数理解析研究所講究録
第 639 巻 1988 年 200-209

ある種のファイバー空間の変形と周期写像

(滋賀大教育．Max Planck Institute)
斎藤政彦 (Masa-Hiko Saito)

1. 楕円曲面の局所変形は A. Kas の Thesis によって調べられ，その中で1次の無限小変形 (1^{st} order Infinitesimal deformation，以下 1^{st} I.D.) が obstruction を持つ，すなわち倉西空間の次元が $\dim H^1(X, \Theta_X)$ よりも真に小さい例が発見された。その後，幾つかの例が発見された (cf. Namba [4], p11, for References) が，Burns-Wahl [1] が，曲面の中の (-2)-curve E ($\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $E \cong \mathbb{P}^1$, $N_E \cong \mathcal{O}_E(-2)$) の存在が，曲面の 1^{st} order I.D. に1次元分寄与する事を示し，node のみをもつを持つ $\mathbb{P}^3$ の超曲面の minimal resolution の 1^{st} order Inf. Def に obstruction があるための必要十分条件を得た。さらに，A. Kas [3] は Burns-Wahl の結果を受けて，曲面 X の (-2)-curve E に対応する 1^{st} order I.D. $\theta_E \in H^1(X, \Theta_X)$ に対し local な計算のみから $[\theta_E, \theta_E] \in H^2(X, \Theta_X)$ (primary obstruction) を計算した。彼はこれにより，楕円曲面を含む，

(-2) curve を含むファイバー空間の構造をもつ曲面を計算し，obstructed な曲面が多く存在する事を示した。

一方，楕円曲面 X の 2^{nd} cohomology $H^2(X,\mathbb{C})$ の Hodge 構造を用いた Infinitesimal Torelli 定理は，[5]によって調べられたが，ほとんどの楕円曲面に対し，上の定理が成立するのに対し，幾つかの Kas の例の中に成立しない反例が見出された。この成立しない例は，曲線の Prym 多様体（分キをゆるした）の変形理論により説明される。これは，容易に高次元のファイバー空間の Infinitesimal Torelli の反例に拡張される。[6]

さてこの高次元の例は，ある意味で Kas の例の拡張になっていると思われる。（上記の (-2)-curve E のかわりに，$Y^{n-1} \subset X^n$ $Y \to S^3$ $\mathbb{P}^1$ bundle $N_{Y\subset X} \cong \mathcal{O}_Y(-2)$，$\mathcal{O}_Y(1)$ tautological bundle なるものの存在を考え，これが $H^1(X,\Theta_X)$ にどのように寄与するかはわかる。）

以下，この高次元の例の変形について調べた事をのべる。現在の所証明は完成していないが，この例は，1^{st} oder Inf deformation に obstruction を持つと思われる。さらに高次元の変形に際し，2次元の rational double point の simultaneous Resolution と違った現像が見られ，これらは高次元の分類の際に singularity を許した minimal model を考えなければ

いけない事にも関係して興味深い。

2．さて，以下考える例について述べておく。($n \geq 2$とする)

$B \subset \mathbb{P}^{n-1}$ ： 非特異超曲面 (degree $B = 2d$, $d \geq 2$)

$\pi_1 : Z \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ ： double cover branched along B

C ： 非特異代数曲線　g = genus of C

$\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(C)$, $\deg \mathcal{L} = l \geq 0$ s.t. $H^0(C, \mathcal{L}^2) \neq 0$

$\delta = P_1 + \cdots + P_{2l} \in C$ s.t. $\mathcal{O}_C(\delta) \cong \mathcal{L}^2$

($P_i \neq P_j$; $(i \neq j)$ と仮定する)

$\pi_2 : \tilde{C} \longrightarrow C$ double cover branched at δ

and s.t. $\pi_{2*}\mathcal{O}_{\tilde{C}} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}$.

