数理解析研究所講究録
第 639 巻 1988 年 130-140

L^2コホモロジーと交叉ホモロジー

大沢健夫　(京大数理研)
Takeo OHSAWA

$\bar{X}$を複素数体$\mathbf{C}$上の準射影的代数多様体（特異点を許す）とする。解析空間として$\bar{X}$は$\mathbf{C}P^N$の部分空間だから、Fubini-Study計量を$\bar{X}$の非特異部分Xに制限してXを一つのKähler多様体と見なす事が出来る。この微分幾何的特徴を代数多様体の研究に生かす事によって、W.V.D.Hodge氏は非常に美しい定理を導いた。

<u>Hodgeの定理</u>　Xがコンパクトならば

$$(*)\quad \begin{aligned} H^r(X) &\cong \oplus_{p+q=r} H^{p,q}(X) \\ H^{p,q}(X) &\cong H^{q,p}(X) \end{aligned}$$

但し、H^r 及び $H^{p,q}$ はそれぞれ de Rham 及び Dolbeault の意味のコホモロジーを表す。

この結果は P.Deligne氏によって一般化された。彼によれば、$H^r(\bar{X})$内には$\bar{X}$の完備化（コンパクト化）の非特異モデル$\hat{X}$と双有理対応 $\bar{X} \longrightarrow \hat{X}$ とによって定まる(*)を一般化した構造が存在し、それはfunctorialである（よって特に非特異モデルのとりかたによらない）。筆者は $\bar{\partial}$ 方程式に関する興味からHodgeの定理の別の一般化を問題にして、Deligne氏の理論とは独立に次の結果を得た。以下$\bar{X}$は常にコンパクトとする。

<u>定理1</u>　$\mathrm{Sing}\bar{X} := \bar{X} \setminus X$ の $\bar{X}$ に於ける余次元をkとせよ。このとき $r < k-1$ 及び $p+q < k-1$ の範囲で(*)が成立する。

この定理の証明にはL^2コホモロジーを用いる。即ち(*)式の両辺がそれぞ

れ対応するL^2コホモロジー群に同型であることを示すという方法である。そこで、上の範囲以外の次数についてL^2コホモロジー群が何であるかを調べたところ次のことがわかった。

定理２　X上に、Fubini-Study 計量と cohomologuous かつ完備なKähler計量 ds^2 が存在して、

$$(\dagger) \qquad H^r_{(2)}(X) \cong IH_{2n-r}(X^-).$$

但し $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, $H^r_{(2)}$ は ds^2 に関するL^2コホモロジー, IH_{2n-r} は交叉ホモロジーを表す。

系　　rが奇数ならば $\dim_{\mathbb{C}} IH_r(X^-) \equiv 0 \pmod 2$.

この系自体は既に斎藤盛彦氏によって(cf.[S])全く異なる方法で証明されている。

本稿の目的は、背景の説明は一切抜きにして定理１、定理２の証明の概略を述べることである。証明の詳細又は関連した結果については、拙著[O-1,2,3,4] 及び竹腰氏との共著[O-T]に発表、又は発表予定である。また [O-1] の内容は本講究録中の長瀬氏の結果と相補うものなので、そのことについても触れるであろう。

§１．L^2コホモロジーと通常のコホモロジー

MをC^∞級可微分多様体とする。M上の(複素数値)C^∞級r形式全体の空間を$C^r(M)$で表す。外微分作用素 $d: C^r(M) \longrightarrow C^{r+1}(M)$ の核を Z^r、像をB^rとしたとき、商加群 Z^r/B^r をMのr次 de Rham コホモロジー群といい $H^r(M)$ で表す。また、$C^r_0(M) := \{ f \in C^r(M) \mid \mathrm{supp}\, f \subset\subset M\}$ とおき、dの$C^r_0(M)$上への制限 $d|C^r_0(M)$ の核の、$d|C^{r-1}_0(M)$ の像による商加群を $H^r_0(M)$ で表す。以下 M はパラコンパクトであるとし、MのRiemann計量 ds^2_M を固定する。M上の２乗可積分r形式全体のなす Hilbert 空間を $L^r(M)$ とすると、$C^r_0(M)$は$L^r(M)$の稠密な部分空間であるから、$L^r(M) \times L^{r+1}(M)$内で $d|C^r_0(M)$ のグラフの閉包を取ることにより閉作

