数理解析研究所講究録
第639巻 1988年 154-171


# Deformations and unfoldings of complex analytic singular foliations

北大理(教養) 諏訪 立雄 (Tatsuo Suwa)

特異点を持たない葉層構造の変形理論は, Kodaira-Spencer [7] に始まり, 葉層構造の特性類の問題とも関連し, Heitsch [6], Duchamp-Kalka [2], Girbau-Haefliger-Sundararaman [3], Girbau-Nicolau [4] 等により研究されている. 特異点のある場合については最近 X. Gomez-Mont, G. Pourcin, H.-J. Reiffen 等により研究され, またこの場合には筆者等による開折(unfolding)の理論がある. 最近これらの人々と直接会う機会があり, 変形理論と開折理論の間の関係が明らかになってきたので, ここに特に formal な mechanism に重点をおいて記したい.

以下 $X$ を $n$ 次元(連結)複素多様体, $\mathcal{O}_X$ を構造層とする. さらに, $TX$, $T^*X$ をそれぞれ正則接ベクトル束, 正則余接ベクトル束とし, $\mathcal{J}_X^{p,q} = \mathcal{O}_X(\overset{p}{\otimes} TX \otimes \overset{q}{\otimes} T^*X)$, $\Theta_X = \mathcal{J}_X^{1,0}$, $\Omega_X^q = \mathcal{O}_X(\overset{q}{\wedge} T^*X)$ とおく.

## 1. $\mathcal{J}_X^{p,q}$ の部分層の変形理論

この節の内容は Gomez-Mont [5] による.

(1.1) 定義 $F$ を $\mathcal{J}_X^{p,q}$ の連接部分層とするとき, $F$ の変形 (deformation) は次のものからなる:

(I) $X$ の変形 $f: \mathcal{X} \to S$, つまり $\mathcal{X}$, $S$ は解析空間, $f$ は smooth な正則写像で, $S$ のある点 $0$ に対し, $f^{-1}(0) = X$ となるもの. $X$ が compact のときは, $f$ は proper とする. 以下 $f$ の相対ベクトル束を $Tf$ とする.

(II) $\mathcal{J}_f^{p,q} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\overset{p}{\otimes} Tf \otimes \overset{q}{\otimes} T^*f)$ の連接部分層 $\mathcal{F}$ で, $\mathcal{J}_f^{p,q}/\mathcal{F}$ が $S$-flat かつ $\mathcal{F}|X = F$ となるもの.

特に上で $S = A$, $\mathcal{O}_A = \mathbb{C}\{t\}/(t^2)$ のときの変形を一次(無限小)変形という. 次に一次変形の同値類の集合を求める. $X$ の十分小さい Stein 座標近傍による被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$ をとる. $f: \mathcal{X} \to A$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}_f^{p,q}$ を $F$ の一次変形とすると, まず $f$ より Kodaira-Spencer の cocycle $\theta = \{\theta^{\lambda\mu}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \Theta)$ が定まる. つまり, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ は $U_\lambda$ 上 $\mathcal{O}_{U_\lambda} \oplus t\,\mathcal{O}_{U_\lambda}$ (mod $t^2$) に同型で, $U_\lambda \cap U_\mu$ 上では $f^\lambda + t g^\lambda \in \mathcal{O}_{U_\lambda} \oplus t\,\mathcal{O}_{U_\lambda}$ と $f^\mu + t g^\mu \in \mathcal{O}_{U_\mu} \oplus t\,\mathcal{O}_{U_\mu}$ を $f^\mu + t g^\mu = (I + t\theta^{\lambda\mu})(f^\lambda + t g^\lambda)$ (mod $t^2$) のとき同一視して得られ, $\mathcal{J}_f^{p,q}$ は $U_\lambda$ 上 $\mathcal{J}_{U_\lambda}^{p,q} \oplus t\,\mathcal{J}_{U_\lambda}^{p,q}$ に同型で, $U_\lambda \cap U_\mu$ 上では $v^\lambda + t w^\lambda \in \mathcal{J}_{U_\lambda}^{p,q} \oplus t\,\mathcal{J}_{U_\lambda}^{p,q}$ と $v^\mu + t w^\mu \in$

