数理解析研究所講究録
第639巻 1988年 112-129

Linear Differential Equations modeled after hyperquadrics

熊本大理 佐々木 武（T. Sasaki）
九大理 吉田正章（M. Yoshida）

1. はじめに

$\mathcal{H}_2$を次数2のSiegel上半平面，$\Gamma(2)$をレベル2のモデュラー群とする。自然な写影 $\pi:\mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2/\Gamma(2)$ の逆写像について考えたい。空間 $\Lambda\subset\mathbb{P}^3$ を

$$\Lambda=\{(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)\in\mathbb{C}^3;\ \lambda^i\neq 0,1,\lambda^j\ (i\neq j)\}$$

によって定め，Λの各元λに曲線

$$\{\,v^2=u(u-1)(u-\lambda^1)(u-\lambda^2)(u-\lambda^3)\,\}$$

の周期行列を対応させると π^{-1} が得られる。ところで，$\mathcal{H}_2$ は3次元IV型対称領域として $\mathbb{P}^4$の非退化2次超曲面 Q^3 の中に実現されるから，π^{-1}はΛからQ^3への写像，従って Λから$\mathbb{P}^4$への写像である。これは，同次座標を並べてみれば，5つの函数で与えられる。我々の目標はこれらの函数のみたすべき微分方程式系（UDEとよぶ）：$\overline{\Lambda}=\mathbb{P}^3$上のFuchs型線形微分方程

式系，を具体的に求めることである。結果は次の通。

$(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) = (x, y, z)$ とおくとき

$$w_{xx} + \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-z} + \frac{1}{x-y}\right)\right]w_x$$

$$- \frac{y(y-1)}{2x(x-1)(x-y)} w_y - \frac{z(z-1)}{2x(x-1)(x-z)} w_z + \frac{1}{x(x-1)} w = 0,$$

$$(z-x)y(y-1)\left[2w_{xy} + \left(\frac{1}{y-z} + \frac{1}{y-x}\right)w_x + \left(\frac{1}{x-z} + \frac{1}{x-y}\right)w_y + \frac{1}{(z-x)(z-y)} w\right]$$

$$=-(y-x)z(z-1)\left[2w_{xz} + \left(\frac{1}{z-y} + \frac{1}{z-x}\right)w_x + \left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x-z}\right)w_z + \frac{1}{(y-x)(y-z)} w\right],$$

及び (x, y, z) を巡回置換して得られる4式。
この方程式とAppellの F_1 は緊密な関係がある。[Y2] 参照。

§2 では簡単に歴史をふりかえったあと，「二次条件をみたす微分方程式系」を求める。すなわち，解空間の次元が $n+2$ である n 次元多様体上の方程式系であって，独立な解を並べて得られる P^{n+1} への写像による多様体の像が二次超曲面にはいるものの求め方をあたえる。 §3では，この結果を使って上記 modular 群 $\Gamma(2)$ に対応するUDEの求め方を示す。§4 では §2 の結果を射影微分幾何（射影接続をもつ多様体の部分多様体の幾何）のことばで説明する。

なお，先のような群をとりあげる理由を簡単に述べておきたい。X を Hermite 対称空間，Γ を X に働く不連続群とし，M を orbifold $\Gamma\backslash X$ とする。このとき，射影 $\pi: X \longrightarrow M$ の逆写像 π^{-1} は M の "developing map" とよばれる。我々は π^{-1} は 何らかの良い 微分方程式で記述されると考える。Gauss の微分方程式，Appell の F_1 超幾何微分方程式はその好例である。しかも，両者とも標語的には "射影構造の developing equation" を与えてくれる。そうすると "共形構造" はどうかを考えるのは自然な成行きであろう。Siegel modular 群はこの例になるというのが，とりあげる理由である。Hilbert modular 群も同様であり，それについては [SY1, 2] を参照して頂きたい。以上の背景については [Y1] を参照して頂きたい。