用素　d^- が定義される。d^-の核を N^r、像を R^r としたとき N^r/R^{r-1} を Riemann 多様体(M, ds^2_M) の r 次L^2コホモロジー群といい $H^r_{(2)}(M)$ で表す。良く知られているように、m次元開球 B^m のユークリッド計量に関するL²コホモロジー群について $H^r_{(2)}(B^m) = \{0\}$ （$r > 0$）が成立する。これは、$H^r(M)$ 或は $H^r_0(M)$の定義に於いて $C^r(M)$ のかわりに局所２乗可積分 r 形式全体の空間を考えても良いと言うことだから、包含関係 $C^r_0(M) \subset L^r(M)$ から導かれる自然な写像　$\iota : H^r_0(M) \longrightarrow H^r_{(2)}(M)$ が次の完全列の一部であることがわかる。

$$\lim_{K \subset\subset M} H^{r-1}_{(2)}(M \backslash K) \longrightarrow H^r_0(M) \longrightarrow H^r_{(2)}(M) \longrightarrow \lim_{K \subset\subset M} H^r_{(2)}(M \backslash K)$$

従って、$H^r_0(M) \cong H^r_{(2)}(M)$　である為の一つの判定条件として

$$(1) \qquad \lim_{K \subset\subset M} H^{r-1}_{(2)}(M \diagdown K) = \lim_{K \subset\subset M} H^r_{(2)}(M \diagdown K) = \{0\}$$

を得る。計量　ds^2_M が完備ならば(即ち測地球が常に相対コンパクトならば)調和形式の空間の双対性とPoincaréの双対性定理により、

“(1) かつ　$\dim H^{m-r}(M) < \infty$” ならば　$H^{m-r}(M) \cong H^{m-r}_{(2)}(M)$

を得る。但し$m = \dim M$.

Mが複素多様体の場合、$C^{p,q}(M)$ をM上のC^∞級 (p, q)型微分形式全体の空間とし、複素外微分作用素 $\bar\partial : C^{p,q}(M) \longrightarrow C^{p,q+1}(M)$ に対し上と同様に核を$Z^{p,q}$像を$B^{p,q}$と置いて、$Z^{p,q}/B^{p,q}$ をMの (p, q)型 Dolbeaultコホモロジー群と呼び$H^{p,q}(M)$で表す。また$C^{p,q}_0(M) := C^{p,q}(M) \cap C^{p+q}_0(M)$と置き、$\mathrm{Ker}(d|C^{p,q}_0(M))/\mathrm{Im}(d|C^{p,q-1}_0(M))$を $H^{p,q}_0(M)$で表す。MがHermite計量をもつ場合、$L^r(M)$の元で(p, q)型のもの全体から成る部分空間を$L^{p,q}(M)$とおき、前の様にグラフの閉包を取ることによって$\bar\partial$を閉作用素として拡張しておいてからL²コホモロジー群$H^{p,q}_{(2)}(M)$を定義すると、上と同様の議論によって、同型　$H^{p,q}_0(M) \cong H^{p,q}_{(2)}(M)$　が成り立つための判定条件

$$(2) \qquad \lim_{K \subset\subset M} H^{p,q-1}_{(2)}(M \diagdown K) = \lim_{K \subset\subset M} H^{p,q}_{(2)}(M \diagdown K) = \{0\}$$

を得る。Mの計量が完備ならば、上と同様にSerre-Malgrangeの双対性定理の系として

"(2)かつ$\dim H^{n-p,n-q}(M)<\infty$" ならば$H^{n-p,n-q}(M)\cong H^{n-p,n-q}_{(2)}(M)$

を得る。但し $n=\dim_{\mathbb{C}} M$ とする。

§2. 定理1の証明の概略

$\dim_{\mathbb{C}}X=n$とする。定理1を示すには、X上の完備Kähler計量で

$$(!)\qquad \lim_{K\subset\subset X} H^{p,q}_{(2)}(X\setminus K) = \{0\},\qquad p+q>2n-k$$

