数理解析研究所講究録
第641巻 1988年 44-123

AN INVITATION TO ENUMERATIVE COMBINATORICS VIA COMMUTATIVE ALGEBRA

日比孝之（名古屋大学理学部）

Takayuki Hibi

“数え上げ” の組合せ論（enumerative combinatorics）とは，離散的な数学現象において，自然に現れる，有限集合の（有限または無限の）族 $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \cdots\}$ に対し，A_i の要素の個数を a_i とすることによって生じる数列 $a_0, a_1, \cdots$ を研究対象とする学問である．

1

空間で凸多面体 $\mathcal{P}$ (図-1参照)を考えよう. $\mathcal{P}$ の頂の個数を v, 辺の個数を e, 面の個数を f とすれば, 数列 v, e, f が定まる. この数列 v, e, f は, "数え上げ"の組合せ論のりっぱな研究対象であって, Euler の公式と呼ばれる等式 $v-e+f=2$ が成立することは周知である. 更に, 与えられた3つの自然数 v, e, f に対して, 頂点の個数が v, 辺の個数が e, 面の個数が f となる凸多面体 $\mathcal{P}$ が存在するための必要十分条件は, (i) $v-e+f=2$, (ii) $4 \leqq v \leqq 2f-4$, (iii) $4 \leqq f \leqq 2v-4$ が成立することである ——という事実も既知である.

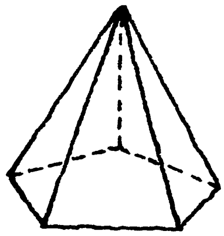


図-1

一般に, n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ に於ける有限個の点の凸閉包(convex hull)を凸多面体 (convex polytope) と言う. $\mathbb{B}^d$ を d 次元球 (ball) とすると, 凸多面体 $\mathcal{P}$ に対して, $\mathcal{P} \simeq \mathbb{B}^d$ [注意: $\simeq$ は位相同型を表す] となる整数 $d \geqq 0$ が存在する. d を $\mathcal{P}$ の次元 (dimension) と言い, $\dim \mathcal{P} = d$ と書く. $\mathcal{P}$ が埋め込まれている Euclid 空間の超平面 H が $\mathcal{P}$ の支持超平面

(supporting hyperplane)であるとは，$H \cap P \neq \phi$ かつ P が H の"上側"または"下側"に含まれる時を言う。そして，この時 $H \cap P$ を P の面(face)と呼ぶ。

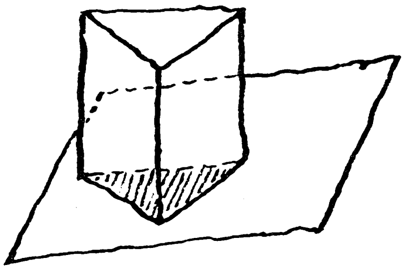


図-2

凸多面体 P は有限個の面を持ち，それぞれの面は再び凸多面体である。P の面の次元とは，その面の凸多面体としての次元であると定義する。0次元の面を頂点(vertex)，1次元の面を辺(edge)，また P が d 次元の時，$d-1$ 次元の面を facet と呼ぶ。通常，P 自身を P の面には含めないが，空集合 ϕ を -1 次元の面と考えることは度々ある。P の頂点全体の集合を V とすれば，P は V の凸閉包であって，更に，P のそれぞれの面 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F} \cap V$ の凸閉包である。また，P の facet 全体の(Euclid 空間の集合としての)和集合を P の境界(boundary)と言って，∂P で表す。

P を d 次元凸多面体とする。$f_i = f_i(P)$，$0 \leqq i < d$，で P の i 次元の面の個数を表し，$f(P) = (f_0, f_1, \cdots, f_{d-1})$ を P の f-vector と言う。更に，$f_{-1} = 1$ と置き，$h_i = h_i(P)$，$0 \leqq i \leqq d$，を

$$(1.1)\quad \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i}$$

で定義し、$h(P)=(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ を P の h-vector と呼ぶ。$h_0=1$，$h_1=f_0-d$ である。

さて，$x_0, x_1, \cdots, x_d$ を Euclid 空間の $d+1$ 個の affine 独立な点とする時，$x_0, x_1, \cdots, x_d$ の凸閉包が d 次元単体（simplex）である。$d=2$ ならば三角形（triangle），$d=3$ ならば四面体（tetrahedron）が単体である。P が d 次元単体の時，$f_i(P)=\binom{d+1}{i+1}$，$0 \leq i < d$，だから，$h_i(P)=1$，$0 \leq {}^\forall i \leq d$，となる。

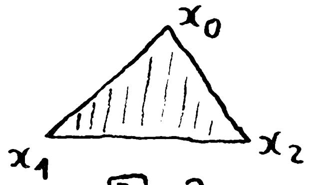


図-3

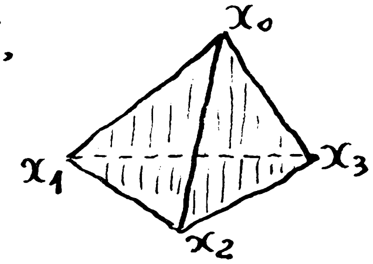


図-4

また，図-1 の pyramid では，$f(P)=(6, 10, 6)$，$h(P)=(1, 3, 1, 1)$，図-5 の bipyramid では $f(P)=(7, 5, 10)$，$h(P)=(1, 4, 4, 1)$ となり，更に，図-6 の prism では $f(P)=(8, 12, 6)$，$h(P)=(1, 5, -1, 1)$ となる。なお，prism の例でわかる様に，$h_i < 0$ となることも起こるのである。

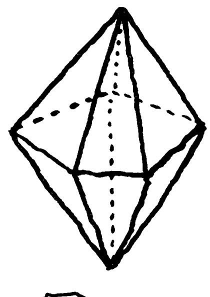


図-5

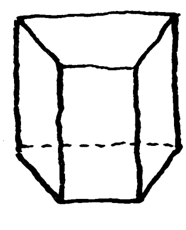


図-6

1893年，Poincaréは任意のd次元凸多面体Pのf-vector $f(P)=(f_0, f_1, \cdots, f_{d-1})$に対して，等式

$$(1.2)\quad f_0-f_1+f_2-\cdots+(-1)^{d-1}f_{d-1}=1+(-1)^{d-1}$$

が成立することを示した。$d=3$の時，(1.2)はEulerの公式$v-e+f=2$に他ならない。また，(1.2)はh-vectorの言葉で述べれば$h_0=h_d$となる。

しからば，$f(P)$に関して，(1.2)の他に何が言えるだろうか？——と問い掛けることは自然なことである。しかしながら，任意のd次元凸多面体のf-vectorに関して言える決定的な結果の獲得は望み薄のように思える。ところが，もしPが単体的な(simplicial)凸多面体，即ち，Pの任意の面が単体である——と仮定すれば，$f(P)$に関していろんな情報が得られる。なお，図-5の凸多面体は単体的であるが，図-1や図-6の凸多面体は単体的でない。

(1.3) 定理(Dehn-Sommerville)[1)]. Pがd次元単体的凸多面体で$h(P)=(h_0, h_1, \cdots, h_d)$が$P$の$h$-vectorの時，$h_i=h_{d-i}$，$0 \leqq \forall i \leqq d$が成立する。■

1957年，Motzkin [Mot] は線型計画法に関連する動機から，与えられた次元 d と頂点の個数 v を持つ凸多面体 P の i 次元の面の個数 $f_i(P)$ がどのくらい大きくなるかを考察した．今 d 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ の moment 曲線 $\{(t, t^2, \dots, t^d) \in \mathbb{R}^d ; t \in \mathbb{R}\}$ 上に v 個の相異なる点を取り，その凸閉包 $C(v,d)$ を巡回凸多面体 (cyclic polytope) と呼ぶ．$C(v,d)$ の組合せ論的性質，例えば $f_i(C(v,d))$ 等は，v 個の頂点の選び方には無関係である[2]．また，$C(v,d)$ は単体的で，更に，

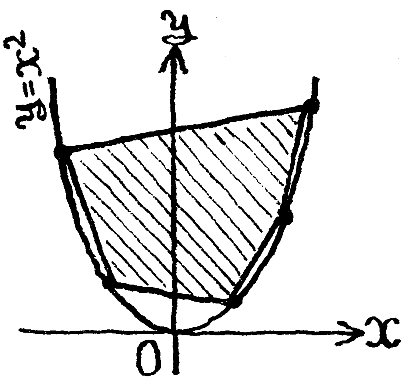


図-7

$$(1.4) \quad f_i(C(v,d)) = \binom{v}{i+1} \quad , 0 \leqq i < [d/2]$$

であることが，さほどの困難はなく示すことができる．

---

1) Dehn は 1905年に $d \leqq 5$ の時を，また一般の d に対しては，Sommerville が 1927年に証明した．

2) 凸多面体 P の面（空集合 $\emptyset$ 及び，便宜上 P も含む）の全体が包含関係で作る束を $L(P)$ で表す．2つの凸多面体 P と P' が同値とは $L(P)$ と $L(P')$ が束として同型である時を言う．束 $L(C(v,d))$ は v 個の頂点の選び方には依存しない —— というのが厳密な陳述である．

さて，v個の頂点を持つ凸多面体Pのi次元の面の個数$f_i(P)$は$\binom{v}{i+1}$を越えることはできない．そして巡回凸多面体$C(v,d)$はこの$\binom{v}{i+1}$という値を，$0 \leqq i < [d/2]$の範囲で獲得している．他方，単体的凸多面体では，Dehn-Sommerville方程式(1.3)が成立するから，$f_{[d/2]}, \cdots, f_{d-1}$は$f_0, \cdots, f_{[d/2]-1}$で表すことが可能である．従って，$f_i(C(v,d))$は，$0 \leqq {}^\forall i < d$で，$v$個の頂点を持つ$d$次元凸多面体$P$の$i$次元の面の個数$f_i(P)$の最大値となる —— と予想するのは理にかなったことである．これが Motzkin [Mot] の上限予想 (upper bound conjecture) と呼ばれるものである．即ち，Pがv個の頂点を持つd次元凸多面体ならば，

$$(1.5) \quad f_i(P) \leqq f_i(C(v,d)), \quad 0 \leqq {}^\forall i < d$$

である —— というのが上限予想である．

実は，上限予想は単体的凸多面体だけの考察に帰着する．実際，任意の凸多面体Pに対して，単体的凸多面体P'で，$\dim P = \dim P'$，$f_0(P) = f_0(P')$，$f_i(P) \leqq f_i(P')$ $(1 \leqq {}^\forall i < d)$となるものが存在

する(図-7, 図-8 参照)からである. 他方, (1.1)より, $f_i(P)$ は $h_0(P), h_1(P), \cdots, h_d(P)$ の非負係数の一次結合であるから, 不等式(1.5)は

$$(1.6) \quad h_i(P) \leqq h_i(C(v,d)) \quad , 0 \leqq {}^{\forall} i \leqq d$$

から従う.