2. 二次超曲面をモデルとした微分方程式系

2.1 Laguerre-Forsyth の理論

函数 $z = z(x)$ についての3階斉次常微分方程式

(A) $$z''' + p_1 z'' + p_2 z' + p_3 z = 0$$

をまず考えよう。Laguerre-Forsyth の理論というのは 1879年 Laguerre が (A) について次の3つのこと

を示したことに端を発している。

(1) zの変換 $z \longrightarrow e^{f(x)}z$ と xの座標変換を組みあわせると 方程式(A)は 方程式

(A1) $$z''' + pz = 0$$

に変形できる。

(2) 形(A1)を保つ上記変換は射影一次変換に限り、このとき p は変換について共変である。

(3) (p は(変換のjacobian)^{巾} × (P_i の微分多項式)と表わされるが) $p = 0$ であることと 方程式(A)の3つの独立な解の間に2次の関係式が成立つこととは同値である。

実際、$p = 0$ ならば(A1)の独立な解として $z_1 = 1$, $z_2 = x$, $z_3 = x^2$ がとれ、$z_1 z_3 - (z_2)^2 = 0$ であるから(3)は容易にわかる。高階の常微分方程式については Brioschi, Halphen, Forsyth, Bouton 等によって一般化された。なかでも Halphen は(A1)の p が $\mathbb{P}^2$ 内の曲線の不変量であることを最初に示した。

2.2 2変数の場合 — E. J. Wilczynski の仕事

Halphen の考え方を2変数の方程式系に適用し

たのは E. J. Wilczynski である。そのうちの1つとして，$z(x,y)$ についての次の方程式系を扱った。

$$(B)\quad \begin{cases} z_{xx} = l z_{xy} + a z_x + b z_y + p z \\ z_{yy} = m z_{xy} + c z_x + d z_y + q z. \end{cases}$$

ここで，(B) は可積分系であり

$$(1)\qquad 1 - lm \neq 0$$

をみたし，4つの独立な解 $\{z^0, z^1, z^2, z^3\}$ をもっているとしよう。Wilczynski の示したことの1つは §2.1 の(1)と同じ変換を行うと (B) は方程式系

$$(B1)\quad \begin{cases} z_{xx} = \beta z_y + p' z \\ z_{yy} = \gamma z_x + q' z \end{cases}$$

に帰着できること，β, γ は $\mathbb{P}^3$ への写像 $(z^0(x,y), \cdots, z^3(x,y))$ によって得られる曲面の3次の不変量であること，そして $\beta = \gamma = 0$ という条件がこの曲面が2次曲面であるための必要充分条件であることである。

この結果を具体的な方程式系，例えば Appell の超幾何微分方程式系 F_2, F_3, F_4, に適用する ― 微分幾何的取扱いをする ― ことが可能である。[SY1] を参照。

また (1) が成立しない：$1 - lm = 0$ となる方程式系には Appell の F_1 が属する。これについ

では [Y1] 参照。

2.3 変数の数が3以上の場合
— 2次超曲面をモデルとした微分方程式系 —

M を $\mathbb{C}^n$ の領域，$(x^1, \cdots, x^n)$ をその座標，$z^1, \cdots, z^{n+2}$ を M 上の $n+2$ コの線形独立な函数としよう。これらは z についての線形方程式

$$\det \begin{vmatrix} z & z^1 & \cdots & z^{n+2} \\ z_1 & z^1_1 & \cdots & z^{n+2}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n & z^1_n & \cdots & z^{n+2}_n \\ z_{ij} & z^1_{ij} & \cdots & z^{n+2}_{ij} \\ z_{kl} & z^1_{kl} & \cdots & z^{n+2}_{kl} \end{vmatrix} = 0$$

の解である。ただし，$z_i = \partial z/\partial x^i$, etc.

$$\Delta_{ij} = \det \begin{vmatrix} z^1 & \cdots & z^{n+2} \\ z^1_1 & \cdots & z^{n+2}_1 \\ \vdots & & \vdots \\ z^1_n & \cdots & z^{n+2}_n \\ z^1_{ij} & \cdots & z^{n+2}_{ij} \end{vmatrix}$$