となるものが存在する事を言えば十分である。実際、$q<k-1$ならばAndreotti-Grauertの有限性定理（cf.［A-G］)によって $\dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X)<\infty$ だから、(!)が成り立てば§1で述べた様に、

$$H^{p,q}(X)\cong H^{p,q}_{(2)}(X),\qquad p+q<k-1$$

が成立する。さらに計量のKähler 性を使うと、調和形式を見ることにより

$$H^{p,q}_{(2)}(X)\cong H^{q,p}_{(2)}(X)$$

を得る。よってまず（*）の片方

$$H^{p,q}(X)\cong H^{q,p}(X),\qquad p+q<k-1$$

が言えたことになる。つぎに

$$H^{r}(X)\cong \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(X),\qquad r<k-1$$

の証明であるが、$p+q<k-1$のとき$H^{p,q}(X)\cong H^{p,q}_{(2)}(X)$であるので再び調和形式を用いる議論によって、任意の$\beta\in H^{p,q}(X)$に対しβの代表元

$u\in C^{p,q}(X)$で $\partial u=\bar{\partial}u=0$ を満たすものが取れることが分かる。しかも次数$p+q-1$の微分形式についてこのことを用いると、もし上のようなuに対してある$v\in C^{p,q-1}(X)$があって$\bar{\partial}v=u$となるならば、$\partial v'=0$を満たす$v'\in C^{p,q-1}(X)$で$\bar{\partial}v'=u$となるものも存在することが言える。このことから準同型 $\bigoplus_{p+q=r}H^{p,q}(X)\longrightarrow H^{r}(X)$を得る。これが全単射であることの証明も上と同様である。

さて、実は次のようなC^{∞}級発散関数 $\varphi: X\longrightarrow(-\infty,0]$ が存在すれば(!)が成り立つ

(!') あるc $c_0\in\mathbf{R}$が存在して、$\varphi(x)<c_0$なる限り

1) $|\partial\varphi(x)|^2<1/12$

2) $|\partial\bar{\partial}\varphi(x)|<2n$

3) $\partial\bar{\partial}\varphi(x)$の固有値$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n$につき、
$1\leq j\leq k$のとき $1-1/4n<\lambda_j<1+1/4n$ かつ
$j>k$のとき $-1/4n<\lambda_j$.

但し、$|\partial\varphi(x)|$, $|\partial\bar{\partial}\varphi(x)|$はそれぞれ $\partial\varphi(x)$, $\partial\bar{\partial}\varphi(x)$ の長さを表す。

実際、このとき下位集合$X_c:=\{x|\varphi(x)<c\}$上のL^2コホモロジーについて、制限写像から導かれる準同型

$$H^{p,q}_{(2)}(X_c)\longrightarrow H^{p,q}_{(2)}(X_{c'})$$

が $c'<c<c_0$, $p+q>2n-k$ なる条件下で零写像であることが言える。その証明は基本的にはよく知られた秋月－中野の消滅定理と同様であるから、詳しくは拙論［O-2］を参照されたい。また条件(!')を満たす発散関数をもつ計量は、空間対$(X^-,\mathrm{Sing}X^-)$の（$\mathbf{C}P^N$, $\mathbf{C}P^{N'}$）（但し$N\gg N'\gg0$）への埋入を使って、$\mathbf{C}P^N\setminus\mathbf{C}P^{N'}$ 上の完備Kähler計量

$$N^{-1}\partial\bar{\partial}\log\left(\|z\|^{2N}/\left(\textstyle\sum_{i=0}^{N'}(|z_i|^2/\|z\|^2)\log(|z_i|^2/\|z'\|^2)+N+1\right)\right)$$

を引き戻すことによって得られる。これに対して φ としては、

$$-N^{-1}\log(\Sigma_{i=0}^{N'}(|z_i|^2/\|z\|^2)\log(|z_i|^2/\|z'\|^2)+N+1)$$

を引き戻したものを取れば良い。但し、$(z_0:\cdots:z_N)$ を $\mathbf{C}P^N$の同次座標、$\mathbf{C}P^{N'}$ の定義式を $z_{N'+1}=\cdots=z_N=0$ とし、$z':=(z_{N'+1}:\cdots:z_N)$ とおいた。

