $\forall\sigma\in\Pi$ に対し

$$(13.2)\qquad \tilde{\tau}\circ\sigma=\lambda(\sigma)\cdot\tilde{\tau}.$$

$\tilde{\tau}$ は finite to one (2 : 1) になる．$\Gamma(n)$ で $Sp(2g,\mathbb{Z})$ のレヴェル n の合同部分群を表わすと，$n\geqq 5$ で $\Gamma(n)$ は $\mathfrak{S}_g$ に自由に作用している．$\Gamma'=\Gamma(5)$ とし

$$\Pi'=\lambda^{-1}(\Gamma'),\qquad \mathbb{M}_g'=\Pi'\backslash\mathbb{T}_g$$

とおく．Γ' は正規だから Π' も正規で，更に Π' は $\mathbb{T}_g$ に自由に作用している．実際 $(M,\gamma)\in\mathbb{T}_g$（$\gamma$ はいわゆる M のマーキングを表わす）と $\sigma\in\Pi'$ に対し

$$\sigma((M,\gamma))=(M,\gamma)$$

とする．すると (13.2) より $\lambda(\sigma)$ は $\tilde{\tau}((M,\gamma))$ を固定する．よって $\lambda(\sigma)=\mathbb{1}$．つまり $\sigma\in Aut(M)$ で，$\sigma_*:H_1(M,\mathbb{Z})\to H_1(M,\mathbb{Z})$ が恒等写像になっている．Hurwitz の定理により $\sigma=id$．よって $\mathbb{M}_g'$ は非特異

で次の図式を得る:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{T}_g & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \mathfrak{S}_g \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{M}_g' & \xrightarrow{\tau'} & \Gamma\backslash\mathfrak{S}_g \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{M}_g & \xrightarrow{\tau} & Sp(2g,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{S}_g
\end{array}$$

$\mathbb{M}_g'$, $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_g$ は共に準射影的代数多様体で, τ' は正則有理写像で, finite to one である. $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_g$ は完備双曲的で, 更に小林-落合[8]により

(3.3) $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_g$ は佐武コンパクト化 $\overline{\Gamma\backslash\mathfrak{S}_g}$ の中へ双曲的に埋込まれている.

そこで, $\mathbb{M}_g'$ のコンパクト化 $\overline{\mathbb{M}_g'}$ を τ' が finite to one 正則写像

$$\overline{\tau'} : \overline{\mathbb{M}_g'} \longrightarrow \overline{\Gamma\backslash\mathfrak{S}_g}$$

に拡張されるように取る (Stein factorization を使えばよい).

(3.4) 定理. $\mathbb{M}_g'$ は完備双曲的で $\overline{\mathbb{M}_g'}$ に双曲的に埋込まれている.

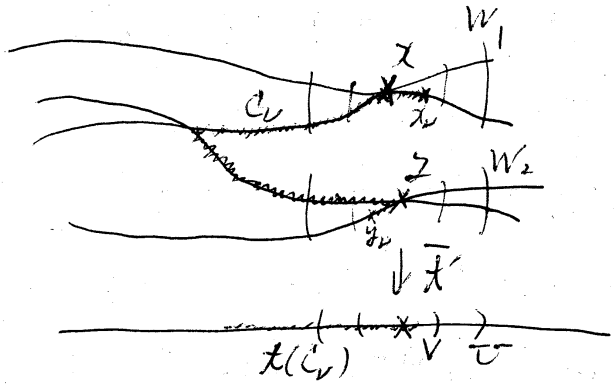
Royden [18] により $\mathbb{T}_g$ は完備双曲的であるから, その自由商 $\Pi\backslash\mathbb{T}_g = \mathbb{M}_g'$ も完備双曲的である. 次に双曲的埋込みについて考える. 点列 $x_\nu, y_\nu \in \mathbb{M}_g'$, $\nu=1,2,\ldots$ で

$$x_\nu \longrightarrow x \in \partial M_j'$$
$$y_\nu \longrightarrow y \in \partial M_j', \quad y \neq x$$

となっているものを取る。$\bar{\pi}'(x) \neq \bar{\pi}'(y)$ ならば

$$\underline{\lim}\, d_{M_j'}(x_\nu, y_\nu) \geq \underline{\lim}\, d_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}_g}(\pi'(x_\nu), \pi'(y_\nu)) > 0$$