$\mathcal{J}^{p,q}_{U_\mu} \oplus t\mathcal{J}^{p,q}_{U_\mu}$ は $v^\mu + tw^\mu = (I + tL_{\theta^{\lambda\mu}})(v^\lambda + tw^\lambda)$ のとき同一視される．ここで $L_{\theta^{\lambda\mu}}$ はベクトル場 $\theta^{\lambda\mu}$ による Lie 微分である．一方，$\mathcal{F}$ は $U_\lambda$ 上 $F_{U_\lambda} \oplus tF_{U_\lambda}$ に同型で，単射 $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{J}^{p,q}_{\mathcal{F}}$ は $U_\lambda$ 上 $I + t\eta_\lambda : F_{U_\lambda} \oplus tF_{U_\lambda} \to \mathcal{J}^{p,q}_{U_\lambda} \oplus t\mathcal{J}^{p,q}_{U_\lambda}$，$\eta_\lambda \in \Gamma(U_\lambda, \mathcal{H}om_{\Theta}(F, \mathcal{J}^{p,q}_X))$ で与えられる．$\mathcal{J}^{p,q}_X$ から $\mathcal{J}^{p,q}_X/F$ への射影を $\pi$ とし，$\bar{\eta}^\lambda = \pi\eta^\lambda$ とおくと，0-cochain $\eta = \{\bar{\eta}^\lambda\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}om(F, \mathcal{J}^{p,q}_X/F))$ が定まり，$U_\lambda \cap U_\mu$ 上では

(1.2) $\bar{\eta}_\lambda - \bar{\eta}_\mu = \pi L_{\theta^{\lambda\mu}}$

がなりたつ．従って次の複体

(1.3) $0 \longrightarrow \Theta_X \xrightarrow{D} \mathcal{H}om(F, \mathcal{J}^{p,q}_X/F) \longrightarrow 0$，

$Dv = \pi L_v$，$v \in \Theta_X$，を考えると，これの hyper-cohomology 群 $\mathbb{H}^p_D(X, F)$ は 2 重複体

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to & & C^0(\mathcal{U}, \Theta_X) & \xrightarrow{D} & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}om(F, \mathcal{J}^{p,q}_X/F)) & \to & 0 \\
 & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \\
0 \to & & C^1(\mathcal{U}, \Theta_X) & \xrightarrow{D} & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}om(F, \mathcal{J}^{p,q}_X/F)) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

の一重化の cohomology 群として表わせるので，(1.2) より対 $(\theta, \eta)$ は $\mathbb{H}^1_D(X, F)$ の元を定め，またこれが 0 であるためには $\mathcal{F}$ が一次変形として自明であることが必要十分と

なることは容易に確かめられる．結局，Fの一次変形の同値類全体の集合は $\mathbb{H}^1_D(X, F)$ でとえられる．次の定理は Douady [1] の方法を用いて証明される．

(1.3) 定理 (Gomez-Mont [5])．$X$ が compact のとき，$\mathcal{J}_X^{p,q}$ の連接部分層 F の普遍変形 (Kuranishi 族) が存在する．この変形の parameter 空間の接空間は $\mathbb{H}^1_D(X, F)$ に一致する．

## 2. 特異葉層構造 (ベクトル場の立場より)．

一般に $\mathcal{S}$ が連接 $\mathcal{O}_X$-加群のとき，

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{S}) = \{x \in X \mid \mathcal{S}_x \text{ は } \mathcal{O}_{X,x}\text{-自由でない}\}$$

とおき，$\mathcal{S}$ の階数は局所自由層 $\mathcal{S}|X-\mathrm{Sing}(\mathcal{S})$ の階数と定める．

$E$ が $\Theta_X$ の連接部分層のとき，$\Theta_E = \Theta_X/E$，$S(E) = \mathrm{Sing}(\Theta_E)$ $(\supset \mathrm{Sing}(E))$ とおく．

(2.1) 定義．$X$ 上の (特異) 葉層構造とは，$\Theta_X$ の連接部分層 $E$ で，積分可能条件

$$[E_x, E_x] \subset E_x, \qquad \forall x \in X$$

をみたすものをいう．

$E$ が reduced であるとは，$E$ が $\Theta_X$ の中で full，つまり，$X$ の任意の開集合 $U$ に対し，

$$\Gamma(U, \Theta_X) \cap \Gamma(U - S(E), E) = \Gamma(U, E)$$

となること(このときは, 積分可能条件は

$$[E_x, E_x] \subset E_x, \quad \forall x \in X - S(E)$$

でよい).