§3. 交叉ホモロジー

今までどおりX^-をコンパクトn次元射影的代数多様体、Sing X^- をその特異点集合とせよ。広中の特異点解消定理により、正則な位相的埋入 $\iota:(X^-, \mathrm{Sing}X^-)\subset(\mathbf{C}P^N, \mathbf{C}P^{N'})$が存在して、$\mathbf{C}P^{N'}$ を中心とする二次変換 と ι とのファイバー積の一つの既約成分としてX^-の一つの非特異モデル$X^\wedge$を作ることが出来る。更に、これに付随した自然な双有理写像 $\phi: X^\wedge \longrightarrow X^-$ による$\mathrm{Sing}X^-$の逆像が正規交叉因子であるようにできる。以後、上のような非特異モデル$X^\wedge$と写像ϕを固定して考える。まず広中の定理の系としてつぎの命題を得る。

<u>命題1</u> X^-の部分空間の降下列 $X^-=X_n\supset X_{n-1}=\mathrm{Sing}X^-\supset\cdots\supset X_0$ で、次の性質をもつものが存在する。

i) X_jの各既約成分の次元はjである。

ii) $X_j\setminus X_{j-1}$は非特異である。

iii) 任意の点$x\in X_j\setminus X_{j-1}$に対し、$x$の$X^-\setminus X_{j-1}$における近傍$U$および正則な retraction $r: U\longrightarrow U\cap X_j$が存在して、$(\phi^{-1}(U), \phi^{-1}(U\cap X_{n-1}))$ は $(\phi^{-1}(r^{-1}(x)), \phi^{-1}(r^{-1}(x)\cap X_{n-1}))$ と $U\cap X_j$ との直積にC^∞級可微分同相である。

上の条件 iii)は特に $X_j\setminus X_{j-1}$の管状近傍が局所的には直積の構造をもつことを言っており、降下列 $X_n\supset\cdots\supset X_0$がホモロジー論的構造を持つことを示唆している。さて命題1から分るように、X^-は各X_jを部分複体とする単体的複体の構造をもつ。その i次元$\mathbf{C}$係数チェイン全体の集合を$C_i(X^-)$と書こう。

<u>定義</u> $C_i(X^-)$ の元 ξ で $\dim|\xi|\cap X_{n-j}\leq i-j-1$ かつ $\dim|\partial\xi|\cap X_{n-j}\leq i-j-2$ を満たすもの全体の集合を $IC_i(X^-)$ とし、

$$IH_i(X^-):=\{\ \xi\in IC_i(X^-)\mid\partial\xi=0\ \}/\{\ \partial\eta\ \mid\ \eta\in IC_{i+1}(X^-)\ \}$$

とおく。$IH_i(X^-)$をX^-の i 次交叉ホモロジー群と言う。

つぎに交叉ホモロジー群の基本的性質を述べよう。証明は［B］を参照されたい。

命題２　$IH_i(X^-)$はX^-の位相不変量である。よって特に降下列及び単体分割の取り方によらない。

定理３　X^-上の細層からなる複体$S^\circ=\{S^r,\ d^r\}_{r\geq0}$がつぎの条件1), 2), 3)をすべて満たすとする。

1)　任意の整数 r に対し局所コホモロジー層 $\mathcal{H}^r(S^\circ)$ は各 $X_j\setminus X_{j-1}$ 上局所定数層である。

2)　$\mathcal{H}^0(S^\circ)|X\cong\mathbf{C}_X$, かつ　$r\geq1$のとき $\mathcal{H}^r(S^\circ)|X=\{0\}$ 。但し $\mathbf{C}_X$ はX上の(rankが１の)定数層とする。

3)　任意の点$x\in X_j\setminus X_{j-1}$に対し x の近傍$U\subset X^-\setminus X_{j-1}$が存在して、 $r\geq n-j$ のとき $H^r(U,S^\circ|U)=\{0\}$ であり $r\leq n-j-1$ のとき制限準同型により $H^r(U,S^\circ|U)\cong H^r(U\setminus X_j,S^\circ|U\setminus X_j)$ となる。