とおくとき，z^i が独立であることより少くとも1つの (i,j) について $\Delta_{ij} \neq 0$ である。$\Delta_{1n} \neq 0$ とする。

このとき方程式系は

$$
(C) \quad \begin{cases} z_{ij} = g_{ij} z_{1n} + A_{ij}^k z_k + A_{ij}^0 z, \quad 1 \le i, j \le n \\ A_{ij}^k = A_{ji}^k, \ A_{ij}^0 = A_{ji}^0, \ g_{ij} = g_{ji}, \\ g_{1n} = 1, \quad A_{1n}^k = A_{1n}^0 = 0 \end{cases}
$$

の形をしている。ここで $z = (z^1, \cdots, z^{n+2})$ とすると $z(M)$ は $\mathbb{P}^{n+1}$ の超曲面になる。§4 で述べるように $z(M)$ は自然な共形~~接続~~をもつ。対応する計量は今の場合 $\sum g_{ij}\, dx^i dx^j$ であることがわかる。さらに、$z(M)$ が 2次超曲面に含まれるならば この接続は平坦, conformally flat, であることが証明できる。逆に次の定理が成立する。

<u>定理</u> $n \geq 3$ とする。$\sum g_{ij}\, dx^i dx^j$ を共形的平坦な計量とし $g_{1n} = 1$ とする。函数 θ を $\det(e^\theta g_{ij}) = 1$ となるように定め テンソル $e^\theta g_{ij}$ についての Christoffel symbol を Γ_{ij}^k ; R_{ij} を Ricci tensor, S_{ij} を Schouten tensor: $S_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} e^\theta g_{ij}\right)$ とし,

$$
A_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - g_{ij}\Gamma_{1n}^k, \quad A_{ij}^0 = S_{ij} - g_{ij} S_{1n}
$$

とおく。このとき方程式系 (C) は可積分であり, $n+2$

コの解を持ち，それから得られる $\mathbb{P}^{n+1}$ への写像の像は2次超曲面に含まれる。 ▨

<u>注1.</u> この定理は実数係数でも成立する。共形的平坦な構造を持つ多様体は（その普遍被覆から）球面上に展開されるという定理（Kuiper）の展開写像は方程式系（C）をといて得られるということである。

<u>注2.</u> $n=2$ のときは共形接続の特性から定理は成立しない。

3. Siegel modular 群に対応する方程式系

3.1 modular 群 $\Gamma(2)$

D を n 次元 IV 型対称領域とする：

$$D = \left\{ (z^i) \in \mathbb{C}^n ;\ (\mathrm{Im}\, z^1)(\mathrm{Im}\, z^n) - \sum_{2}^{n-1} (\mathrm{Im}\, z^i)^2 > 0 \quad \mathrm{Im}\, z^1 > 0 \right\}$$

$n=2$ のとき bidisc $H \times H$（H 上半平面），$n=3$ のとき次数2の Siegel 上半平面 $\mathcal{H}_2$ である。Q を $(n+2)\times(n+2)$ 対称行列：

$$(t^0, t^1, \cdots, t^{n+1})\, Q\, {}^t(t^0, t^1, \cdots, t^{n+1})$$
$$= -t^0 t^{n+1} + t^1 t^n - \sum_{2}^{n-1} (t^i)^2$$

Q の定める $\mathbb{P}^{n+1}$ の2次超曲面を Q^n とおく。D は埋め込み

$$(z^1, \cdots, z^n) \longrightarrow (t^0, \cdots, t^{n+1}) = (1, z^1, \cdots, z^n, z^1 z^n - \Sigma (z^j)^2)$$