以下, $E$を$X$上の葉層構造とする.

(2.2) 定義. $E$の変形はつぎのものからなる.

(I) $X$の変形 $f: \mathcal{X} \to S$,

(II) $E$の, $\Theta_X$の部分層としての変形 $\mathcal{E} \subset \Theta_f (= \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(Tf))$ で, 積分可能条件

$$[\mathcal{E}, \mathcal{E}] \subset \mathcal{E}$$

をみたすもの.

$E$の積分可能条件を用いて, (1.3)の複体は次のように高次に拡張できる:

(2.3) $0 \to \Theta_X \xrightarrow{D} \mathcal{H}om(E, \Theta_E) \xrightarrow{D} \mathcal{H}om(\overset{2}{\wedge}E, \Theta_E) \xrightarrow{D} \cdots$ ,

ここで, $D: \mathcal{H}om(\overset{p}{\wedge}E, \Theta_E) \to \mathcal{H}om(\overset{p+1}{\wedge}E, \Theta_E)$ は

$$(D\eta)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} [v_i, \eta(v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_{p+1})]$$

$$+ \sum_{1 \le i < j \le p+1} (-1)^{i+j} \eta([v_i, v_j] \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge \hat{v}_j \wedge \cdots \wedge v_{p+1})$$

により定義される. 複体(2.3)の hypercohomology 群を $\mathbb{H}^p_D(X, E)$ で表わすと, 1節と同様にして, $E$の一次変形の

同値類全体の集合は $\mathbb{H}^1_D(X, E)$ で与えられることが分る（積分可能条件も自動的にくり込まれる）。

<u>(2.4) 定理 (Gomez-Mont [5], Pourcin [8]).</u> $X$ が compact のとき，$X$ 上の特異葉層構造 $E$ の普遍変形が存在する．この変形の parameter 空間の接空間は $\mathbb{H}^1_D(X, E)$ に一致する．

さて容易に分るように，複体 (2.3) は次の複体の完全列に拡張できる；

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
0 & \to & E & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Theta_X & \xrightarrow{D} & \mathcal{H}om(E, \Theta_E) & \xrightarrow{D} & \mathcal{H}om(\wedge^2 E, \Theta_E) & \xrightarrow{D} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Theta_E & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}om(E, \Theta_E) & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}om(\wedge^2 E, \Theta_E) & \xrightarrow{d} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\tag{2.5}
$$

第2行の D-複体の cohomology 層を $\mathcal{H}^p_D(E)$ で表わし，第3行の d-複体のを $\mathcal{H}^p_d(E)$ で表わす．特異点のない場合は，$\mathcal{H}^0_D(E)$ は Kodaira-Spencer [7] の Γ-ベクトル場の層，$\mathcal{H}^0_d(E)$ は Heitsch [6] の Γ-ベクトル場の層と一致する．一般には次の完全列の可換図式がある：

$$(2.6)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Theta_X \arrow[r] & \Theta_E \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[r] & \mathcal{H}^0_D(E) \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=-90] & \mathcal{H}^0_d(E) \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=-90] & 0 \end{tikzcd}$$

(2.5), (2.6) より次の可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H^1(X,E) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\ 0 \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{H}^0_D(E)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{H}^1_D(X,E) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X,\mathcal{H}^1_D(E)) \arrow[r] \arrow[d, "="] & H^2(X,\mathcal{H}^0_D(E)) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{H}^0_d(E)) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{H}^1_d(X,E) \arrow[r] \arrow[dl] & H^0(X,\mathcal{H}^1_d(E)) \arrow[r] & H^2(X,\mathcal{H}^0_d(E)) \\ & H^2(X,E) & & & \end{tikzcd}$$