このときすべての r に対し　$H^r(X^-,S^\circ)\cong IH_{2n-r}(X^-)$　である。

§４. 定理２の証明(スケッチ)

定理３をあてはめる事を考えよう。いま計量が与えられたとして、開集合$U\subset X^-$ に$\mathbf{C}$加群 $L^r(U\cap X)$ を対応させることによってX^-上の層 $\mathcal{L}^r$ が定まる。さらに $\mathcal{L}^r$ の部分層 $\mathcal{W}^r$ を

$$\mathcal{W}^r(U):=\ \{f\in\mathcal{L}^r(U)\ \mid\ d^-f\in\mathcal{L}^{r+1}(U)\}$$

とおいて定義すると 各 $\mathcal{W}^r$ は細層であり、d^-を余境界作用素として持つ複体 $\mathcal{W}^\circ=\{\mathcal{W}^r, d^-\}_{r\geq 0}$ が得られる。明らかに $H^r_{(2)}(X)\cong H^r(\mathcal{W}^\circ(X^-))$.
よって定理３より、$\mathcal{W}^\circ$が 上の1), 2), 3) を満たすような計量に対してはX上のL^2コホモロジーについて(†)が成り立つ。そのような計量は、§３で与えられた埋入 $\iota:(X^-, \mathrm{Sing}X^-)\longrightarrow(\mathbf{C}P^N, \mathbf{C}P^{N'})$ を用いて$\mathbf{C}P^N\setminus\mathbf{C}P^{N'}$上の計量

$$d\sigma^2:=\partial\bar\partial\,(\log(\Sigma_{i=0}^{N'}(|z_i|^2/\|z\|^2)\log(|z_i|^2/\|z'\|^2)+N+1))^{-1}$$
$$+\ \partial\bar\partial\log\|z\|^{2N}$$

を引き戻すことにより得られる。この計量 $\iota^*d\sigma^2$ について1),2),3)が成り立つ理由であるが、2) については既に述べたので(cf. §１)他の二つについて述べよう。まず 1) は次の補題の系である。

<u>補題３</u> (cf. [O-4])　 $\mathcal{C}$ を $X^\wedge$ 上のC^∞級関数の芽の層とせよ。計量$\iota^*d\sigma^2$に関して、任意の整数 r 及び $x\in X^\wedge$に対し $\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{H}^r{}_x(\phi^*\mathcal{W}^\circ\otimes_{\mathbf{C}}\mathcal{C})<\infty$.

実際、命題１, iii)より各stratum $X_j\setminus X_{j-1}$に沿って$\iota^*d\sigma^2$の特異性は一様なので、1)を言うために必要なことは局所コホモロジー$\mathcal{H}^r(\mathcal{W}^\circ)$の(各点毎の)有限次元性のみであり、今 ϕ は固有な連続写像だからそれは上からすぐ従う。次に 3) であるが、§１における議論と同様にして、L^2コホモロジーの消滅を言う前半から制限写像の同型を言う後半が従うので、示すべきことは

任意の$x\in X_j\setminus X_{j-1}$に対し、$r\geq n-j$ ならば $\mathcal{H}^r{}_x(\mathcal{W}^\circ)=\{0\}$.

だけとなる。このことは次元に関する帰納法により$x\in X_0$の場合に示せば十分である。ところが$\iota^*d\sigma^2$の定義から、定理１の証明におけると同様に、$r>n$ならば $\mathcal{H}^r(\mathcal{W}^\circ)=\{0\}$ であることがわかる。よって、後は

(‡)　　$\mathcal{H}^n{}_x(\mathcal{W}^\circ)=\{0\}$,　　$x\in X_0$.