によって Q^n の領域となる。群 $Aut(D)$ は 群 $\{X \in GL(n+2, \mathbb{R})\ ;\ XQ^tX = Q\}/\pm 1$ の index 2 の部分群と同一視される。Q^n の自然な共形構造は

$$\omega = dz^1 dz^n + dz^n dz^1 - 2\sum_{j=2}^{n-1} (dz^j)^2$$

で与えられる。

さて，$\Gamma \subset Aut(D)$ を不連続群，D' を Γ が free に作用する D の最大領域とし 射影 $D' \longrightarrow D'/\Gamma$ を π とかく。$Aut(D)$ は D に共形的に作用するから $\pi_*(\omega)$ は D/Γ 上の正則共形構造である。今，$\Sigma g_{ij} dx^i dx^j$ が この $\pi_* \omega$ を表わす計量であれば §2.3 の定理によって可積分系が存在する。そして，それは π の逆写像を与えている。この方程式系を Γ に付随する UDE (一意化方程式) とよぼう。

一般に Γ に対して その UDE が存在するとしても それを具体的に求めることは必ずしも簡単ではない。それは計量 g_{ij} を求める一般的方法がないからである。我々の成功したケース $\Gamma = \Gamma(2) = \mathcal{H}_2$ に付くレベル 2 の Siegel modular 群，について次に述べる。

3.2　$\Gamma(2)$の共形構造 $\pi^*\omega$ について

実 symplectic 群 $Sp(2,\mathbb{R})$ は

$$\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(4,\mathbb{R});\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

で定義される。群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}_2)$ は作用

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau^1 & \tau^2 \\ \tau^2 & \tau^3 \end{pmatrix} \longrightarrow (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}$$

によって $Sp(2,\mathbb{R})/\pm 1$ に同型である。$\Gamma = GL(4,\mathbb{Z}) \cap Sp(2,\mathbb{R})$ を full modular 群，$\Gamma(2) = \{X \in \Gamma;\ X \equiv I_4 \pmod 2\}$ をレベル 2 の部分群とする。$\Gamma/\Gamma(2) \cong S_6$（対称群）。$\iota$ を involution $\begin{pmatrix} \tau^1 & \tau^2 \\ \tau^2 & \tau^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \tau^1 & -\tau^2 \\ -\tau^2 & \tau^3 \end{pmatrix}$ とする。ι は平面 $H_0 = \{\tau^2 = 0\}$ を固定している。$\Gamma(2)$の固定点全体は $H = \Gamma H_0$ である。別に空間

$$\Xi = \{\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^6) \in (\mathbb{P}^1)^{\times 6};\ \xi^i \neq \xi^j\ (i \neq j)\}$$

を考えよう。$PGL(2,\mathbb{C}) \times S_6$ が自然に Ξ に作用する。Ξ の各点 ξ に対して $\mathbb{P}^2(u,v,w)$ の平面曲線

$$C(\xi) =:\quad w^4 v^2 = (u - \xi^1 w)\cdots(u - \xi^6 w)$$

を対応させる。$C(\xi) \cong C(\xi') \leftrightarrow \xi = g\xi'$，$g \in PGL(2,\mathbb{C}) \times S_6$ である。このとき

$$\Xi/PGL(2,\mathbb{C}) = \Lambda := \{(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3);\ \lambda^i \neq 0, 1, \lambda^j (i \neq j)\}$$

であり，曲線

$$C(\lambda):\quad w^3v^2 = u(u-w)(u-\lambda^1 w)(u-\lambda^2 w)(u-\lambda^3 w)$$

の parameter 空間になる。$\mathrm{Aut}(\Lambda) = S_6$。さて，$H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ の標準基底を $C(\lambda)$ の周期行列が (τ, I_2) になるようにとろう。$\tau \in \mathcal{H}_2 - F$ である。このとき対応

$$\Lambda \longrightarrow \mathcal{H}_2 - F \quad ; \quad \lambda \longrightarrow \tau(\lambda)$$