各行各列は完全である．前に述べたように，$\mathbb{H}^1_D(X,E)$ は $E$ の一次変形の同値類の集合を表わす．一方 $\mathbb{H}^1_d(X,E)$ は $E$ の transverse structure の一次変形の同値類の集合を，$H^1(X,E)$ は $E$ の transverse structure をかえない一次変形の同値類を表わす．特異点のない場合は $\mathcal{H}^1_D(E)=\mathcal{H}^1_d(E)=0$ であるので，$\mathbb{H}^1_D(X,E)=H^1(X,\mathcal{H}^0_D(E))$，$\mathbb{H}^1_d(X,E)=H^1(X,\mathcal{H}^0_d(E))$ となり，これらはそれぞれ，[7] および [6] で考えられた cohomology 群である．

## 3. 特異葉層構造（一形式の立場より）

$F$ が $\Omega_X\ (=\Omega^1_X)$ の連接部分層のとき，$\Omega_F=\Omega_X/F$，

$S(F) = \mathrm{Sing}(\Omega_F)\ (\supset \mathrm{Sing}(F))$ とおく.

(3.1) 定義. $X$ 上の(特異)葉層構造とは, $\Omega_X$ の連接部分層 $F$ で, 積分可能条件

$$dF_x \subset (\Omega_X \wedge F)_x\ , \quad {}^\forall x \in X - S(F)$$

をみたすものをいう.

さらに $F$ が reduced であるとは, $F$ が $\Omega_X$ の中で full であること.

(3.2) Remark. $E \subset \Theta_X$ を (2.1) 定義の意味の葉層構造とし,

$$F = E^a = \{\omega \in \Omega_X \mid {}^\forall v \in E,\ \langle \omega, v \rangle = 0\}$$

($E$ の annihilator)

とおくと, $F$ は (3.1) 定義の意味で reduced な葉層構造となる。また $F$ が (3.1) の意味の葉層構造のとき,

$$E = F^a = \{v \in \Theta_X \mid {}^\forall \omega \in F,\ \langle \omega, v \rangle = 0\}$$

とおくと, $E$ は (2.1) の意味の reduced な葉層構造となる.

以下 $F$ を $X$ 上の葉層構造とする

(3.3) 定義. $F$ の変形は次のものからなる:

(I) $X$ の変形 $f : \mathscr{X} \to S$,

(II) $F$ の, $\Omega_X$ の部分層としての変形 $\mathscr{F} \subset \Omega_f\ (= \mathcal{O}_{\mathscr{X}}(T^* f))$ で, 積分可能条件

$$d_x \mathcal{F}_x \subset (\Omega_f \wedge \mathcal{F})_x \quad , \quad x \in \mathfrak{X} - S(\mathcal{F})$$

をみたすもの. ここで, 上の $d_x$ は $f$ のファイバー方向の外微分を表し, $S(\mathcal{F}) = \mathrm{Sing}(\Omega_f / \mathcal{F})$ とおく.

$F$ の一次変形の同値類の集合を $D(F)$ とすると, $D(F)$ は (1.3) の複体

(3.4) $\quad 0 \to \Theta_X \xrightarrow{D} \mathcal{H}om(F, \Omega_F) \to 0$

の hypercohomology 群 $\mathbb{H}^1_D(X, F)$ の元のうち, 積分可能条件をみたすものの集合となる.

(3.5) 定理 (Reiffen [9]). $X$ が compact のとき, $X$ 上の特異葉層構造 $F$ の普遍変形が存在する.