の証明を残すのみとなった。これを言うには二つの補題を必要とする。まず記号を用意しよう。$\Delta\subset\mathbf{C}$を原点中心の単位円盤、$\Delta^*:=\Delta\setminus\{0\}$とせよ。$\mathbf{C}^{m+n}$の座標を $z=(z_1,\cdots,z_{m+n})$とし、$f(z):=z_{m+1}\cdot\cdots\cdot z_{m+n}$とおく。$\mathbf{C}^{m+n}$上のユークリッド計量を$ds_e{}^2$と書き、$\Delta^m\times\Delta^{*n}$上の計量$ds^2{}_f$を次の式により定める。

$$ds^2{}_f:=\frac{ds_e{}^2}{(1-\log|f|)\log^2(2-\log|f|)}+\frac{df d\bar{f}}{|f|^2(1-\log|f|)^2\log^2(2-\log|f|)}$$

開集合$U\subset\Delta^m\times\Delta^{*n}$に対し、$ds_e{}^2, ds^2{}_f$に関して２乗可積分なＵ上のｒ形式全体の集合をそれぞれ$L^r{}_e(U), L^r(U)_f$と書こう。簡単のため

$$L^r{}_e(U)_f:=L^r{}_e(U)\cap L^r(U)_f$$

とおく。

補題４(cf.［Ｏ－3])　$du=0$ をみたす$u\in L^r(\Delta^m\times\Delta^{*n})_f$に対して原点の開近傍Ｖが存在して、

i)　$r=m+n$ ならば、$V\cap(\Delta^m\times\Delta^{*n})$上$dv=u$なる$L^{m+n-1}{}_e(V\cap(\Delta^m\times\Delta^{*n}))_f$の元ｖが存在する。

ii)　$0<r\leq m+n-1$ のとき、さらに $u\in L^r{}_e(\Delta^m\times\Delta^{*n})$ならば、$V\cap(\Delta^m\times\Delta^{*n})$上 $dv=u$ を満たす$L^{r-1}{}_e(V\cap(\Delta^m\times\Delta^{*n}))_f$ の元ｖが存在する。

さて包含写像　$X\subset X^-$ を改めてｊとおき、ｊ及び$\phi:X^\wedge\longrightarrow X^-$による定数層のｒ次順像 $R^r j_*\mathbf{C}_X$, $R^r\phi_*\mathbf{C}_{X^\wedge}$ を考え、二つの自然準同型

$$\alpha^r: R^r\phi_*\mathbf{C}_{X^\wedge}\longrightarrow R^r j_*\mathbf{C}_X$$

$$\beta^r: R^r\phi_*\mathbf{C}_{X^\wedge}\longrightarrow R^0 j_* j^* R^r\phi_*\mathbf{C}_{X^\wedge}$$

の関係を見る。次の補題は他の目的にも有用であると思われる。

補題５(cf.［Ｏ－4])　$r\geq n$ ならば $\mathrm{Ker}\,\beta^r\subset\mathrm{Ker}\,\alpha^r$.

(‡)の証明　　$x\in X_0\subset\mathrm{Sing}X^-$ であるが、計量 $\iota^*d\sigma^2$ の決め方を見れば、補題４により、$\mathcal{H}^n{}_x(\mathcal{W}^\circ)$の任意の元は$\phi^{-1}(x)$の近傍上に$C^\infty$級に拡張可能なｎ形式で代表される事がわかる。それをｇとせよ。X_0はdiscreteだから、

帰納法の仮定より x の近傍Wが存在して、任意の $y\in W\setminus\{x\}$ に対して g は $(R^n\phi_*\mathbf{C}_X)_y$の０元を代表するとして構わない。よって補題５により、近傍 $W'\ni x$ が存在して $g|W'\setminus \mathrm{Sing}X^-$ は０に cohomologuousとなる。ϕ^*g は $\phi^{-1}(W')$上に C^∞級 n 形式として拡張できるから、$\phi^{-1}(\mathrm{Sing}X^-)$に沿って対数的極をもつ或る$(n-1)$形式 h が存在して $\phi^*g|\phi^{-1}(W'\setminus\mathrm{Sing}X^-)=dh$ となる。ところが容易に確かめられるように、$\phi^{-1}(\mathrm{Sing}X^-)$に沿って対数的極をもつ$(n-1)$形式は$\phi^*\iota^*d\sigma^2$に関して（$\phi^{-1}(\mathrm{Sing}X^-)$の近傍上）２乗可積分である。これは g が $\mathscr{H}^n{}_x(\mathscr{W}^\circ)$ の０元を代表する事を示す。

§５．関連した話題

１．次の予想は有名である。

<u>Cheeger-Goreski-MacPhersonの予想</u>(cf.[C-G-M]) Fubini-Study計量に関して $H^r{}_{(2)}(X)\cong IH_{2n-r}(X^-)$.