これらを用意し，$Z \times \tilde{C} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \times C$ なる分岐被覆を考える。これは Galois 被覆であり，Galois群は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ である。$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (diagonal) を考え，それに対応する多様体を $\overline{X}$ と書く。すなわち，

$$\overline{X} = Z \times \tilde{C} / \langle \iota_1 \times \iota_2 \rangle$$

(ι_1, ι_2 は Z, $\tilde{C}$ の involution).

$$\begin{tikzcd}
 & Z \times \tilde{C} \arrow[dl] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr] & \\
\mathbb{P}^{n-1} \times \tilde{C} \arrow[dr] & \overline{X} \arrow[d, "v"'] & Z \times C \arrow[dl] \\
 & \mathbb{P}^{n-1} \times C &
\end{tikzcd}$$

さて、 $Z \to \mathbb{P}^{n-1}$ の ramification locus をやはり $B \subset Z$ と書く。 $B \times S \subset Z \times \tilde{C}$ が involution $\iota_1 \times \iota_2$ の fixed set であり、 $u : Z \times \tilde{C} \to \bar{X}$ による像 $u(B \times S)$ に沿って $\bar{X}$ は特異点を持つ。その特異点は局所的には (A_1 型) × (smooth variety) の形をしている事に注意する。このような特異点を A_1 型とよぶ事にしよう。 $u(B \times S) = \bar{B} \times \bar{S}$ と書く。 $\bar{B} \times \bar{S}$ は $\bar{X}$ の中で余次元 2 である。この特異点集合にそって 1回 Blow up すると、非特異な多様体 X を得る。又 canonical な写像 $\bar{f} : \bar{X} \to C$ は自然に $f : X \to C$ へと拡張される。

(1)
$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \bar{X} \arrow[d, "\bar{f}"] \\
 & C
\end{tikzcd}
$$

f のファイバーは、 $p \in C - S \Rightarrow f^{-1}(p) = Z$, $p = p_i \in S \Rightarrow$
$f^{-1}(p_i) = 2D_i + E_i$, $D_i \cong \mathbb{P}^{n-1}$, $E_i = \pi^{-1}(\bar{B} \times \bar{p}_i)$,
$\pi_i : E_i \to B$: $\mathbb{P}^1$-bundle $E_i \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_B \oplus \mathcal{O}_B(-d)$.
である。($\mathcal{O}_B(1) = \iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$, $\iota : B \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$)

$$N_{E_i \subset X} \cong \mathcal{O}_{E_i}(-2) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-2) .$$

3.　2で述べた X および $\overline{X}$ の変形について述べよう。$\overline{X}$ は cyclic quotient singularity をもつから、(normal) V-variety (Steenbrink, 佐武) である。$\overline{X}$ の singular locus を Σ $(=\overline{B}\times\delta)$ と書き $j:\overline{X}-\Sigma \hookrightarrow \overline{X}$ を埋め込みとする時

$$\Theta_{\overline{X}} \cong j_* \Theta_{\overline{X}-\Sigma}$$
$$\Omega^p_{\overline{X}} \cong j_* \Omega^p_{\overline{X}-\Sigma} \qquad (p \geq 1)$$

と定義する。($\Omega^p_{\overline{X}}$ は普通の Kähler differential の定義と違うが、$\Theta_{\overline{X}}$ は通常のものと一致する。)

$\overline{X}$ の倉西空間の Zariski tangent space は

$$\mathbb{T}^1_X = \mathrm{Ext}^1(\overline{X}; \Omega^1_{\overline{X}}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$$

で与えられる。さて $T^1_X \cong \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{\overline{X}}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ (local ext.) とおくと、次の exact sequence がある。

$$0 \to H^1(\overline{X}, \Theta_{\overline{X}}) \to \mathbb{T}^1_X \to H^0(\overline{X}, T^1_X)$$
$$\to H^2(\overline{X}, \Theta_{\overline{X}}) \to$$

さて、§2の状況のもとで、次がわかる。

命題 1. (1) $(d-n)(g+l-2)>0$, $n \geq 3$ ならば

$$H^1(\overline{X}, \Theta_{\overline{X}}) = H^1(Z, \Theta_Z) \oplus H^1(C, \Theta_C(-\delta))$$

(2) $n \geq 3 \Rightarrow H^2(\overline{X}, \Theta_{\overline{X}}) = H^1(Z, \Theta_Z) \otimes H^1(C, \mathcal{O}_C)$

(3) $\qquad T^1_X \cong \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_{\overline{X}}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \cong \oplus \mathcal{O}_{B_i}(2d)$, $B_i = \overline{B}\times P_i$