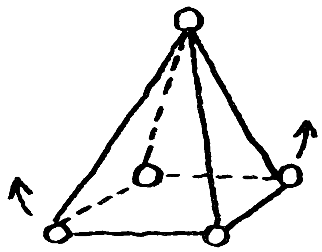


図-7

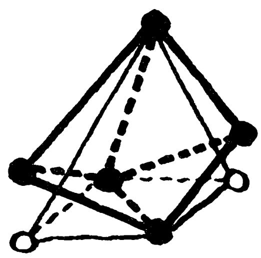


図-8

1970年, McMullen [Mc1] は上限予想を肯定的に解決した. 彼は, まず, $h_i(C(v,d)) = \binom{v-d+i-1}{i}$, $0 \leqq i \leqq [d/2]$, と Dehn-Sommerville 方程式(1.3)及び(1.6)から, 上限予想は, v 個の頂点を持つ d 次元単体的凸多面体 P に対する不等式

$$(1.7) \quad h_i(P) \leqq \binom{v-d+i-1}{i} \quad , 0 \leqq {}^{\forall} i \leqq [d/2]$$

から従うことに注意し，しかる後に，Bruggesser と Mani による最近の結果 —— 凸多面体の境界は殻化可能（shellable）である —— の恩恵を授ったのである。

(1.8) 定理（[B-M]）．d 次元凸多面体 P の facet 全体の"番号付け"（shelling と呼ぶ）$\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2$，…，$\mathcal{F}_m$ $(m = f_{d-1}(P))$ で，

$$\bigcup_{j=1}^{i} \mathcal{F}_j \simeq \mathcal{B}^{d-1} \qquad (1 \leq {}^\forall i < m)$$

$$\mathcal{F}_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{F}_j \right) \simeq \mathcal{B}^{d-2} \qquad (1 < {}^\forall i \leq m)$$

となるものが存在する。■

2

1972年，Hochster [Hoc_1]は，Bruggesser-Maniの殻化可能定理(1.8)を武器として，torus群の不変式環がCohen-Macaulay環であることを示した。

単位元を持つ可換環Rが加法群としての直和分解$R=\bigoplus_{n\geq 0}R_n$を持ち (G-1) $R_iR_j\subset R_{i+j}$ ($\forall i, j$)，(G-2) R_0は体kで，更に，(G-3) Rはk-代数として有限生成 ── である時，RをG-代数(G-algebra)と呼ぶ．$0\neq x\in R_n$を次数(degree) nの斉次(homogeneous)な元と言い，$\deg x=n$と書く．Rがk-代数として有限生成ということは，Rの有限個の元$y_1, y_2, \cdots, y_v$が存在して，Rの任意の元はkの元を係数とする$y_1, y_2, \cdots, y_v$の多項式で表される ── という意味だが，ここで，生成元$y_1, y_2, \cdots, y_v$は正の次数を持つ斉次元であると仮定して一般性を失なわない．そこで，$\deg y_i=e_i\ (>0)$と置こう．特に，$e_i=1$ ($\forall i$)，即ち，生成元がR_1から選べる時，Rを標準(standard) G-代数と呼ぶ([Sta_8]参照)．

G-代数の次元(dimension)とは，k上代数的独立なRの斉次元の最大個数と定義する．以下，Rの次元 $\dim R$ を d で表す．

(2.1) 補題[3]. Rの斉次元の列 θ_1, $\theta_2, \cdots, \theta_d$ で次の条件

(NOE-1) $\theta_1, \cdots, \theta_d$ はk上代数的独立

(NOE-2) 商環 $R/(\theta_1, \cdots, \theta_d)$ はk上の vector 空間として有限次元である

を満たすもの ― 巴系(system of parameters)と呼ぶ ― が存在する．特に，Rが標準G-代数でkが無限体ならば，Rの巴系はR_1から選べる．■

さて，G-代数 R の正の次数を持つ斉次元の列 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r$ が正則列(regular sequence)であるとは，θ_i が $R/(\theta_1, \cdots, \theta_{i-1})$で非零因子(non-zero divisor)，$1 \leqq {}^\forall i \leqq r$，である時を言う．

---

3) Noether正規化定理(normalization theorem)と呼ぶ．証明は，例えば，永田雅宜氏の「可換環論」(紀伊國屋)または「可換体論」(裳華房)を参照．

(2.2) 定義. R の或る巴系[4] が正則列である時, R を Cohen-Macaulay 環と呼ぶ. ■

我々は, ここで, G-代数 R が Cohen-Macaulay 環であるか否かは R の次数付(grading)には依存しない[5] —— という(定義からは決して自明ではない)事実に注意を払うべきである.

Hochster の論文 [Hoc$_1$] では, 多項式環に torus 群が作用する際の不変式環, 換言すれば, 連立線型 diophantine 方程式系に随伴する可換環に焦点が当てられている.

例えば, 連立線型 diophantine 方程式系

$$(2.3)\quad \Phi : \begin{aligned} X_1 + X_3 + X_5 &= X_2 + X_6 \\ X_4 + X_8 &= X_6 + X_7 \end{aligned}$$

を考えよう. Φ の非負整数解, 即ち, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_8) \in \mathbb{Z}^8$

---

4) 実は, 或る巴系が正則列であれば任意の巴系が正則列となる.

5) 例えば, $R = k[x, y, z]/(xy, y^3, zx^2)$ は与えられた任意の3つの整数 $e_1, e_2, e_3\ (>0)$ に対して, $\deg x = e_1$, $\deg y = e_2$, $\deg z = e_3$ となる G-代数の構造を持つ.

で，$\beta_i \geqq 0\ (\forall i)$，$\beta_1+\beta_3+\beta_5=\beta_2+\beta_6$，$\beta_4+\beta_8=\beta_6+\beta_7$ を満たすもの ―― 全体を E_Φ と置けば，E_Φ は零元を持つ可換な半群である．すると，E_Φ に付随して，体 k 上の多項式環 $A=k[x_1,\cdots,x_8]$ の部分環 $k[E_\Phi]$ が構成できる．つまり，

$$\{x_1^{\beta_1}\cdots x_8^{\beta_8}\}_{(\beta_1,\cdots,\beta_8)\in E_\Phi}$$

を基底とする k 上の（無限次元の）vector空間を $k[E_\Phi]$ とするのである[6]．多少の苦痛を我慢して計算すれば，

$$(2.4)\quad E_\Phi=\left\{\sum_{i=1}^{11}a_i\delta^{(i)}\ ;\ a_i\in\mathbb{Z},\ a_i\geqq 0\,(1\leqq{}^{\forall}i\leqq 11)\right\}$$

但し，$\delta^{(1)}=(0,0,0,0,0,0,1,1)$，$\delta^{(2)}=(0,0,0,0,1,1,0,1)$，$\delta^{(3)}=(0,0,0,1,0,0,1,0)$，$\delta^{(4)}=(0,0,0,1,1,1,0,0)$，$\delta^{(5)}=(0,0,1,0,0,1,0,1)$，$\delta^{(6)}=(0,1,0,0,1,0,0,0)$，$\delta^{(7)}=(0,0,1,1,0,1,0,0)$，$\delta^{(8)}=(1,0,0,0,0,1,0,1)$，$\delta^{(9)}=(0,1,1,0,0,0,0,0)$，$\delta^{(10)}=(1,0,0,1,0,1,0,0)$，$\delta^{(11)}=(1,1,0,0,0,0,0,0)$ である

---

6) E_Φ が半群であることから，$k[E_\Phi]$ は多項式環 $A=k[x_1,\cdots,x_8]$ における積で A の部分環となる．

—— という事実が確かめれる．従って，

$$\mathbb{C}[E_\Phi] = \mathbb{C}\begin{bmatrix} x_7x_8,\ x_5x_6x_8;\ x_4x_7, \\ x_4x_5x_6,\ x_3x_6x_8,\ x_2x_5 \\ x_3x_4x_6,\ x_1x_6x_8,\ x_2x_3 \\ x_1x_4x_6,\ x_1x_2 \end{bmatrix}$$

である．古典的な不変式論に於て，任意の連立線型 diophantine 方程式系の非負整数解の全体は基本解 (fundamental solution)[7] と呼ばれる有限個の解を使って，(2.4) のように書ける —— という事実は周知である．