となる。$\bar{\pi}'(x) = \bar{\pi}'(y)$ とする。$\bar{\pi}'(x)$ の近傍 $\bar{U}$ を任意に小さく取り，$\bar{U}$ 内で相対コンパクトな近傍 V を取る。$\bar{\pi}'^{-1}(\bar{U})$ の２つの連結成分 W_1, W_2 があって W_1 が x の，W_2 が y の近傍になっているとしてよい。$\exists \nu_0 \leq \nu$ に対し $\pi'(x_\nu), \pi'(y_\nu) \in V$ となる。$\nu_0 \leq \nu$ に対し x_ν



と y_ν を結ぶ任意の曲線 C_ν を取る。すると $\pi'(C_\nu)$ は ∂V と $\partial \bar{U}$ を横切る（上図参照）。従って (13.3) より

$$L_{M_j'}(C_\nu) \geq L_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}_g}(\pi'(C_\nu))$$
$$\geq d_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}_g}(\partial V, \partial \bar{U}) > 0$$

結局 $\underline{\lim}\, d_{M_j'}(x_\nu, y_\nu) > 0$ となり，証明を終る。

$\bar{\pi} : \bar{\mathfrak{H}} \to \bar{N}$ をコンパクトな曲線族とし，更に

N上への制限 $\pi : \mathcal{Y} \to N$ は滑らか，つまり π は各点で maximal rank になっているとする．$\mathcal{Y}_x (= \pi^{-1}(x)$, $x \in N)$ の種数を g とする．更に $\pi : \mathcal{Y} \to N$ は局所的に自明にはならないと仮定する．

(3.5) Parshin - Arakelov の定理．$g \geq 2$ ならば，かかる $\overline{\mathcal{Y}} \xrightarrow{\pi} \overline{N}$ は同型を除いて有限個しか存在しない．

これは $N = \overline{N}$ のとき Parshin [15] が，一般の場合 Arakelov [1] が証明したものである．その証明は，

1°) かかる $\overline{\mathcal{Y}} \to \overline{N}$ の全体のモジュライが代数多様体になる，(注 $\overline{N}$ は代数的と仮定してよい)

2°) dim (モジュライ) = 0，

と二つに大きく分けられる．ここでは 1°) の部分を一般の N のままで，我々の議論を用いることにより，モジュライがコンパクト化可能な複素空間になるという型で示す．

先ず自然に正則写像

$$f : x \in N \longrightarrow \mathcal{Y}_x \in M_g$$

を得る．更にモノドロミー表現 $\eta : \pi_1(N) \to \Pi$ が定まり，f は (3.2) の意味で η と両立する普遍被覆への持上

$$\tilde{f} : \tilde{N} \longrightarrow \mathbb{T}_g$$

を持つ．$N' = \eta^{-1}(\Pi')\backslash\tilde{N}$ と置くと，N' はコンパクト化可能な複素多様体になり，広中の定理によりコンパクト化

$\overline{N'}$ で $\supset V'$ が正規交叉超曲面になるものが取れる. 次の図式を得る. $N' \longrightarrow N$ は有限被覆であることに注意する.

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{T}_g \\
\downarrow & & \downarrow \\
N' & \xrightarrow{f'} & \mathbb{M}_g' \\
\downarrow & & \downarrow \\
N & \xrightarrow{f} & \mathbb{M}_g
\end{array}$$

そこで, $Hol(N, \mathbb{M}_g)$ をいきなり考えるのではなくて $Hol(N', \mathbb{M}_g')$ をまず考える. これは定理(3.4)と定理(2.2)によりコンパクト複素空間内の Zariski 開集合になっている. η は自然に $\hat{\eta} \in Hom(\pi_1(N), \Pi/\Pi')$ を導く. $\pi_1(N)$ は有限生成で Π/Π' は有限群であるから, $Hom(\pi_1(N), \Pi/\Pi')$ は有限集合である. その元を $\eta_1, \dots, \eta_l$ とする

$$G = \bigcap_{j=1}^{l} \mathrm{Ker}\,\eta_j \subset \pi_1(N)$$

と置く. G は有限指数になる. 改めて

$$N' = G\backslash\tilde{N}$$
$$H = \pi_1(N)/G$$

と置く. H は N' に作用し $H\backslash N' = N$ となる. 各 η_j は $\hat{\eta}_j \in Hom(H, \Pi/\Pi')$ を定める. そして $\hat{\eta}_j$ は H の $Hol(N', \mathbb{M}_g')$ 上の作用を次で与える:

$$g \in Hol(N', M_g'),\ \sigma \in H \text{ に対し}$$
$$g \longrightarrow \hat{g}(\sigma) = g \circ \sigma^{-1}.$$