は射影 $\mathcal{H}_2 - F \longrightarrow (\mathcal{H}_2 - F)/\Gamma(2) \cong \Lambda$ の逆写像を与え $(\mathcal{H}_2 - F)/\Gamma = \Lambda/S_6$ である。同型 $\mathcal{H}_2 - F/\Gamma(2) \cong \Lambda$ を次のように与える。テータ函数 $\theta_{g'g''h'h''}(\tau)$; $g', g'', h', h'' = 0, 1$, を

$$\theta_{g'g''h'h''}(\tau) = \sum_{p', p'' \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i \times \left\{ (p'+\tfrac{g'}{2})^2\tau^1 + 2(p'+\tfrac{g'}{2})(p''+\tfrac{g''}{2})\tau^2 + (p''+\tfrac{g''}{2})^2\tau^3 + (p'+\tfrac{g'}{2})h' + (p''+\tfrac{g''}{2})h'' \right\})$$

で定めると $\lambda^i(\tau)$ は

$$\lambda^1(\tau) = (\theta_{1100}/\theta_{0100})^2(\theta_{1000}/\theta_{0000})^2$$

$$\lambda^2(\tau) = (\theta_{1100}/\theta_{0100})^2(\theta_{1001}/\theta_{0001})^2$$

$$\lambda^3(\tau) = (\theta_{1000}/\theta_{0000})^2(\theta_{1001}/\theta_{0001})^2$$

で与えられる。問題は

$$\pi_*(d\tau^1 d\tau^3 + d\tau^3 d\tau^1 - 2(d\tau^2)^2)$$

を $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ で表わすことであった。その計算には $\lambda^i(\tau)$

の特異点での状況を調べることと S_6 の簡単な不変式論とが必要である。計算は巨分なので省略して結論だけ述べると

$$\pi_*\left(d\tau^1 d\tau^3 + d\tau^3 d\tau^1 - 2(d\tau^2)^2\right)$$

$$\underset{\text{共形的}}{\cong} \quad (\lambda^1-\lambda^2)\lambda^3(\lambda^3-1)(d\lambda^1 d\lambda^2 + d\lambda^2 d\lambda^1)$$
$$+ (\lambda^2-\lambda^3)\lambda^1(\lambda^1-1)(d\lambda^2 d\lambda^3 + d\lambda^3 d\lambda^2)$$
$$+ (\lambda^3-\lambda^1)\lambda^2(\lambda^2-1)(d\lambda^3 d\lambda^1 + d\lambda^1 d\lambda^3)$$

となる。これから $\Gamma(2)$ に付随する UDE を求めるには §2 の定理を適用すればよい。

4. $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の超曲面

この § では §2 の定理を説明する。定理そのものはわかってしまえば計算で証明できるので共形計量 $\sum g_{ij}dx^i dx^j$ 及び Wilczynski の不変量 β, γ (§2.2) を説明することにする。

<u>4.1</u> まずユークリッド空間 E^{n+1} の超曲面 M^n を考えよう。∇ を E^{n+1} の Levi-Civita 接続；ν を M の単位法ベクトル；$X, Y \in T_pM$ を M の接ベクトルとすると，ベクトル $\nabla_X Y$ は M の接方向成分と直交成分とに分解される。

(2) $$\nabla_X Y = \nabla'_X Y + h(X,Y)\nu.$$

∇'が M 上の Levi-Civita 接続になり，h が M の第2基本形式とよばれている。この分解はユークリッド運動群によってかわらない。∇'と h との間には，超曲面として M が実現されていることを表現する重要な関係式 — Gauß の方程式と Codazzi-Minardi の方程式 — が成立する。これと同じことを $\mathbb{P}^{n+1}$ の超曲面について，射影変換群を運動群として，行いたい。まずわかることはこの運動群で不変な"法ベクトル"はとれそうにないことである。しかし，分解(2)の類似がやはり成立する。ω を $\mathbb{P}^{n+1}$ の標準射影接続形式とすると M についての一般的条件のもとで，一定のプロセスを行うと（後述のバンドルの reduction を行うこと），