他方，一般線型群 $GL(n,\mathbb{C})$ は自然に n 変数多項式環に作用する．今，対角行列

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & -1 &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 0 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && 0 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& 0 &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& -1 & \\ &&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

---

7) $0 \neq \beta \in E_\Phi$ が「$\beta = \gamma + \delta$, $\gamma, \delta \in E_\Phi$ ならば $\gamma = \beta$ または $\delta = \beta$」を満たす時，E_Φ の基本解と呼ぶ．E_Φ の基本解の全体を $FUND_\Phi$ で表せば $\#(FUND_\Phi) < \infty$ である．

で生成される $GL(8,k)$ の部分群 — torus群 — を G とすると、(2.3) に随伴する $A=k[x_1,\cdots,x_8]$ の部分環 $k[E_\Phi]$ とは、G の作用による A の不変部分環 A^G に他ならない。

(2.5) 定理([Hoc$_1$]). $A^G=k[E_\Phi]$ は Cohen-Macaulay 環である. ■

冒頭でも述べたように、(2.5) の証明には、殻化可能定理 (1.8) が本質的に拘っており、組合せ論と可換環論の結び付きを世に始めて披露したという意味で [Hoc$_1$] は開拓的な、そして記念碑的な論文である。

1974年、Reisner は指導教官 Hochster の示唆の下で、単体的複体に随伴した、多項式環の square-free な単項式で生成された ideal による商環 —— 今日、Stanley-Reisner 環と呼ばれるもの —— が Cohen-Macaulay 環となるための必要十分条件をその単体的複体の topological な言葉で記述することに成功した。

有限集合 $V=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$ を頂点集合(vertex set）とする単体的複体（simplicial complex）Δ を考えよう．即ち，Δ は V の部分集合の集合であって，(i) $\{x_i\} \in \Delta$ $(1 \leqq {}^\forall i \leqq v)$，(ii) $\sigma \in \Delta$, $\tau \subset \sigma$ ならば $\tau \in \Delta$ —— を満たすものである．$d := \max\{\#(\sigma);\ \sigma \in \Delta\}$ と置き，Δ の次元（dimension）$\dim \Delta$ を $d-1$ と定義する．$f_i = f_i(\Delta) := \#\{\sigma \in \Delta\ ;\ \#(\sigma) = i+1\}$ とし，$f(\Delta) = (f_0, f_1, \cdots, f_{d-1})$ を Δ の f-vector と呼ぶ．また，凸多面体の時と同様にして，(1.1) 式で Δ の h-vector $h(\Delta) = (h_0, h_1, \cdots, h_d)$ を定義する．記号を乱用し，$A = k[x_1, x_2, \cdots, x_v]$ を V の元を変数とする体 k 上の v 変数多項式環とする．A の ideal I_Δ を

$$(2.6) \qquad I_\Delta = \left(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq v \\ \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}\} \notin \Delta \end{array} \right)$$

で定義し，

$$(2.7) \qquad k[\Delta] := A / I_\Delta$$

を Δ の Stanley-Reisner 環と呼ぶ．$\dim k[\Delta] = d$ である．

さて，Reisnerの定理を陳述するために，記号その他の準備が必要である．単体的複体 Δ の面[8)] σ に対して

$$\mathrm{link}_\Delta(\sigma) := \{\tau\in\Delta \,;\, \sigma\cap\tau=\emptyset,\ \sigma\cup\tau\in\Delta\}$$

と定義する．例えば図-9の単体的複体[9)]では，$\mathrm{link}_\Delta(\{x_4\})$ と $\mathrm{link}_\Delta(\{x_2, x_3\})$ は，それぞれ図-10，図-11となる．特に $\mathrm{link}_\Delta(\emptyset) = \Delta$ である．また，$\tilde{H}_i(\Delta ; k)$ で k の元を係数とする Δ の i-th 被約homology群を表す．

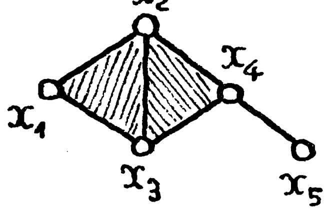


図-9

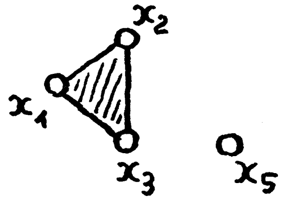


図-10

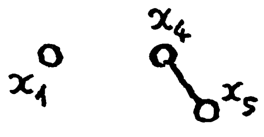


図-11

8) 単体的複体 Δ を構成する V の部分集合 σ を Δ の面(face)と呼ぶ。便宜上，空集合 $\emptyset$ も Δ の面と考えることもある．
9) 単体的複体 Δ とその幾何学的実現(geometric realization) $|\Delta|$ を同一視している．

(2.8) 定理([Rei]). $k[\Delta]$ が Cohen-Macaulay 環となるための必要十分条件は，空集合を含む Δ の任意の面 σ に対して

$$\tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta(\sigma); k) = 0 \qquad \forall i < \dim \mathrm{link}_\Delta(\sigma)$$

が成立することである. ■

(2.9) 系. Δ の幾何学的実現 $|\Delta|$ が球面 (sphere) と位相同型ならば，$k[\Delta]$ は Cohen-Macaulay 環である. ■

(2.10) 系. Δ が多様体 (manifold)[10] の時，$k[\Delta]$ が Cohen-Macaulay 環となるための必要十分条件は，$\tilde{H}_i(\Delta; k) = 0$，$\forall i < d-1$ $(= \dim \Delta)$，が成立することである. ■

---

10) Δ の任意の面 $\sigma\,(\neq \emptyset)$ に対して $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ (の幾何学的実現) が球面と位相同型であることを意味する.

3

Pをd次元単体的凸多面体とし、$V=\{x_1, x_2, \cdots, x_v\}$を$P$の頂点の集合とする。$P$の面$F$は$F\cap V$の凸閉包であったから、$F$と$F\cap V$を同一視することで、$F$は$V$の部分集合と見做すことができる。すると、$P$の面全体の集合を$\Delta(P)$で表せば、$P$が単体的であることから、$\Delta(P)$は$V$上の単体的複体となる。そして $\dim\Delta(P)=d-1$, $f_i(\Delta(P))=f_i(P)$, $0\leqq {}^\forall i<d$, であり、更に、$\Delta(P)$の幾何学的実現$|\Delta(P)|$はPの境界∂Pとなり、$d-1$次元球面$\mathbb{S}^{d-1}$と位相同型になる。$\Delta(P)$を単体的凸多面体Pの境界複体(boundary complex)と言う。そこで、一般に、$|\Delta|\simeq\mathbb{S}^{d-1}$となる$d-1$次元単体的複体を単体的球面(simplicial sphere)と呼ぶことにする。

さて、Motzkinの上限予想は、自然に単体的球面に拡張される。即ち、Δが頂点集合V上の$d-1$次元単体的球面で、$\#(V)=v$ならば、

$$(3.1)\quad f_i(\Delta) \leqq f_i(C(v,d)),\quad 0 \leqq {}^{\forall} i < d$$

が成立する——というのが球面版上限予想である。単体的球面に対しても Dehn-Sommerville の方程式 (1.3) は成立するから、(3.1) は、

$$(3.2)\quad h_i(\Delta) \leqq \binom{v-d+i-1}{i},\ 0 \leqq {}^{\forall} i \leqq [d/2]$$

から従う。

ところで、単体的球面は単体的凸多面体の境界複体とは比較にならない程の魔物である。実際、単体的凸多面体の境界複体は殻化可能[11]であるが、しかしながら、殻化可能でない単体的球面が存在する。従って、(1.8) に頼った単体的凸多面体に関する McMullen による証明は、球面版上限予想には効を奏でない。

---

11) $d-1$ 次元単体的複体 Δ が殻化可能とは、Δ が純 (pure)、即ち、Δ の任意の (包含関係による) 極大な面 σ が $\#(\sigma)=d$ を満たす——であって、更に、極大な面全体の番号付け $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$ $(m = f_{d-1}(\Delta))$ で、$1 < {}^{\forall} i \leqq m$ に対して、$\bar{\sigma}_i \cap \bigcup_{j=1}^{i} \bar{\sigma}_j$ が $d-2$ 次元で純となるものが存在する時を言う。但し、$\bar{\sigma}$ は σ の部分集合全体の集合を表す。

1975年，M.I.T. の Richard P. Stanley は Reisner とは独立に，しかし [Hoc, 1] の影響を受けて，球面版上限予想を解くために，Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$ を考察した．

しばらくの間，$R = \oplus_{n \geq 0} R_n$ を R_0 が体 k である標準的 G-代数とする．R は k-代数として有限生成だから，各 R_n は k 上の vector 空間として有限次元である．そこで，

$$H(R, n) := \dim_k R_n$$

とし，$H(R, n)$ を R の Hilbert 関数と呼ぶ．R の次元 $\dim R$ を d とすれば，$H(R, n)$ は $n \gg 0$ の時，n の $d-1$ 次式となる．他方，$\{H(R, n)\}_{n \geq 0}$ の母関数 (generating function)

$$F(R, \lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} H(R, n) \lambda^n$$

を R の Poincaré 級数と呼ぶ．古典的な Hilbert の syzygy 定理によって，$F(R, \lambda)$ は λ の有理関数 (rational function) で，しかも，

$$(3.3) \quad F(R,\lambda)=\frac{h_0+h_1\lambda+\cdots+h_s\lambda^s}{(1-\lambda)^d}$$

と表されることが既知である.[12] 但し, $h_i \in \mathbb{Z}$ ($0 \leqq \forall i \leqq s$) である. 今, k は無限体であると仮定しよう.[13] すると, R_1 から巴系 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d$ が選べる. そこで, $S = R/(\theta_1,\cdots,\theta_d)$ と置けば, S は R の次数付を遺伝させることで, 標準的 G-代数となる. $S=\oplus_{n\geqq 0} S_n$ とすると, S は k 上の有限次元 vector 空間だったから $S_n=(0)$, $\forall n \gg 0$, である. 更に R が Cohen-Macaulay環であると仮定すれば, $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d$ が正則列となるから, 簡単な計算([Sta$_8$]参照)によって, $\dim_k S_i = h_i$, $0 \leqq \forall i \leqq s$, 及び $S_i=(0)$, $\forall i \geqq s$, となることが確認できる. 特に $h_i \geqq 0$ ($0 \leqq \forall i \leqq s$) で

---

13) Rが必ずしも標準的とは限らないG-代数の時も$H(R,n)$, $F(R,\lambda)$は定義できるが, もはや$H(R,n)$はnの多項式とは限らないし, また, $F(R,\lambda)$も(3.3)の如き華麗な形をするとは限らない. 松村英之氏の「可換環論」(共立出版)参照.