もし g が この作用の固定点つまり $\hat{g}(\sigma) = g$ となる g, $\forall \sigma \in H$, となるならば, g は N から M_g への正則写像を定め, これはある曲線族 $\mathcal{Y} \longrightarrow N$ から定義されるものとなる. また逆も明らかである. 従って上述の $Hol(N', M_g')$ の作用の fixed-point-locus を $Z_1, \dots, Z_\ell$ とし

$$Z = \bigcup_{j=1}^{\ell} Z_j$$

と置く. また定理(2.2)より $Hol(N', M_g')$ は $\overline{Hol(N', M_g')}$ に双曲的に埋込まれているので, 上述の作用は全て $\overline{Hol(N', M_g')}$ まで双有理型的にのびる. 従って $\bar{Z}$ はコンパクト複素空間となり, Z はその Zariski 開集合である. 次に Π/Π' が Z に次で作用する

$$(\gamma, g) \in (\Pi/\Pi') \times Z \longrightarrow \gamma \circ g \in Z$$

かくして $(\Pi/\Pi')\backslash Z$ が我々の考えている曲線族 $\mathcal{Y} \longrightarrow N$ を parametrize することになる. 最後に $(\Pi/\Pi')\backslash Z$ がコンパクト化可能な複素空間になっていることを示そう. Z が $\bar{Z}$ に双曲的に埋込まれているので (Π/Π') の作用も $\bar{Z}$ まで有理型的にのびている. そこで一般に次のことを示せばよい.

(3.6) 命題. 一般に $\overline{Y}$ をコンパクト複素空間, Y をその Zariski 開集合とする. 有限群 F が Y に正則に作用しそれが $\overline{Y}$ まで双有理型的にのびているとする. この時, 商 $F\backslash Y$ はコンパクト化可能な複素空間になる.

コメント. 以下の証明は東大に滞在中であった C. T. C. Wall 氏によるもので, 氏にここで感謝いたします.

さて $F = \{f_1, \ldots, f_N\}$ とする. 次のプロパー埋込みを考える

$$\varphi : y \in Y \longrightarrow (\ldots, f_i(y), \ldots) \in \prod_F Y.$$

$f \in F$ を任意に取ると

$$\varphi(f(y)) = (\ldots, f_i f(y), \ldots)$$
$$= \chi(f)(\ldots, f_i(y), \ldots),$$

ここで $\chi(f)$ は $\{f_1, \ldots, f_N\} \to \{f_1 f, \ldots, f_N f\}$ で決まる $\{1, \ldots, N\}$ の対称群の元である.

$$\chi : F \longrightarrow N \text{ 次対称群}$$

は準同型である. f_i が双有理型的に $\overline{Y}$ までのびているから, $\overline{\varphi(Y)} \subset \prod_F \overline{Y}$ はコンパクト複素部分空間で, $\chi(F)$ が $\prod_F \overline{Y}$ に正則に作用し $\overline{\varphi(Y)}$ を不変にしている. 従って $\chi(F)\backslash\overline{\varphi(Y)}$ が同型 $F\backslash Y \cong \chi(F)\backslash\varphi(Y)$ を通して $F\backslash Y$ のコンパクト化を与える.

(3.7) 系. Y が準射影的ならば $F\backslash Y$ も準射影的である.

§4. $Hol(N, \Gamma\backslash D)$の構造.

この節では$\overline{N}$はKählerで∂Nは単純正規交叉とする.Dを有界対称領域としΓを$Aut(D)$の離散部分群でDに自由に作用しているものとし

1) $\Gamma\backslash D$がコンパクト

又は

2) Γは$Aut^{\circ}(D)$の算術的部分群

であると仮定する. 以下の結果は1)の場合には砂田[20]及びSchoen-Yau[19]で得られている. ここでは主に2)を対象とする.

Dは完備双曲的で,$\Gamma\backslash D$は佐武コンパクト化$\overline{\Gamma\backslash D}$に双曲的に埋込まれている([8])ので,ここまでの結果は全て成立している.次のように置く,

$$l(D) = D\text{の真境界成分の最大次元},$$

$$l(\Gamma) = \Gamma\text{-有理的境界成分の最大次元}.$$

先ず次のことに注意する. ${}^{\forall}x \in N$を固定すると

$$\Phi_x : f \in Hol(N, \Gamma\backslash D) \longrightarrow f(x) \in \Gamma\backslash D$$

はプロパー正則写像になり,$\Phi_x(Hol(N, \Gamma\backslash D))$は$\Gamma\backslash D$の複素部分空間になる.