さて, $E = F^a$ とおくと, 複体 (3.4) は次の複体の完全列に拡張できる.

$$
(3.6) \quad
\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & E & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Theta_X & \xrightarrow{D} & \mathcal{H}om(F, \Omega_F) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Theta_E & \xrightarrow{d} & \mathcal{H}om(F, \Omega_F) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & .
\end{array}
$$

第2行の D-複体の cohomology 層を $\mathcal{H}^p_D(F)$ で表わし, 第

3行の$d$－複体のを $\mathcal{H}^p_d(F)$ で表わすと，(2.6)と同様の図式を得，(3.6)を考慮すると，次の可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
 & & H^1(X,E) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{H}^0_D(F)) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathbb{H}^1_D(X,F) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X,\mathcal{H}^1_D(F)) \arrow[r] \arrow[d, "="] & H^2(X,\mathcal{H}^0_D(F)) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{H}^0_d(F)) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{H}^1_d(X,F) \arrow[r] \arrow[dl] & H^0(X,\mathcal{H}^1_d(F)) \arrow[r] & H^2(X,\mathcal{H}^0_d(F)) \\
 & & H^2(X,E) & & &
\end{tikzcd}$$

各行各列は完全である．$H^1(X,E)\to\mathbb{H}^1_D(X,F)$ の像は $D(F)$ に含まれ，$D(F)$ の $\mathbb{H}^1_D(X,F)\to\mathbb{H}^1_d(X,F)$ による像は $F$ の transversal structure の一次変形の同値類の集合となる．

## 4. 特異葉層構造の開折理論

$F\subset\Omega_X$ を $X$ 上の特異葉層構造とし，この節では $F$ は，階数 $q$ の局所自由層とする．

(4.1) 定義．$F$ の開折(unfolding)は次のものからなる：

(I) $X$ の変形 $f:\mathcal{X}\to S$，

(II) $\mathcal{X}$ 上の階数 $q$ の局所自由な葉層構造 $\mathcal{F}\subset\Omega_{\mathcal{X}}$ で，

$\alpha(\mathcal{F})|_X=F$ となるもの．ここで

$$\alpha:\Omega_{\mathcal{X}}\to\Omega_f$$

は標準的全射（従って $\alpha(\mathcal{F})$ は (3.3) の意味で $F$ の変形

となる).

変形のときと同様に, $S=A$, $\mathcal{O}_A=\mathbb{C}\{t\}/(t^2)$ のときの開折を一次(無限小)開折という. 次に一次開折の同値類の集合を求める. $X$ の十分小さい Stein 座標近傍による被覆 $\mathfrak{U}=\{U_\lambda\}$ をとっておく. $f:\mathcal{X}\to A$, $\mathcal{F}\subset\Omega_{\mathcal{X}}$ を一次開折とし, 第1節におけるように, $\theta=\{\theta^{\lambda\mu}\}\in Z^1(\mathfrak{U},\Theta)$ を Kodaira-Spencer の cocycle とする. (4.1)(II) より完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_{\mathcal{X}}|_X & \xrightarrow{\alpha} & \Omega_X & \to & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathcal{F}|_X & \xrightarrow{\sim} & F & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & & 0 & & \end{array}$$

を得る. $\beta$ を標準的全射 $\mathcal{F}\to\mathcal{F}|_X$ とすると, $\mathcal{F}$ の元 $\tilde{\omega}$ に対し, $\beta(\tilde{\omega})$ は $\tilde{\omega}$ の $X$ への解析的制限を, $\alpha\beta(\tilde{\omega})$ は $\tilde{\omega}$ の $X$ への微分形式としての制限を与える. $\Gamma(U_\lambda,F)$ の任意の元 $\omega$ に対し, $\Gamma(U_\lambda,\mathcal{F})$ の元 $\tilde{\omega}$ で $\alpha\beta(\tilde{\omega})=\omega$ となるものが存在するが,

(4.2) $\tilde{\omega}\equiv\omega+\omega^{(1)}t+h\,dt \pmod{t^2,\ t\,dt}$,

$\omega^{(1)}\in\Gamma(U_\lambda,\Omega_X)$, $h\in\Gamma(U_\lambda,\mathcal{O}_X)$ と表わしておくと, $\alpha$ を $\mathcal{F}|_X$ に制限したものは同型写像であるため, $h$ は $\omega$ により

unique に定まる（$\omega^{(1)}$ は mod $F$ で unique に定まる）．
$\varphi^\lambda$ を $\omega$ に $h$ を対応させる写像とすると，0-cocycle

$$\varphi=\{\varphi^\lambda\}\in C^0(\mathcal{U},F^*)\ ,\qquad F^*=\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(F,\mathcal{O})$$