(3) $$\omega|_M = \pi + \tau$$

という分解が成立し，π は M 上の共形接続を，τ は超曲面の（共変）不変量をあたえる。さらに，π と τ との間に関係式 — やはり Gauß, Codazzi-Minardi とよぶ — が成り立ち，これによって $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の超曲面が特徴づけられる。このことをもう少していねいにみてみよう。

<u>4.2</u> M^n を P^{n+1} の超曲面，$i: M \to P^{n+1}$; $e_0: M \to \mathbb{C}^{n+2} - \{0\}$ を i の local lift, $i(p) = [e_0(p)]$, とする。

(以下の議論は係数体に殆んどよらないので $P^{n+1}=P^{n+1}(R)$ でもよい)。 $e_1(p),\cdots,e_n(p)$ を $e_0(p)$ での M の接ベクトルの基とし, $e_{n+1}(p)$ を $e_0,e_1,\cdots,e_n$ 達とは独立なベクトルとする。C^{n+2} の行列式 $[\cdots]$ について, $[e_0,e_1,\cdots,e_{n+1}]=1$ としておく。このとき $e=\{e_0,e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$ を $p\in M$ での M に沿う射影枠 a projective frame とよぶ。p について滑らかとすると, 選び方より

$$
(4)\qquad \begin{cases} de_\alpha = \sum \omega_\alpha^{\beta} e_\beta & 0\le \alpha,\beta\le n+1 \\ \omega_0^{\,n+1}=0 \end{cases}
$$

となる一次微分式 ω_α^β が存在する。勿論 e のとり方に依存するが, $\omega^i=\omega_0^i$ $(1\le i\le n)$ は独立である。ここで (4) を e についての微分方程式と思えば可積分条件として

$$
(5)\qquad d\omega_\alpha^\beta = \sum \omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta
$$

が成立する。とくに $0=d\omega_0^{\,n+1}=\sum_{i=1}^{n}\omega^i\wedge\omega_i^{\,n+1}$ より対称テンソル h_{ij} があって

$$
\omega_i^{\,n+1}=\sum h_{ij}\omega^j \qquad 1\le i,j\le n
$$

とおける。そこで M 上の 2 次対称微分型式

$$
(6)\qquad \mathrm{II}=\sum h_{ij}\omega^i\omega^j
$$

を定義する。frame e によるから II_e とかく。別の frame $\tilde{e}$ をとったとき $\mathrm{II}_{\tilde{e}}$ と II_e はどういう関係

にあるだろうか？ e と $\tilde{e}$ は関係

$$\tilde{e} = ge \; ; \; g = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & n & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ \mu & c & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \end{array} \in PGL(n+2)$$

で結ばれることがわかることより

(7) $$\mathrm{II}_{\tilde{e}} = \lambda^2 \mathrm{II}_e$$

である。すなわち

「II_e の conformal class は frame e のとり方によらない」。

とくに (h_{ij}) が非退化のとき II は M 上の2次形式を定める。((h_{ij}) はユークリッド的に考えて超曲面の第2基本形式となるので，"非退化"の幾何的意味は了解して頂けると思う。例えば $\mathbb{R}$-係数で $(h_{ij}) > 0$ とは局所的に曲面が凸であること)。分解(3)の π は II に対応する正規共形接続である。簡単のため(frame をとりかえて) $h_{ij} = \delta_{ij}$ とできたとする。このような性質をもつ frames の全体はバンドルとなす。π の e への依存を表現するには π をこのバンドル上の微分形式と思うのが自然である。しかし，このバンドルはまだ大きすぎるので次のように reduction を行う。新しい tensor h_{ijk} を

$$\sum h_{ijk}\omega^k = dh_{ij} - \sum h_{ik}\omega_j^k - \sum h_{jk}\omega_i^k + (n+2)h_{ij}(\omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1})$$

によって定めよう。このとき $\sum h^{ij}h_{ijk}=0$ ((h^{ij}) は (h_{ij}) の逆行列) かつ $\omega_0^0+\omega_{n+1}^{n+1}=0$ となるように frame を制限できることがわかる。そうすると 3次対称形式

(8) $$\mathrm{III} = \sum h_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k$$