(証明) $H^i(\overline{X}, \Theta_{\overline{X}}) = H^i(Z\times\tilde{C}, \Theta_{Z\times\tilde{C}})^{\langle l_1 \times l_2 \rangle}$ (cf. e.g. Fujiki [2]) より (1), (2) は明らか。(3) は Fujiki [2], P125 を modify

すれば，$T_X^1 \cong \oplus(\wedge^2 N_{B_i \subset Z \times \tilde{C}})$ を得る。$N_{B_i \subset Z \times \tilde{C}} \cong \mathcal{O}_{B_i} \oplus \mathcal{O}_{B_i}(2d)$ より (3) を得る。

さて，$H^0(\bar{X}, T_X^1) = \bigoplus_{i=1}^{2l} H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(2d))$ の空間は $\bar{X}$ の singularity を smoothing する deformation を表す。これは，local には次の式で書ける。$B = \{F(x_0, \cdots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ とし $\mathbb{P}^{n-1} \times \Delta_t$ （$\Delta_t = \{t, |t| < \varepsilon\}$）の divisor を $tF(x_0, \cdots, x_n) = 0$ で定める。これの double cover $y^2 + tF(x_0, \cdots, x_n) = 0$ を考えれば，singular set は $y = t = F(x_0 \cdots x_n) = 0$ である。新たに $G(x_0, \cdots, x_n)$ を 2d 次斉次式とし，新たな変数 s を，付け加え，$\mathbb{P}^{n-1} \times \Delta_t \times \Delta_s$ 上で double cover $\mathcal{X}$: $y^2 + tF(x_0, \cdots, x_n) + sG(x_0, \cdots, x_n) = 0$ を考える。G を Generic に取り $s \neq 0$ を固定すると $\mathcal{X}_s$ は smooth である。しかし total space $\mathcal{X}$ は，$y = t = s = F = G = 0$ で singularity を持ち，さらに，$n \geq 3$ ならば，simultaneous resolution できない。（この $G \in H^0(B, \mathcal{O}_B(2d))$ に対応している。）

次に X の 1^{st} oder Infinitesimal deformation を考える。この時 $\bar{X}$ の 1^{st} oder I.D のうち，$H^1(\bar{X}, \Theta_{\bar{X}})$ に対応する部分は，$\bar{X}$ の local trivial な変形に対応し X の変形を導く。又 命題 1，(1) より

$H^1(\bar{X}, \Theta_{\bar{X}}) = H^1(Z, \Theta_Z) \oplus H^1(C, \Theta_C(-\delta))$ であり前者は

Z の変形（$(d-n)(g+l-2)>0$, $n \geqq 3$ なら double cover としての変形しかない）

後者は，C の変形と divisor δ の変形を表わす。これらはすべて実際に実現されるから unobstructed な変形である。

さて $X \supset \bigcup_{i=1}^{2l} E_i = E$ なる例外集合に注目し，次の2つの exact sequence

(2)

$$\to H^0(X, \Theta_X) \to H^0(U, \Theta_X) \to H^1_E(\Theta_X) \to H^1(X, \Theta_X) \to H^1(U, \Theta_X) \to$$

(3)

$$0 \to \Theta_X(-\log E) \to \Theta_X \to \underset{\bigoplus_{i=1}^{l} N_{E_i}}{\overset{\shortparallel}{N_E}} \to 0$$

命題 2. (1) $H^1_E(\Theta_X) \hookrightarrow H^1(X, \Theta_X)$

(2) $H^1_E(\Theta_X) \cong \bigoplus_{i=1}^{2l} H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(d))$

証明： $n=2$ の時の Burns-Wahl の証明（[1], (1.3)）に従う。すなわち $\pi : X \to \bar{X}$ に対し，$\pi_* \Theta_X = \Theta_{\bar{X}}$ なる事と $\bar{X}$ の normality から，$H^0(X, \Theta_X) \twoheadrightarrow H^0(U, \Theta_X)$ が従う。

(2) $H^1_E(\Theta_X) = \varinjlim_{m} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{mE}, X)$ を計算する。（略）

（注）

$n = \dim X = 2$ の時，E_i は，-2 curve $2ld$ 個の disjoint な集合である。又 B_i は点の集りであるから，$H^1_E(\Theta_X) \cong \oplus\, \mathbb{C}[E_{ij}]$

$\cong \mathbb{C}^{2ld}$. (1) と合せると，各 (−2)-curve が $H^1(X, \Theta_X)$ に独立に寄与する。A. Kas [3] によれば，この時 $d \geqq 2$, $g+l-1 \geqq 1$ ならば，このような1つ1つの (−2) curve に対応する，1st oder def. は obstructed.