が定まる．$U_\lambda\cap U_\mu$ 上では

(4.3) $\quad\langle\omega,\theta^{\lambda\mu}\rangle=\varphi^\mu(\omega)-\varphi^\lambda(\omega)\quad,\ \omega\in\Gamma(U_\lambda\cap U_\mu,F)$

がなりたつ．完全列

(4.4) $\quad 0\to F\to\Omega_X\xrightarrow{\pi}\Omega_F\to 0$

において，$\mathcal{H}om(\Omega_X,\mathcal{O})=\Theta_X$ に注意すると，複体

(4.5) $\quad 0\to\Theta_X\to F^*\to 0\qquad(v\mapsto\langle\ ,v\rangle)$

を得る．これより2重複体

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C^0(\mathcal{U},\Theta_X) & \to & C^0(\mathcal{U},F^*) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C^1(\mathcal{U},\Theta_X) & \to & C^1(\mathcal{U},F^*) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

を得るが，(4.3)より対$(\theta,\varphi)$は複体(4.4)の1次 hyper-cohomology 群の元を定め，これが0であるためには，$F$ が一次開折として自明であることが必要十分であることが分る．一方，(4.4)を局所自由層による $\Omega_F$ の resolution とみると，(4.5)の hypercohomology 群は $Ext^p_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O})$ に一致することが分る．以上より，$F$ の一次開折の同値類の集合を $U(F)$ と

すると，$\mathrm{T}(F)$ は $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O})$ のうち積分可能条件をみたすものの集合となる．

$\mathcal{F}$ が $F$ の一次開折のとき，(4.1)で述べたように，$\alpha(\mathcal{F})$ は $F$ の一次変形であるので，$\mathcal{F}$ から上のように定まる対 $(\theta,\varphi)$ の同値類に対し，$\alpha(\mathcal{F})$ から第1，3節で述べたように定まる対 $(\theta,\eta)$ を対応させることにより写像

$$(4.6)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{T}(F) & \longrightarrow & \mathrm{D}(F) \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O}) & & \mathbb{H}^1_D(X,F) \end{array}$$

を得る．$\eta=\{\eta^\lambda\}\in C^0(\mathcal{U},\mathcal{H}om(F,\Omega_F))$ は具体的には次のように与えられる．$\omega\in\Gamma(U_\lambda,F)$ が与えられたとき，$\alpha\beta(\tilde{\omega})=\omega$ となる $\tilde{\omega}\in\Gamma(U_\lambda,\mathcal{F})$ をとり(4.2)のように表わすと $\eta^\lambda$ は $\omega$ に $\pi(\omega^{(1)})$ を対応させるものである（$\pi$ は(4.4)の標準的全射）．

## 5. 余次元1の局所葉層構造

この節では標記の場合に(4.6)の写像を分析してみる．すべて $\mathbb{C}^n$ の原点 $0$ での芽で考えることとし，$\mathcal{O}=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$，$\Theta=\Theta_{\mathbb{C}^n,0}$，$\Omega=\Omega_{\mathbb{C}^n,0}$ とおく．余次元1の局所葉層構造は $\Omega$ の階数1の部分 $\mathcal{O}$-加群 $F=(\omega)$ で積分可能条件 $d\omega\wedge\omega=0$ をみたす生成元 $\omega$ をもつものと定義される．$S(F)$ は $\omega$ の零点集合に他ならない．以下 $F$ は reduced と

仮定する．これは $\mathrm{codim}\, S(F) \geq 2$ と同値である．$\Omega_F = \Omega/F$ とおき，$\pi$ を (4.4) と同様，標準的全射 $\Omega \to \Omega_F$ とする．(3.4) の複体において，$F \simeq \mathcal{O}$ だから $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(F, \Omega_F) \simeq \Omega_F$．従って

$$L(\omega) = \{ L_v(\omega) \mid v \in \Theta \}$$

とおくと

$$\mathcal{H}^1_D(F) = \Omega_F / \pi L(\omega) \simeq \Omega / L(\omega) + F$$

となる．一方 (4.5) の複体において $F^* \simeq \mathcal{O}$ だから，

$$J(\omega) = \{ \langle \omega, v \rangle \mid v \in \Theta \} \quad (\omega \text{ の Jacobian ideal})$$