14) kが有限体であれば, kの拡大体Kで無限体となるものを取り, Rの代わりに$R\otimes_k K$を考えればよいから, kが無限体と仮定することに本質的な支障はない.

ある．他方，S は k-代数として S_1 で生成されているから，$\dim_k S_i$ は $(\dim_k S_1)$-変数の i 次の単項式の個数 $\binom{h_1+i-1}{i}$ を越えることはできない．以上により，

(3.4) 補題．d 次元標準的 G-代数 R が Cohen-Macaulay 環である時，$F(R,\lambda)$ を (3.3) の形に表せば，

$$0 \leqq h_i \leqq \binom{h_1+i-1}{i}, \quad 0\leqq {}^\forall i \leqq s$$

が成立する．■

さて，Δ を頂点集合 $V=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$ 上の $d-1$ 次元単体的複体とし，v 変数多項式環 $A=k[x_1,x_2,\cdots,x_v]$ は，$\deg x_i=1$ $(1\leqq {}^\forall i\leqq v)$ であるとする．すると，Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]=A/I_\Delta$ は標準的 G-代数となるが，Δ の f-vector を $f(\Delta)=(f_0,f_1,\cdots,f_{d-1})$，また h-vector を $h(\Delta)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$ とすれば，

$$(3.5)\quad H(k[\Delta], n) = \begin{cases} 1 & , n=0 \\ \sum_{i=0}^{d-1} f_i \binom{n-1}{i} & , n>0 \end{cases}$$

$$(3.6)\quad F(k[\Delta], \lambda) = \frac{h_0 + h_1\lambda + \cdots + h_d\lambda^d}{(1-\lambda)^d}$$

となる。ここで，$h_1 = v - d$ であったことに注意すると，驚嘆すべき事実として，(3.2) の不等式は (3.4) と一致する。換言すれば，球面版上限予想は，Δ が単体的球面であれば，$k[\Delta]$ は Cohen-Macaulay 環である —— という結果があれば，肯定的に解決する ([Sta$_4$])。

そんな折，幸運の女神が Stanley に微笑みかける。球面版上限予想などとは全然無縁なところで仕事をしていた Reisner が，Stanley が探しもとめていた結果 (2.9) を得ていたのである。かくして，

(3.7) 定理 ([Sta$_5$])。球面版上限予想は肯定的である。■

Stanleyによる球面版上限予想の肯定的解決は、Eulerに始まる凸多面体研究の200年の歴史に嵐を巻き起こし、古色蒼然とした伝統を根底から覆す劇的なものであった。以後、可換環論と組合せ論 —— と呼ばれる境界分野が誕生し、活気に満ちた研究活動が展開されつつある（[Hoc_2]、[Sta_{14}]参照）。

我々は、ここで、単体的複体Δが体k上Cohen-Macaulayであるということを Stanley-Reisner環$k[\Delta]$がCohen-Macaulayであることと定義する。すると、(3.4)の御陰で、

(3.8) 命題. Δが$d-1$次元Cohen-Macaulay複体で$h(\Delta)=(h_0, h_1, \cdots, h_d)$が$\Delta$のh-vectorであれば、$h_i \geq 0$, $0 \leq {}^\forall i \leq d$, が成立する. ■

例えば、Δを図-12の単体的複体とすると、$h(\Delta)=(1, 3, -1, 0)$となるから、ΔはCohen-Macaulayではない。

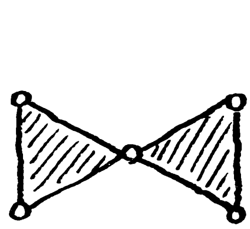


図-12

4

球面版上限予想の肯定的解決は単体的球面の h-vector に関する情報を供給しているが，我々は，依然として，単体的凸多面体や単体的球面の f-vector に関して何が言えるか —— という問い掛けを続行したいと欲する．さて，与えられた整数 $h, i > 0$ に対して，

$$h = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{n_j}{j},$$

但し，$n_i > n_{i-1} > \cdots > n_j \geqq j \geqq 1$，と一意的に表すことが可能である．そこで，

$$h^{<i>} = \binom{n_i + 1}{i+1} + \binom{n_{i-1} + 1}{i} + \cdots + \binom{n_j + 1}{j+1}$$

と定義し，$0^{<i>} = 0$ と置こう．そして，$(h_0, h_1, \cdots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ が M-vector であるとは，(i) $h_0 = 1$，(ii) $0 \leqq h_{i+1} \leqq h_i^{<i>}$ $(1 \leqq {}^\forall i < d)$ —— が成立することと定義する．

(4.1) 定理([Mac]). $(h_0, h_1, \cdots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ が M-vector となるための必要十分条件は，標準的 G-代数 $R = \oplus_{n \geq 0} R_n$ で $H(R, i) = h_i$, $0 \leq {}^\forall i \leq d$, となるものが存在することである. ■

(4.2) 系. Δ が Cohen-Macaulay 単体的複体であれば，Δ の h-vector $h(\Delta)$ は M-vector である.[15] ■

1971年，McMullen [Mc_2] は，単体的凸多面体の h-vector に関する "g-予想" と呼ばれるものを提唱した.

(4.3) 予想([Mc_2]). $(h_0, h_1, \cdots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ が或る単体的凸多面体の h-vector となるための必要十分条件は i) $h_i = h_{d-i}$, $0 \leq {}^\forall i \leq d$, であり，更に，ii) $(h_0, h_1 - h_0, h_2 - h_1, \cdots, h_{[d/2]} - h_{[d/2]-1})$ が M-vector となることである. ■

---

15) 任意の M-vector は或る Cohen-Macaulay 単体的複体の h-vector となることも既知である ([Sta_7]参照).

1979年，Cornell大学のBilleraと彼の弟子Leeは，g-予想(4.3)の"十分性"を証明した([B-L$_1$])．彼らの証明は巡回凸多面体の重心細分を繰り返すことによって望む単体的凸多面体Pを構成するものである([B-L$_2$]参照)．

1979年9月13日，Stanleyはg-予想の"必要性"(のi)はDehn-Sommerville方程式(1.3)に他ならないから既知であって，ii)の$(h_0, h_1-h_0, \cdots, h_{[d/2]}-h_{[d/2]-1})$がM-vectorであること)を代数幾何のtoric多様体の理論と強Lefschetz定理を武器にして証明することに成功した([Sta$_{10}$])．$(h_0, h_1-h_0, \cdots, h_{[d/2]}-h_{[d/2]-1})$がM-vectorを示すところは興味深いので概略を述べよう．

Pがd次元単体的凸多面体の時，Pからtoric多様体X(P)が構成できる(Demazure, Mumford)．X(P)は射影的(projective)であり，しかもX(P)は(必ずしも非特異(non-singular)ではないが，きわめて扱い易い特異点しか持たない)V-多様体である．他方，DanilovはX(P)の複素

数体 $\mathbb{C}$ 上の cohomology 環 $H^*(X(P),\mathbb{C})$ を計算し，$h(P)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$ の時

$$H^*(X(P),\mathbb{C})=\bigoplus_{0\leqq i\leqq d} H^{2i}(X(P),\mathbb{C})$$

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{2i}(X(P),\mathbb{C})=h_i \quad ,\ 0\leqq {}^\forall i\leqq d$$

を得ている．しかも $H^*(X(P),\mathbb{C})$ は標準的 G-代数である．更に，Steenbrink は射影的 V-多様体，特に $X(P)$ は "強 Lefschetz 定理" を満たすこと，即ち，$\omega\in H^2(X(P),\mathbb{C})$ が存在して，$0\leqq {}^\forall i\leqq d$ に対して

$$H^i(X(P),\mathbb{C}) \xrightarrow{\omega^{d-i}} H^{2d-i}(X(P),\mathbb{C})$$

が全単射であることを示した．すると

$$H^i(X(P),\mathbb{C}) \xrightarrow{\omega} H^{i+2}(X(P),\mathbb{C})$$

は，$0\leqq {}^\forall i<d$ で単射（そして，$d-1\leqq {}^\forall i\leqq 2d-2$ で全射）となる．そこで，

$$R = H^*(X(P), \mathbb{C})/(\omega)$$

と置けば

$$R_i = H^{2i}(X(P), \mathbb{C})/\omega H^{2i-2}(X(P), \mathbb{C})$$

$$\dim_{\mathbb{C}} R_i = h_i - h_{i-1},\quad 0 \leqq {}^\forall i \leqq [d/2]$$

となるから，(4.1)の御利益で，$(h_0, h_1 - h_0, \cdots, h_{[d/2]} - h_{[d/2]-1})$ は M-vector となる．