(3) の exact sequence より次を得る。

命題 3.

(1) $0 \to H^0(X, \Theta_X(-\log E)) \to H^1(\Theta_X) \to H^1(E, N_E) \to 0$

(2) $H^1(E, N_E) \cong \bigoplus_{i=1}^{2l} H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(d))$

証明) (2): 命題 2, (2) の証明の途中で，$H^1_E(\Theta_X) \cong H^1(E, N_E)$ を得る。よって (2) を得る。(1) は (3) の exact sequence と $H^0(E, N_E) \cong H^0(E, \mathcal{O}_E(-2)) = 0$ 及び，$H^1_E(\Theta_X) \hookrightarrow H^1(\Theta_X)$ から逆に $H^1(\Theta_X) \twoheadrightarrow H^1(E, N_E)$ でなければならない。($H^1(E, N_E)$ は $E(\subset X)$ を変形で消してしまう変形に対応する。)

4. 上の命題3における，$H^1_E(\Theta_X) \cong H^1(E, N_E)$ を，X の変形の E による local contribution と呼ぶ。(Burns-Wahl [ ])
さて，ここで注目してほしいのは，$\overline{X}$ の変形の時の local

contribution $H^0(\overline{X}, T_X^1) \cong \oplus H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(2d))$ に対して $H_E^1(\Theta_X) \cong \oplus H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(d))$ と $\mathcal{O}_{B_i}(2d) \to \mathcal{O}_{B_i}(d)$ に置き代っている点である。これは次の事実に対応する。前と同様に $y^2 + tF(x_0, \cdots, x_n) = 0$ の変形を考えるが，今度は $\phi(x_0, \cdots x_n)$ という <u>d次</u>斉次式を取り，$\overline{\mathfrak{X}}: y^2 + tF + s^2\phi^2 = 0$ なる double cover を考える。$\overline{\mathfrak{X}} \to \mathbb{P}^{n-1} \times \Delta_t \times \Delta_s$ すると $\overline{\mathfrak{X}}$ は $y = t = F = s = 0$ と $y = t = F = \phi = 0$ にそって，small resolution を許す singularity を持つ。結果的に $\mathfrak{X} \to \overline{\mathfrak{X}}$ なる resolution が存在し $g: \mathfrak{X} \to \Delta_s$ は，$g^{-1}(0)$ の smooth な変形 になっている。この family の様子が $\phi \in H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(d))$ に対する smoothing の状況を表している。

さて，このようにして $H^1(\Theta_X)$ の local contribution は $f: X \to C$ の singular fiber の近傍で実現される事が，わかったが，X 上で global にこの local contribution にあたる部分の変形が実現されるかは別の問題である。

<u>予想</u>　$g(C) \geqq 1$ ならば，local contribution は obstructed であろう。

これが言えれば，X は obstructed な 1^{st} oder I.D を持つ例となる。

5. 終りに。上のファイバー空間 $f: X \to C$ の周期写像については [6] を見てほしい。

References

[1] D.M.Burns, J.M.Wahl.; Local Contributions of Global Deformations of Surfaces; Inv. Math. 26, 67-88 (1974)

[2] A. Fujiki; On Prymitive Symplectic Compact Kähler V-manifolds of dim. Four; Classification of Alg. and Analy. Manifold; Progress in Math. Vol 39. 71-250, 1982

[3] A.Kas; Ordinary double points and obstructed surfaces; Topology, Vol 16, 51-64, 1977

[4] M. Namba; Families of Meromorphic Functions on Compact Riemann surfaces; Lec. Note in Math. 767,

[5] M.-H. Saito: On the infinitesimal Torelli problem of elliptic surfaces; J. of Math, Kyoto Univ. 23-3, 441-460, 1983

[6] ——— ; Differentials of Prym maps and counterexamples of the infinitesimal Torelli theorem. preprint.