とおくと

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F, \mathcal{O}) = \mathcal{O}/J(\omega)$$

となる．今 $\mathcal{F} = (\tilde{\omega})$ を $F$ の一次変形とし，

$$\tilde{\omega} \equiv \omega + \omega^{(1)} t \quad \mathrm{mod}\ t^2,$$

$\omega^{(1)} \in \Omega$ と表わしておくと，$\mathcal{F}$ の定める $\mathcal{H}^1_D(F)$ の元は $\omega^{(1)}$ の $\Omega/L(\omega) + F$ における類である．積分可能条件は

$$(5.1) \qquad d\omega^{(1)} \wedge \omega + d\omega \wedge \omega^{(1)} = 0$$

で与えられる．また $\mathcal{F} = (\tilde{\omega})$ が $F$ の一次開折のとき

$$\tilde{\omega} \equiv \omega + \omega^{(1)} t + h\, dt \quad \mathrm{mod}\ t^2, t\,dt,$$

$\omega^{(1)} \in \Omega$, $h \in \mathcal{O}$ と表わしておくと $\mathcal{F}$ の定める $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F, \mathcal{O})$ の元は $h$ の $\mathcal{O}/J(\omega)$ における類である．積分可能条件は

$$(5.2)\begin{cases} d\omega^{(1)}\wedge\omega + d\omega\wedge\omega^{(1)} = 0 \ , \\ h\,d\omega + (\omega^{(1)} - dh)\wedge\omega = 0 \ . \end{cases}$$

で与えられるが，1番目の式は2番目から容易に導き出せる.

次の補題は積分可能条件 $d\omega\wedge\omega = 0$ より従う

(5.3)補題. $\Theta$ の任意の元 $v$ に対し

$$\begin{cases} d(L_v\omega)\wedge\omega + d\omega\wedge L_v\omega = 0 \ , \\ \langle\omega, v\rangle d\omega + (L_v\omega - d\langle\omega, v\rangle)\wedge\omega = 0 \ . \end{cases}$$

ここで，さらに次のような代数的対象を考える：

$$\Omega'(\omega) = \{\theta\in\Omega \mid d\theta\wedge\omega + d\omega\wedge\theta = 0\},$$

$$\Omega(\omega) = \{\theta\in\Omega \mid \exists h\in\mathcal{O},\ h\,d\omega + (\theta - dh)\wedge\omega = 0\},$$

$$I(\omega) = \{h\in\mathcal{O} \mid \exists\eta\in\Omega,\ h\,d\omega = \eta\wedge\omega\},$$

$$K(\omega) = \{h\in\mathcal{O} \mid h\,d\omega = dh\wedge\omega\} \quad (\omega\text{の積分因子}).$$

$\Omega'(\omega)$ は $\mathbb{C}$-ベクトル空間の構造を持ち，$\Omega(\omega)$ はその部分空間である. (5.3)補題より，$L(\omega) + F \subset \Omega(\omega)$ が分る. $I(\omega)$ は $\mathcal{O}$ の ideal で $K(\omega)$ は $I(\omega)$ の部分ベクトル空間である. (5.3)より $J(\omega)$ は $I(\omega)$ の部分 ideal であることが分る. 形式の空間と関数の空間は一次積分可能条件 $h\,d\omega + (\theta - dh)\wedge\omega = 0$ により次のように結びつく.