(4.1)定理. 1) Zを$Hol(N, \Gamma\backslash D)$の連結成分とすると$\Phi_x(Z)$は全測地的複素部分多様体になり,$\Phi_x$は挿入写像

となる. 特に $Hol(N, \Gamma\backslash D)$ は非特異である.

ii) $k>0$ に対し $\dim Hol(k; N, \Gamma\backslash D) \leqq l(D)$.

iii) $k>l(\Gamma)$ ならば $Hol(k; N, \Gamma\backslash D)$ はコンパクト.

iv) $k>l(D)$ ならば $Hol(k; N, \Gamma\backslash D)$ は有限集合.

証明は [10] に詳しく述べられている. 一番のポイントは既にモジュライ $Hol(N, \Gamma\backslash D)$ が複素空間をなしているということで, それは局所弧状連結であるので, Schoen-Yau [19] の調和写像についての結果が使えることである.

§3での議論と同様にして, ここでの結果をアーベル多様体に関する Parshin-Arakelov 型の定理を考えるのに適用すると, Faltings [2] の結果の内で, モジュライの次元が0になる判定以外の結果は出ることになる.

§5. 問題.

Enriques 曲面や K3 曲面についての Parshin-Arakelov 型の定理はどのようになるだろうか?

§3の最後の議論に関連し次のことはどうだろうか.

予想. $\overline{X}$ をコンパクト複素空間, X をその Zariski 開集合で, $\overline{X}$ に双曲的に埋め込まれているとすると, $Aut(X) \subset Aut(\overline{X})$.

$X = \Gamma\backslash D$ で $\overline{X} = \overline{\Gamma\backslash D}$ ならば正しい (参 [7]).

References

[1] S. Ju. Arakelov, Families of algebraic curves with fixed degeneracies, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **35** (1971), 1277-1302.

[2] G. Faltings, Arakelov's theorem for Abelian varieties, Invent. Math., **73** (1983), 337-347.

[3] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlköpern, Invent. Math., **73** (1983), 349-366.

[4] H. Grauert, Mordells Vermutung über rationale Punkte auf Algebraischen Kurven und Funktionenköper, Publ. Math. I.H.E.S., **25** (1965), 131-149.

[5] Y. Imayoshi and H. Shiga, A finiteness theorem for holomorphic families of Riemann surfaces, to appear in Proc. Holomorphic Functions and Moduli, MSRI Berkeley, 1986.

[6] P. Kiernan, Extensions of holomorphic maps, Trans. Amer. Math. Soc., **172** (1972), 347-355.

[7] P. Kiernan and S. Kobayashi, Satake compactification and extension of holomorphic mappings, Invent. Math., **16** (1972), 237-248.

[8] S. Kobayashi and T. Ochiai, Satake compactification and the great Picard theorem, J. Math. Soc. Japan, **23** (1971), 340-350.

[9] Ju. Manin, Rational points of algebraic curves over function fields, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat., **27** (1963), 1395-1440.

[10] J. Noguchi, Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and locally symmetric spaces, to appear.

[11] J. Noguchi, A higher dimensional analogue of Mordell's conjecture over function fields, Math. Ann., **258** (1981), 207-212.

[12] J. Noguchi, A higher dimensional analogue of Mordell's conjecture over function fields and related problems, Several Complex Variables, Proc. 1981 Hangzhou Conf., Birkhäuser, Boston, 1984, 237-244.

[13] J. Noguchi, Hyperbolic fibre spaces and Mordell's conjecture over function fields, Publ. RIMS, Kyoto University, **21** (1985), 27-46.

[14] A. N. Parshin, Finiteness theorems and hyperbolic manifolds, preprint.

[15] A. N. Parshin, Algebraic curves over function fields. I, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **32** (1968), 1145-1170.

[16] M. Raynoud, Around the Mordell conjecture for function fields and a conjecture of Serge Lang, Lecture Notes in Math., **1016**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983, 1-19.

[17] D. Riebesehl, Hyperbolische komplexe Räume und die Vermutung von Mordell, Math. Ann., **257** (1981), 99-110.

[18] H. L. Royden, Metrics on Teichmüller spaces, Lecture Notes in Math., **400**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974, 71-78.

[19] R. Schoen and S. T. Yau, Compact group actions and the topology of manifolds with non-positive curvature, Topology, **18** (1979), 361-380.

[20] T. Sunada, Rigidity of certain harmonic mappings, Invent. Math., **51** (1979), 297-307.

[21] L. Szpiro, Seminaire sur les pinceaux arithmetique, Astérisque, **127**, 1985.