(4.4) 定理([B-L$_1$], [Sta$_{10}$]). $(h_0, h_1, \cdots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ が或る単体的凸多面体の h-vector となるための必要十分条件は，Dehn-Sommerville 方程式 (1.3) が成立し，更に，$(h_0, h_1, \cdots, h_{[d/2]} - h_{[d/2]-1})$ が M-vector となることである．■

(4.5) 系． P が d 次元単体的凸多面体で $h(P) = (h_0, h_1, \cdots, h_d)$ の時，$h_0 \leqq h_1 \leqq \cdots \leqq h_{[d/2]}$ が成立する．■

(4.6) 予想.[16] 任意の d 次元凸多面体 P の h-vector $(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ に対して, 不等式 $h_0 \leqq h_1 \leqq \cdots \leqq h_{[d/2]}$ が成立する. ■

(4.7) 定理([Sta16]). P を中心的対称 (centrally-symmetric), 即ち, $x \in P$ ならば $-x \in P$ ―― である d 次元単体的凸多面体で $h(P) = (h_0, h_1, \cdots, h_d)$ とする時, 不等式

$$h_i - \binom{d}{i} \geqq h_{i-1} - \binom{d}{i-1}, \quad 1 \leqq {}^\forall i \leqq [d/2]$$

が成立する. ■

さて, (4.4)によって単体的凸多面体の h-vector, 従って, f-vector は完全に決定できたのであるが, 次に解決すべき課題は, 単体的球面の h-vector を把握することである. 実は, Δ が (必ずしも単体的凸多面体の境界複体とは限らない一般の) $d-1$ 次元単体的球面

16) 一般化された下限予想 (generalized lower bound conjecture) と呼ばれる.

で $h(\Delta)=(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ の時も $(h_0, h_1-h_0, \cdots, h_{[d/2]}-h_{[d/2]-1})$ は M-vector となる？ —— と予想されている。この予想は、単体的球面に関する未解決な難問のなかでも最高峰に位置する重要かつ魅惑的なものである。

他方、必ずしも単体的でない一般の d 次元凸多面体の f-vector を決定することは、Euler-Poincaré 学派の伝統的な問題意識であるが、$d \geqq 4$ の時には、殆ど決定的な結果はない。

(4.8) 定理([Bay]). P を 4 次元凸多面体とし、$f(P)=(f_0, f_1, f_2, f_3)$ とすると、

(i) $2f_1-2f_0-f_2 \geqq 0$

(ii) $f_1-2f_0 \geqq 0$

(iii) $-3f_2+7f_1-10f_0+10 \geqq 0$

(iv) $f_0 \geqq 5$

(v) $f_2-f_1+f_0 \geqq 5$

(vi) $-f_2+3f_1-2f_0 \leqq \binom{f_0}{2}$

(vii) $f_2-f_1-2f_0 \leqq \binom{f_2-f_1+f_0}{2}$

が成立する。■

単体的凸多面体に関するStanleyの仕事は、凸多面体(のf-vector)と或る代数多様体(のBetti数)の相互関係を土台としている. この手法を任意の凸多面体にまで拡張しようと企てるならば, 代数幾何学に起源を有する"一般化されたh-vector"と呼ぶべきものに焦点を当てるべきである. その概念は2つの多項式を媒介とし, 帰納的に定義される([Sta17]). まず, 1°) $g(\emptyset, x) = g(\{point\}, x) = h(\{point\}, x) = 1$ とし, 2°) $h(\mathcal{P}, x) = \sum_{i=0}^{d} h_{d-i} x^i$ ならば, $g(\mathcal{P}, x) = h_d + \sum_{i=1}^{[d/2]} (h_{d-i} - h_{d-i+1}) x^i$, 更に, 3°)

$$h(\mathcal{P}, x) = \sum_{\substack{\mathcal{F}(\neq \mathcal{P})\text{は空集合}\emptyset \\ \text{を含む}\mathcal{P}\text{の面を動く}}} g(\mathcal{F}, x)\,(x-1)^{d-1-\dim \mathcal{F}},$$

但し, $d = \dim \mathcal{P}$ である. しかる時に $h(\mathcal{P}) = (h_0, h_1, \cdots, h_d)$ を $\mathcal{P}$ の一般化されたh-vectorと言う. $\mathcal{P}$ が単体的凸多面体の時は, 一般化されたh-vectorは本来のh-vectorと一致する. 具体的に, ちょっと, $g(\mathcal{P}, x)$ と $h(\mathcal{P}, x)$ の計算を実行しよう. まず,

$$h(\circ\!-\!\circ, x) = g(\phi, x)(x-1) + 2g(\{point\}, x) = x+1$$

$$g(\circ\!-\!\circ, x) = 1$$

であって、次に

$$h(▨, x) = g(\phi, x)(x-1)^2 + 4g(\{point\}, x)(x-1) + 4g(\circ\!-\!\circ, x)$$
$$= x^2+2x+1$$

$$g(▨, x) = x+1$$

となる。すると、

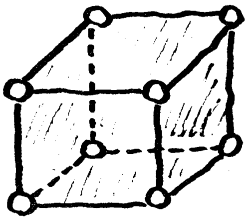
$P =$ 

図-13

の時、

$$h(P, x) = g(\phi, x)(x-1)^3 + 8g(\{point\}, x)(x-1)^2 + 12g(\circ\!-\!\circ, x)(x-1) + 6g(▨, x)$$
$$= x^3+5x^2+5x+1$$

だから、$h(P) = (1, 5, 5, 1)$ となる。因に、P の f-vector は $f(P) = (8, 12, 6)$、h-vector は $h(P) = (1, 6, -1, 1)$ である。

(4.9) 定理([Sta$_{17}$]).[17] Pがd次元凸多面体で$h(P)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$が$P$の一般化されたh-vectorの時，$h_i=h_{d-i}$，$0\leqq {}^\forall i\leqq d$，が成立する．■

(4.10) 予想．d次元凸多面体Pの一般化されたh-vector $h(P)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$は M-vectorであり，更に，$h_0\leqq h_1\leqq\cdots\leqq h_{[d/2]}$である．■

(4.11) 定理([Sta$_{17}$]). Pが有理的(rational)[18]，即ち，Pの各頂点の座標が有理数――なd次元凸多面体で$h(P)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$が$P$の一般化されたh-vectorである時，$h_0\leqq h_1\leqq\cdots\leqq h_{[d/2]}$である．■

Stanleyによる(4.11)の証明では，Goresky-MacPhersonによるintersection cohomologyの理論

---

17) 一般化されたDehn-Sommervilleの方程式と呼ぶ．

18) 単体的凸多面体は有理的(な凸多面体と同値)であるが，有理的でない凸多面体も存在する([Grü]参照)．

が鍵である。Pが有理的ならば、単体的凸多面体の時と同様にして toric 多様体 $X(P)$ が構成できるが、$X(P)$ はもはや射影的でなく、cohomology 環 $H^*(X(P), \mathbb{C})$ の振舞は芳しくない。しかしながら、intersection cohomology $IH^*(X(P), \mathbb{C})$ の振舞は良く、強 Lefschetz を使って、単体的凸多面体の時と類似の議論が可能となる。

5

Cohen-Macaulay環の範疇で，更に際立った性質を持ったGorenstein環の理論を組合せ論に応用する時の基礎となるのがStanleyの論文[Sta8]である．

kを体とし，$R=\bigoplus_{n\geq 0} R_n$，$R_0=k$，をG-代数とし，$\dim R=d$と置こう．Rの巴系$\theta_1$，$\theta_2, \cdots, \theta_d$は$k$上代数的独立だから，Rの部分環 $T:=k[\theta_1, \cdots, \theta_d]$は$k$上の$d$変数多項式環である．以下，RはCohen-Macaulay環であると仮定しよう．この時

$$(5.1)\quad K_R := \mathrm{Hom}_T(R, T)$$

と置き，Rの規準加群(canonical module)と呼ぶ．[19] K_Rは有限生成R-加群であるが，K_Rを生成するのに必要な(R-加群としての)

19) 別の巴系$\theta_1', \cdots, \theta_d'$を取って$T'=k[\theta_1', \cdots, \theta_d']$，$K_R'=\mathrm{Hom}_{T'}(R, T')$とすると$K_R$と$K_R'$はR-加群として同型である．

生成元の最小個数$\mu_R(K_R)$をRの型(type)と呼び$\mathrm{type}(R)$で表す．そして$\mathrm{type}(R)=1$である時，RをGorenstein環と呼ぶ．[20] [21]

さて，Cohen-Macaulay環Rの規準加群K_Rは$K_R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(K_R)_n$なる加法群としての直和分解[22]で$R_i(K_R)_j\subset(K_R)_{i+j}$ ($\forall i, j$)を満たすもの——即ち，次数付R-加群の構造を持つ．そこで

$$F(K_R,\lambda):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\dim_k(K_R)_n\right]\lambda^n$$

と置く．[23]

---

20) Cohen-Macaulay環の時と事情は同じで，RがGorenstein環であるか否か，もっと一般に$\mathrm{type}(R)$は，Rの次数付を変えても不変な概念である．

21) RがGorenstein環であるための必要十分条件はRの規準加群K_RがRと同型になることである．

22) K_RはR加群として有限生成であるから$(K_R)_n=(0)$，$\forall n\ll 0$，となる．

23) $F(K_R,\lambda)\in\mathbb{Z}[\lambda^{-1}][[\lambda]]$も$\lambda$の有理関数である．

(5.2) 定理([Sta8]). 適当な $q \in \mathbb{Z}$ を取ると

$$F(K_R, \lambda) = (-1)^d \lambda^q F(R, \lambda)$$

となる. ■

(5.3) 系. R が Gorenstein 環であれば

$$F(R, \lambda^{-1}) = (-1)^d \lambda^\rho F(R, \lambda)$$

が或る $\rho \in \mathbb{Z}$ に対して成立する. ■

特に, R が標準的 G-代数の時, $F(R,\lambda)$ は (3.3) の華麗な形をしていた. すると,

$$F(R, \lambda^{-1}) = \frac{\lambda^\rho \sum_{i=0}^{s} h_{s-i} \lambda^i}{(1-\lambda)^d} \quad (\rho = d-s)$$

となるから, 予め $h_s \neq 0$ として置けば, (5.3) は数列 $h_0, h_1, \cdots, h_s$ が対称 (symmetric), 即ち,

$$(5.4)\quad h_i = h_{s-i}\ ,\quad 0 \leqq {}^\forall i \leqq s$$

を意味する.