(5.4)命題.

$$\Omega(\omega)/L(\omega) + F \simeq I(\omega)/J(\omega) + K(\omega) \ .$$

以上より, $D(F)$と$\mathcal{U}(F)$の間には次のような関係がある：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1_D(F) & \simeq & \Omega/L(\omega)+F \\ \cup & & \cup \\ D(F) & \simeq & \Omega'(\omega)/L(\omega)+F \supset \Omega(\omega)/L(\omega)+F \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}/J(\omega) & \mathrm{Ext}^1(\Omega_F,\mathcal{O}) \\ & \cup & \cup \\ \simeq I(\omega)/J(\omega)+K(\omega) \leftarrow & I(\omega)/J(\omega) \simeq & \mathcal{U}(F). \end{array}$$

従って次の完全列がある.

(5.5) $\quad 0 \to K(\omega)/J(\omega)\cap K(\omega) \longrightarrow \mathcal{U}(F) \longrightarrow D(F)$

これより, $\omega$が($J(\omega)$に含まれない)積分因子をもつと, $F$の開折で, 変形としては自明でも, 開折としては自明でないものがあり得る((5.7)例参照).

(5.6) Remarks. 1°. 葉層構造の開折理論においては普通のmorphismの他にRL-morphismが自然に定義される([12]). 普通のmorphismは関数の開折理論における*right* morphismの拡張で, RL-morphismは*right-left* morphismの拡張である([13]).

2°. $\mathcal{U}_{RL}(F)$をFの一次開折のRL-同値類の集合とすると,

$$\mathcal{U}_{RL}(F) = I(\omega)/J(\omega)+K(\omega)$$

となり, (5.5)の写像 $\mathcal{U}(F)\to D(F)$の像は$\mathcal{U}_{RL}(F)$(と同型)となる. またFの開折が変形として自明であるためにはRL-自明な開折となることが必要十分となる.

3°. 普通のmorphism, RL-morphismに対し, 普遍性定理が

なりたつ([10],[12]).

(5.7) 例. (J.-F. Mattei) $\mathcal{F}$ を

$$\omega = (y^2 + x^3)\,dx - xy\,dy$$

で生成される $\mathbb{C}^2 = \{(x, y)\}$ 上の葉層構造とする.

$$\tilde{\omega} = (y^2 + x^3)\,dx - xy\,dy + x^3\,dt$$

とおくと, $d\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0$ となり $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\omega})$ は $\mathcal{F}$ の開折を定める. これを $\mathcal{F}$ の変形と考えると $dt$ 項がなくなるので, もちろん自明であるが, $x^3 \in K(\omega)$, $x^3 \notin J(\omega)$ なので開折としては自明でない (RL-自明ではある).

## References

[1] A. Douady, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier 16 (1966) 1-95.

[2] T. Duchamp and M. Kalka, Deformation theory for holomorphic foliations, J. Diff. Geom. 14 (1979) 317-337.

[3] J. Girbau, A. Haefliger and D. Sundararaman, On deformations of transversely holomorphic foliations, J. für die reine und ang. Math. 345 (1983) 122-147.

[4] J. Girbau and M. Nicolau, Deformations of holomorphic foliations and transversely holomorphic foliations, preprint.

[5] X. Gomez-Mont, The transverse dynamics of a holomorphic flow, preprint.

[6] J. Heitsch, A cohomology for foliated manifolds, Comment. Math. Helvetici 50 (1975) 197-218.

[7] K. Kodaira and D. C. Spencer, Multifoliate structures, Ann. of Math. 74 (1961) 52-100.

[8] G. Pourcin, Deformations of singular holomorphic foliations on reduced compact $\mathbb{C}$-analytic spaces, preprint.

[9] H.-J. Reiffen, The variety of moduli of foliations on a compact complex space, preprint.

[10] T. Suwa, A theorem of versality for unfoldings of complex analytic foliation singularities, Invent. math. 65 (1981) 29-48.

[11] T. Suwa, Unfoldings of complex analytic foliations with singularities, Japan. J. Math. 9 (1983) 181-206.

[12] T. Suwa, The versality theorem for RL-morphisms of foliation unfoldings, Advanced Studies in Pure Math. 8, Complex Analytic Singularities, ed. by T. Suwa and P. Wagreich, Kinokuniya and North-Holland 1986, 599-631.

[13] T. Suwa, A factorization theorem for unfoldings of analytic functions, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.