$\dim_{\mathbf{C}}X^-=2$ の場合の証明はW.C.Hsiang氏とV.Pati氏 [H-P]により与えられた。証明には難点があったが長瀬氏の仕事[N]はそれを完全にしながらL^2コホモロジーの解析的な側面を詳しく調べたものである。一般次元の場合には次の結果がある。

<u>定理４</u>(cf.[O-1]) $\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Sing}X^-=0$ ならば、$r\neq n,\ n\pm1$ のときFubibi-Study計量に関して $H^r{}_{(2)}(X)\cong IH_{2n-r}(X^-)$.

当然次も予想されるが筆者はまだ答えを知らない。

<u>予想</u>　$\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Sing}X^-=\ell$ のとき、$|r-n|>\ell+1$ ならば Fubini-Study計量に関して $H^r{}_{(2)}(X)\cong IH_{2n-r}(X^-)$.

２．　$D\subset\mathbf{C}^n$を対称有界領域、$\Gamma\subset\mathrm{Aut}(D)$を捩れのない数論的部分群とする。$D/\Gamma$の佐武コンパクト化$D^-/\Gamma$に対してつぎが成立することがE.Looijenga氏によって証明された由である。(これは柏原正樹氏にご教示戴いた。)

<u>定理５</u>　不変計量に関して $H^r{}_{(2)}(D/\Gamma)\cong IH_{2n-r}(D^-/\Gamma)$.

3. 開Riemann多様体上のL^2コホモロジー或は調和形式については、他に多くのことが知られており枚挙に暇がない。しかしHodgeの定理に関するものはあまり多くないようである。ここでは比較的新しいものとして次の二つの結果を紹介しておこう。

<u>定理6</u>(cf. H. Donnelly-C. Fefferman[D-F]) $D \subset \mathbf{C}^n$を強擬凸な有界領域とする。このときBergman計量に関して、$p+q \neq n$ ならば $H^{p,q}_{(2)}(D) = \{0\}$, $p+q=n$ ならば $\dim_{\mathbf{C}} H^{p,q}_{(2)}(D) = \infty$.

<u>定理7</u>(cf. 大沢-竹腰[O-T], Corollary4.2) n次元完備Hermite多様体(X, ds^2)上に、勾配有界なC^∞級発散関数 $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ でXのコンパクト集合を除いて $\partial\bar{\partial}\varphi = ds^2$ となるものが存在するとき、$p+q>n$ ならば $H^{p,q}(X) \cong H^{p,q}_{(2)}(X)$.

<u>系</u>　n次元Kähler多様体内の相対コンパクトな強擬凸領域に対して、$r>n$および$p+q>n$の範囲で(*)が成立する。(冒頭のHodgeの定理を見よ。)

参考文献

[A-G] Andreotti,A.-Grauert,H., Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull.Soc.Math.France,90(1962),193-259.

[B] Borel,A. et al., Intersection cohomology, Birkhäuser,1984.

[C-G-M] Cheeger,J.-Goresky,M.-MacPherson,R.,L^2-cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties,Ann.Math.Stud.102, Seminar on Differential Geometry , 1982, 303-340.

[D-F] Donnelly,H.-Fefferman,C. L^2-cohomology and index theorems for the Bergman metric, Ann.Math.118(1983) 593-618.

[N] Nagase,M., Remarks on the L^2-cohomology of singular algebraic surfaces, Preprint.

[O-1] Ohsawa,T., Hodge spectral sequence on compact Kähler spaces, Publ.RIMS,Kyoto Univ. 23(1987),265-274.

[O-2],Hodge spectral sequence and symmetry on compact Kähler spaces, Publ.RIMS,Kyoto Univ.23(1987),613-625.

[O-3] An extension of Hodge Theory to Kähler spaces with isolated singularities, preprint.

[O-4] In preparation.

[O-T] Ohsawa,T.-Takegoshi,K., Hodge spectral sequence on pseudoconvex domains, to appear in Math.Zeit.110 (1987).

[S] Saito,Morihiko, RIMS Preprint.