さて，Rが整域(integral domain)であれば，K_RはRのidealとして実現できる——という事実が既知である．従って，

(5.5) 定理([Sta_8]). RがCohen-Macaulay整域の時，RがGorenstein環であるための必要十分条件は，或る$\rho \in \mathbb{Z}$に対して，

$$F(R, \lambda^{-1}) = (-1)^d \lambda^\rho F(R, \lambda)$$

が成立することである. ■

もちろん，整域という条件を除外しては，(5.5)は偽である．例えば，図-14のCohen-Macaulay複体Δのh-vectorは$h(\Delta) = (1, 2, 1, 0)$であるが，$k[\Delta]$はGorenstein環ではない．

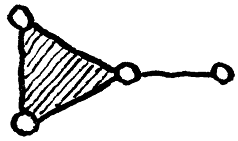


図-14

さて，単体的複体Δが体k上 Gorenstein であるということを，Stanley-Reisner 環$k[\Delta]$が Gorenstein 環であることと定義する．

(5.6) 定理([Hoc_2]). 単体的球面は任意の体上 Gorenstein である． ■

Gorenstein 複体に関する詳しい議論は，[Sta_{14}]に要約されているので，そっちを参照してもらうとして，ここでは，Stanley-Reisner 環$k[\Delta]$の Poincaré 級数$F(k[\Delta],\lambda)$と Gorenstein 複体との相互関係に焦点を絞ろう．Δを頂点集合$V=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$上の単体的複体で$\dim\Delta=d-1$とする．正の整数を成分とする vector $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_v)$が与えられた時，変数x_iの次数をξ_iとすることで$k[\Delta]$に G-代数の構造を入れたものを$k[\Delta]^{(\xi)}$で表す．また，$|\xi|=\max_{1\leq i\leq v}\xi_i$とする．さて，$\Delta$が$k$上 Gorenstein であれば，(5.3)より，任意のξに対して

$$F(k[\Delta]^{(\xi)},\lambda^{-1})=(-1)^d\lambda^g F(k[\Delta]^{(\xi)},\lambda)$$

となる $q(=q_{\xi})\in\mathbb{Z}$ が存在するが，逆に，

(5.7) 定理 ([H_{12}]). $d-1$ 次元単体的複体 Δ は体 k 上 Cohen-Macaulay であるとし，更に，$|\xi|\leqq d+1$ となる任意の ξ に対して，或る $q(=q_{\xi})\in\mathbb{Z}$ が存在し，

$$F(k[\Delta]^{(\xi)},\lambda^{-1})=(-1)^d\lambda^q F(k[\Delta]^{(\xi)},\lambda)$$

が成立すると仮定せよ．この時，Δ は k 上 Gorenstein である．■

他方，Δ が Cohen-Macaulay 複体の時 type($k[\Delta]$) を topology の言葉で記述する公式は

(5.8) 定理 ([Hoc_2]). 頂点集合 V 上の単体的複体 Δ は体 k 上 Cohen-Macaulay であると仮定せよ．この時

$$\mathrm{type}(k[\Delta])=\sum_{W\subset V}\dim_k\tilde{H}_{i_W}(\Delta_W;k)$$

である．但し，$\Delta_W := \{\sigma \in \Delta ; \sigma \subset W\}$，$i_W := \#(W) - \#(V) + \dim \Delta$ である．■

話題を Cohen-Macaulay 整域に移そう．G-代数 R の次数付 ideal[24] I が R の規準 ideal (canonical ideal) であるとは，R-加群として，I が K_R と同型である時を言う．

(5.9) 命題．G-代数 R は d 次元 Cohen-Macaulay 整域であるとせよ．この時，R の次数付 ideal I，$(0) \subsetneqq I \subsetneqq R$，が R の規準 ideal となるための必要十分条件は，

$$F(I, \lambda) = (-1)^d \lambda^p F(R, \lambda^{-1})$$

が或る $p \in \mathbb{Z}$ に対して成立し，更に，R/I が d-1 次元 Cohen-Macaulay 環となることである．[25] ■

---

24) $I = \bigoplus_{n \geq 0} (I \cap R_n)$ となるもの，換言すれば，R の斉次元で生成された R の ideal を次数付 ideal と呼ぶ．

25) 実は，I が規準 ideal ならば R/I は Gorenstein 環となる．

とは言っても、(5.9)を武器として、規準idealを探索することは、通常、著しく困難である。現在のところ、規準idealが華麗に、しかも、きわめて具体的に記述できるのは、連立線型diophantine方程式系に随伴して構成できるtorus群の不変式環 $k[E_\Phi]=A^G$ の時だけである。E_Φ^* で E_Φ の正解(positive solution)[26]全体の集合を表し、$k[E_\Phi^*]$ で $\{x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots\}_{(\beta_1,\beta_2,\cdots)\in E_\Phi^*}$ が生成する k 上のvector空間を表す ―― と、$k[E_\Phi^*]$ は $k[E_\Phi]$ の ideal となる。[27]

(5.10) 定理([Sta_8]). $k[E_\Phi^*]$ は $A^G=k[E_\Phi]$ の規準idealである。■

(5.11) 系. $A^G=k[E_\Phi]$ がGorenstein環となるための必要十分条件は、唯一つの $\alpha\in E_\Phi^*$ が存在して、任意の $\beta\in E_\Phi^*$ に対して、$\beta-\alpha\in E_\Phi$ となることである。■

Stanley が $A^G = \mathbb{Q}[E_\Phi]$ の規準 ideal を記述するのに成功した背景には，[Sta_2]，[Sta_6] 等の土台的な仕事があることを忘れてはならない．また，(5.10) 及び (5.11) の御利益は，漸く，"数え上げ"の組合せ論にも侵透してきたところである（[H_3]，[H_7]，[H_{16}]，[H_{17}] 参照）．

---

26) $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots) \in E_\Phi$ が正解であるとは $\beta_i > 0$ ($\forall i$) が成立する時を言う．

27) $E_\Phi^* \neq \emptyset$ と仮定しても一般性を失なわない．

6

有限集合 V を土台集合 (underlying set) とする半順序集合 (partially ordered set) P が与えられた時、P に含まれる鎖 (chain)[28] の全体を $\Delta(P)$ で表せば、$\Delta(P)$ は V を頂点集合とする単体的複体となる. $\Delta(P)$ を P の順序複体 (order complex) と呼ぶ. 例えば、図-15 の Hasse 図形で表される半順序集合を P とすると、$\Delta(P)$ は図-16の単体的複体となる.

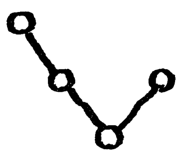


図-15

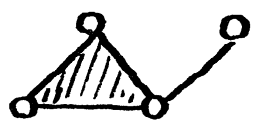


図-16

さて、半順序集合 P が体 k 上 Cohen-Macaulay (或いは、Gorenstein) であることを順序複体 $\Delta(P)$ が k 上 Cohen-Macaulay (或い

---

28) 半順序集合に含まれる全順序集合を鎖と呼ぶ.

は、Gorenstein）であることと定義する．$\Delta(P)$の Stanley-Reisner環 $k[\Delta(P)]$を簡単に$k[P]$で表すと

$$k[P] = k[X_\alpha ; \alpha \in P]/(X_\alpha X_\beta ; \alpha \nsim \beta)$$

となる．但し，$\alpha \nsim \beta$ は $\alpha, \beta \in P$ が Pの順序で比較不可能なことを表す．

Cohen-Macaulay半順序集合の理論は，Baclawski [Bac$_1$]，Björner [Bjö$_1$]，Garsia [Gar]，Stanley [Sta$_9$] 等によって確立され，[B-G-S] は，束論や半順序集合の古典理論等の歴史的背景にも触れた，概観的総合報告である．

半順序集合の記号と言葉を準備しよう．Xが鎖の時，Xの長さ（length）を$\#(X)-1$で定義する．半順序集合Pに含まれる鎖の長さの最大値をPの階数（rank）と呼び，rank(P)で表す．また，Pに含まれる鎖の中で包含関係で極大なものの長さがすべて rank(P)に等しい時，Pを純（pure）

と呼ぶ。$\alpha \in P$ の時、α から降下する鎖の長さの最大値を α の階数と言って、$r(\alpha)$ で表す。

(6.1) 命題. Cohen-Macaulay 半順序集合は純である. ■

ところで、半順序集合 P が Cohen-Macaulay であるか否かは基礎体 k の標数に依存する. 例えば

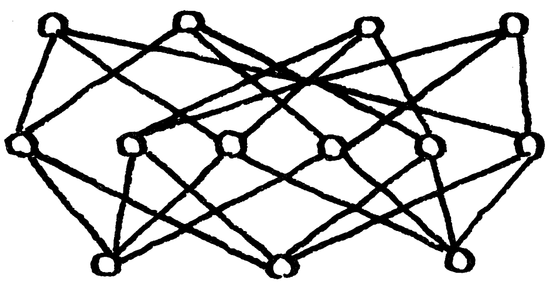
$P =$ 

図-17

とすると、P は k の標数が $\neq 2$ の時 Cohen-Macaulay であるが、$= 2$ の時は Cohen-Macaulay ではない. $\Delta(P)$ の幾何学的実現は実射影平面である.