が不変な意味をもつこと，実際にはその conformal class が frame に依存しないことが証明される。これが Wilczynski の β, γ である: $\mathrm{III}=\beta dx^3+\gamma dy^3$。(ちなみに $\mathrm{II}=l\,dx^2+2dxdy+m\,dy^2$)。さらに，$\sum h_{ij}\omega_{n+1}^j-\omega_i^0=\sum l_{ij}\omega^j$ によって l_{ij} を定めるとき frame に $\sum h^{ij}l_{ij}=0$ という条件を課す。そのような frames の全体を P とおくと P は $\mathbb{C}^n\cdot CO(n)$ を fibre とするバンドルになる。このバンドルの上で π は一意的な意味をもち $\tau=\omega-\pi$ によって τ を定義すればよい。τ は h_{ijk}, l_{ij} 及び ω_{n+1}^0 より定まり，実は M 上の 1次微分形式とみなしてよいことがわかる。条件(5)を π と τ の言葉で書きかえた関係式を Gauss, Codazzi-Minardi の関係式という。すなわち

<u>定理</u> M^n を P^{n+1} 内の非退化超曲面とすると，M は 共形接続 π 及び "埋め込みの不変量" τ をもつ。逆に π 及び τ が与えられ Gauss, Codazzi-Minardi の関係式

をみたすとき，M は P^{n+1} の非退化超曲面として群 $PGL(n+2)$ の自由度を除いて一意的に定まる。ただし $n \geqq 3$ とする。▨

注3　$n=2$ のときは共形接続の特性によって別の扱いが，$n=1$ のときは Π のかわりに射影接続が出てくるので別の扱いが必要である。

系．Π が共形的に平坦であれば $\tau=0$ とするとき Gauß, Codazzi-Minardi の関係式が成立し，えられる曲面は2次超曲面である。▨

いずれも証明は省略する。詳しくは [S]，[SY3] をみて頂きたい。§2 の定理はこの系より方程式系 (C) と方程式系 (4) $de=\omega e$ の対応関係を与えれば，直ちに得られる。この対応は次のようにする。z を (C) の基本解系，すなわち $n+2$ 次元ベクトルとする。$z_1, \cdots, z_n$，z_{1n} を z の偏微分から得られるベクトルとする。このとき

$$e_0 = z, \quad e_1 = z_1, \cdots, e_n = z_n, \quad e_{n+1} = z_{1n}$$

と定める。(C) は ω を次のようにとることによって (4) にうつる。

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & dx^j & 0 \\ A^0_{ik}dx^k & A^j_{ik}dx^k & g_{ik}dx^k \\ B^0_k dx^k & B^j_k dx^k & G_k dx^k \end{pmatrix}。$$

ただし，B^i_k, G_k は (C) をもう一度微分して得られる方程式

$$z_{1jn} = G_j z_{1n} + B_j^k z_k + B_j^\circ z$$

の係数である。

参考文献

[K] N.H. Kuiper, On conformally flat spaces in the large, Ann. of Math. 50(1949), 916-924.

[S] T. Sasaki, On the projective geometry of hypersurfaces, Equations differentielles dans le champ complexe (Colloque franco-japonais 1985), Hermann (1987).

[SY1] T. Sasaki & M. Yoshida, Linear differential equations in two variables of rank four I, preprint 1987.

[SY2] T. Sasaki & M. Yoshida, Linear differential equations in two variables of rank four II - The uniformizing equation of a Hilbert modular orbifold, preprint 1987.

[SY3] T. Sasaki & M. Yoshida, Linear differential equations modeled after hyperquadrics, preprint 1987.

[W] E.J. Wilczynski, Projective differential geometry of curved surfaces: first memoir,Trans. AMS 8(1907),233-260;fourth memoir, ibid. 10(1909),176-200.

[Y1] M. Yoshida, Fuchsian differential equations, (aspects in math.), Vieweg Verlag 1987.

[Y2] M. Yoshida, in preparation.