さて，Pを階数 $d-1$ の純な半順序集合とし，$[d-1]:=\{0,1,\cdots,d-1\}$とする．$S\subset[d-1]$ の時，P の半順序部分集合 P_S を

$$P_S:=\{\alpha\in P\ ;\ r(\alpha)\in S\}$$

で定義する．

(6.2) 定理([Bac_1]).[29] Pが階数 $d-1$ のCohen-Macaulay半順序集合の時，任意の $S\subset[d-1]$ に対して，P_S もCohen-Macaulayである．■

Reisnerの定理 (2.8)の御陰で，Cohen-Macaulay半順序集合を研究するには，可換環論とtopologyの両方を武器として攻撃することが可能となる．[Bac_1]，[Mun]では，topologyの手法で，複雑な議論を経て，

29) 階数選択定理 (rank-selection theorem)

階数選択定理が証明されているが，[Sta$_q$] 及び [H4] で示されている如く，環論的立場からは殆ど瞬時で証明できる結果である．

さて，P_S に含まれる極大な鎖の個数を $\alpha_P(S)$ で表し，

$$\beta_P(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{\#(S)-\#(T)} \alpha_P(S)$$

と定義する．この時，包除原理（Principles of Inclusion-Exclusion）によって

$$\alpha_P(S) = \sum_{T \subset S} \beta_P(S)$$

が成立する．

(6.3) 定理（[B-G-S] 参照）．P が Cohen-Macaulay 半順序集合ならば

$$\beta_P(S) = \dim_k \tilde{H}_{\#(S)-1}(\Delta(P_S); k)$$

である．■

(6.4) 系. P が Cohen-Macaulay 半順序集合, $\mathrm{rank}(P)=d-1$, ならば, 任意の $S\subset[d-1]$ に対して $\beta_P(S)\geq 0$ である. ■

しばらくの間, [Bjö₁], [Gar], [H₄] による Cohen-Macaulay 半順序集合の判定法を述べよう. P を純な半順序集合, $\hat{P}=P\cup\{\hat{0},\hat{1}\}$ とする. 但し, $\hat{0}<x<\hat{1}$ ($\forall x\in P$) である. $x, y\in\hat{P}$ の時, $x\lessdot y$ は被覆関係 (covering relation)[30] を意味する.

$$\mathcal{E}(\hat{P})=\{(x,y)\in\hat{P}\times\hat{P}\,;\,x\lessdot y\}$$

と置く. 即ち $\mathcal{E}(\hat{P})$ は $\hat{P}$ の Hasse 図形の "辺" の全体の集合を表す. $\hat{P}$ の辺番号付け (edge-labeling) とは, $\mathcal{E}(\hat{P})$ から非負

---

30) y が x を被覆するとは $x<y$ であって, 更に, $x<z<y$ となる z が存在しない時を言う.

整数全体の集合$\mathbb{N}$への写像 $\delta : \mathcal{C}(P^\wedge) \to \mathbb{N}$ のことである. $P^\wedge$ の辺番号付けがL-番号付けであるとは, (i) $^\forall x, y \in P$, $x < y$, に対し, xとyを結ぶ飽和(saturated)な鎖[31] $x = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = y$ で $\delta(x_0, x_1) \leqq \delta(x_1, x_2) \leqq \cdots \leqq \delta(x_{n-1}, x_n)$ を満たすもの[32]が唯一つ存在し, 更に, (ii) $x < {}^\forall z < y$, $z \neq x_1$ に対して, $\delta(x, z) > \delta(x_0, x_1)$ である —— という条件が満たされる時を言う. 例えば,

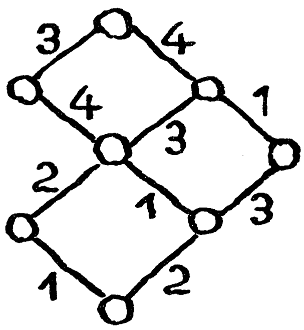


図-18

---

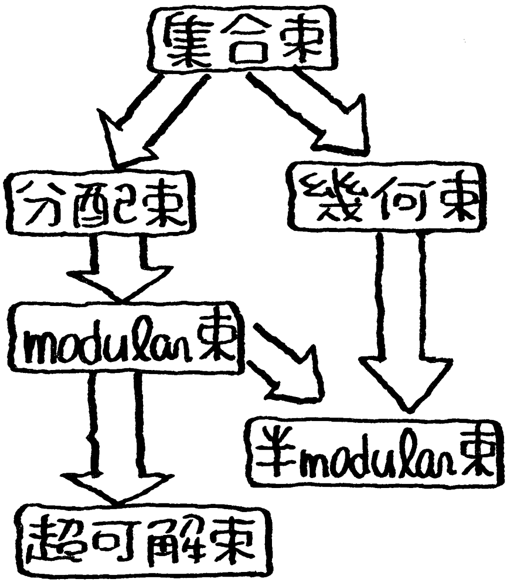
31) 細分化不可能(unrefinable)な鎖とも呼ぶ.

32) 上昇鎖(raising chain)と言う. 唯一つの上昇鎖を持つ $P^\wedge$ の辺番号付けをR-番号付けと呼ぶ.

は、L-番号付けである. $P^\wedge$ がL-番号付けを持つ時、P は辞書式順序殻化可能(*lexicographically shellable*)であると呼ばれる.

(6.5) 定理([$Bj\ddot{o}_1$]). 辞書式順序殻化可能な半順序集合は任意の体上Cohen-Macaulayである. ■

古典的な束論の教科書、例えばBirkhoffの名著[Bir]等に登場する基本的な束は、集合束(Boolean lattice)、分配束(distributive lattice)、幾何束(geometric lattice)、更に、modular束、半modular束(semimodular lattice)等であるが、これらの束(もちろん有限束に限る)はすべて辞書式順序殻化可能である. 更に、Stanleyが定義した超可解束(supersolvable lattice)[33] も辞書式順序殻化可能である.



(6.6) 定理([Gar]). P を階数 $d-1$ の純な半順序集合とし, $\beta_P(S) \geqq 0$ $(\forall S \subset [d-1])$ を仮定する. $\mathcal{M}(P)$ で P の極大鎖全体の集合を表し, c が P の鎖, $m \in \mathcal{M}(P)$ の時

$$\varepsilon_{c,m} = \begin{cases} 1 & c \subset m \text{ の時} \\ 0 & c \not\subset m \text{ の時} \end{cases}$$

と定義する. この時, P が体 k 上 Cohen-Macaulay であるための必要十分条件は, P の鎖の集合 $\mathcal{B}(P)$ で次の条件を満たすものが存在することである:

(i) $\#\{b \in \mathcal{B}(P) ; r(b) = S\} = \beta_P(S)$ [34] が任意の S, $S \subset [d-1]$, に対して成立する.

(ii) 行列 $(\varepsilon_{b,m})_{b \in \mathcal{B}(P),\, m \in \mathcal{M}(P)}$ は k 上可逆である. ■

---

33) 有限束 L が極大鎖 M で条件「M と他の任意の鎖 M' が生成する L の部分束は分配束である」を満たすものが存在する時, L を超可解束と言う.

34) 従って, $\#\mathcal{B}(P) = \sum_{S \subset [d-1]} \beta_P(S) = \alpha_P([d-1]) = \#\mathcal{M}(P)$ となる.

(6.7) 系. Pが殻化可能[35]ならば, Pは任意の体上 Cohen-Macaulay である.[36] ■

殻化可能半順序集合の重要な例として, 有限 Coxeter 群の Bruhat 順序がある. 詳細は [Bjö2], [B-W1], [B-W2] を参照してもらうとして, ここでは n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の Bruhat 順序を具体的に記述しよう. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ の時, $\pi' \in \mathfrak{S}_n$ が $\mathfrak{S}_n$ の Bruhat 順序で π を被覆 (即ち, $\pi < \pi'$) するとは, π' が π から a_i と a_j, 但し $i<j$, で条件 (i) $a_i < a_j$, (ii) $i < l < j$ ならば $a_l < a_i$ 或いは $a_l > a_j$ ——を満たすものを交換することによって得られる時と定義する. 例えば, $\mathfrak{S}_3$ の Bruhat 順序は,

---

35) 順序複体 $\Delta(P)$ が殻化可能 (脚注 11) 参照) な時 P は殻化可能であると言う. 辞書式順序殻化可能な半順序集合は殻化可能である.

36) 一般に, Δ が殻化可能ならば, 任意の体 k 上 $k[\Delta]$ が Cohen-Macaulay であることは, そんなに困難なく, 直接, 示すことができる ([H4] 参照).

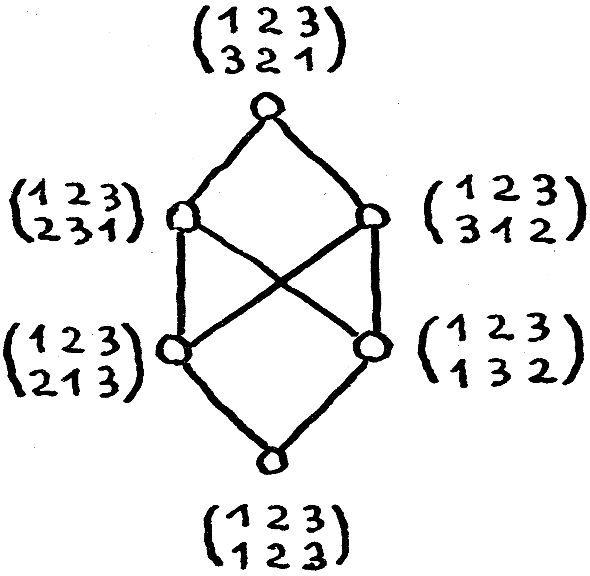


図-19

となる.

再び, P は階数 $d-1$ の純な半順序集合で, $0 \leqq r < d$ とし, $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m\}$ $(n, m \geqq 1)$ を階数 r の元全体の集合とする. 今, $V_{[\alpha]}$ (或いは $V_{[\beta]}$) を或る α_i (或いは β_j) と P の順序で比較可能な元全体から成る P の土台集合 V の部分集合とし, $V_{[\alpha]}$ (或いは $V_{[\beta]}$) を土台集合とする半順序集合 $P_{[\alpha]}$ (或いは $P_{[\beta]}$) を $x \leqq y$ が $P_{[\alpha]}$ (或いは $P_{[\beta]}$) で起きるのは P で $x \leqq y$ であって, 更に, x と y の両方と

比較可能な α_i（或いは β_j）が存在する時である —— と定義する. 他方, $V_{[\alpha]} \cap V_{[\beta]}$ を土台集合とする半順序集合 Q を, $\rho_{[\alpha]}$ 及び $\rho_{[\beta]}$ で $x \leqq y$ である時かつその時に限り Q で $x \leqq y$ である —— と定義する. 例えば,

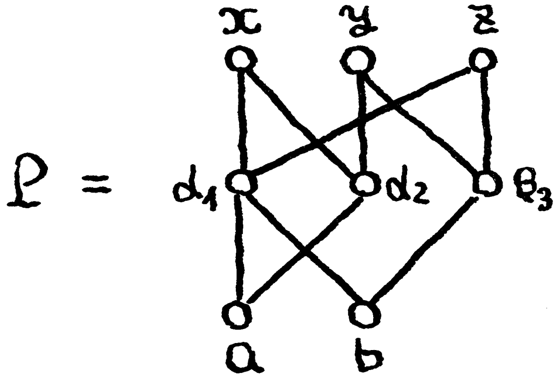


図 -20

であれば,

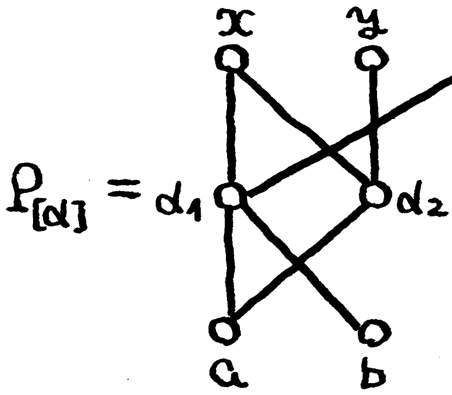


図 -21

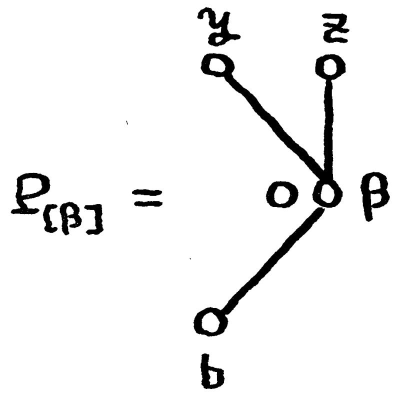


図 -22

となり，更に，

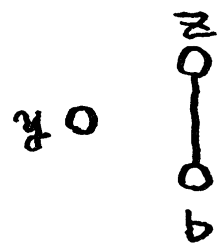
$Q =$ 

図-23

である．

(6.8) 定理([H4]). 純な半順序集合 P に於て，$P_{[\alpha]}$ と $P_{[\beta]}$ は Cohen-Macaulay であると仮定せよ．この時，P が Cohen-Macaulay となるための必要十分条件は，Q が Cohen-Macaulay で，更に，$\mathrm{rank}(Q) = \mathrm{rank}(P) - 1$ となることである．■

応用例として [H8] の結果を述べよう．Γ を多重辺 (multiple edge) 及び loop を許す平面 graph とし，P_Γ を Γ の面-半順序集合 (face poset[37]) とする．即ち，P_Γ は Γ の頂点，辺，領域 (region) に接触関係 (incidence relation) で順序を入れた半順序集合

である．例えば，

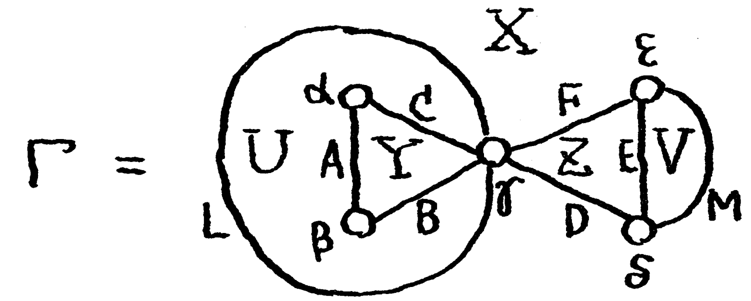


図-24

とすると，

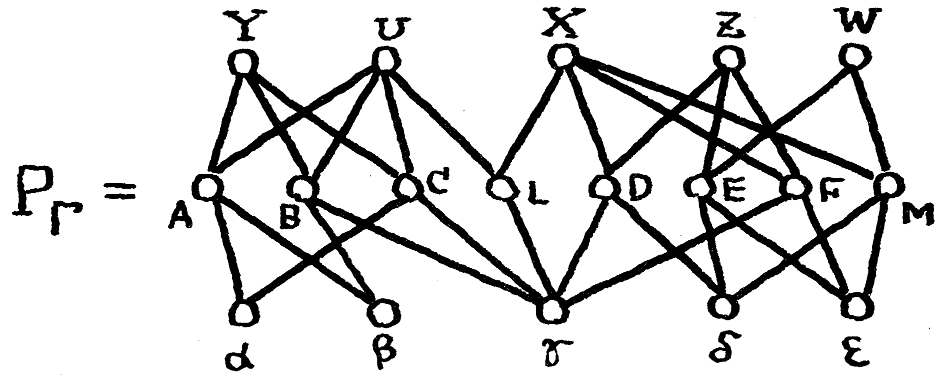


図-25

となる．

---

37) partially ordered set を略して，簡単に，poset と呼ぶ．

(6.9) 定理([H8]). Γ を平面 graph, P_Γ をその面-半順序集合とする.

(C-M) P_Γ が Cohen-Macaulay となるための必要十分条件は Γ が連結 (connected) となることである.

(Gor) P_Γ が Gorenstein となるための必要十分条件は i) Γ が連結であって, 更に, ii) (a) Γ は loop も切断頂点 (cut vertex) も持たないか, 又は, (b) $\Gamma =$  である. ■

(6.10) 定理([H10]). Γ を連結な平面 graph, $\Gamma^* = \Gamma - \{\text{loops}\}$ と置き, Γ の頂点 v に対して, $\Gamma^* - v$ の連結成分 (connected component) の個数を $\delta_\Gamma(v)$, v に接触する loop の個数を $\nu_\Gamma(v)$ で表す. この時, Γ の面-半順序集合 P_Γ の体 k 上の Stanley-Reisner 環 (は Cohen-Macaulay 環であって, そ) の型は

$$\mathrm{type}(k[P_\Gamma]) = \left[\sum_v 2\{\delta_\Gamma(v) + \nu_\Gamma(v) - 1\}\right] + 1$$

である. ■

話題を変えて，有限群 G の部分群全体が包含関係で作る束 $\mathcal{L}(G)$ を考えよう．$\mathcal{L}(G)$ が何時 Cohen-Macaulay 或いは Gorenstein となるかは [Bjö1] と [H2] で完全に決定されている．

(6.11) 定理 ([Bjö1])．$\mathcal{L}(G)$ が Cohen-Macaulay となるための必要十分条件は G が超可解となることである．■

(6.12) 定理 ([H2])．$\mathcal{L}(G)$ が Gorenstein となるための必要十分条件は，G が巡回群で，その位数 $\#(G)$ が素数巾か或いは square-free となることである．■

Cohen-Macaulay 環と Gorenstein 環の中間に位置する概念として，Stanley [Sta7] が提唱した level 環がある．Stanley-Reisner 環の範疇では，level 環の概念は，規準加群を具体的に表現する話題とも密接に関係しており，興味深いが，ここでは触れる余裕はないので，[Bac2]，[Bac3]，[H5]，[H9] を参照のこと．

7

1979年, Eisenbud は Oklahoma 大学で開催された環論の研究集会で ASL (algebra with straightening laws) の概念を提唱した [Eis]. ASL の概念は古典的な不変式論に現れる "straightening formula" を公理化したものであるが, この公理化は明快かつ魅惑的であり, Cohen-Macaulay 半順序集合の理論を可換環論に応用する足場となる.

k を体, $R=\bigoplus_{n\geq 0} R_n$ ($R_0=k$) を G-代数とし, P は R_1 に含まれる有限半順序集合としよう. この時, R における P の元の積 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p$ を単項式 (monomial) と呼び, また, $\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\cdots\leqq\alpha_p$ の時, $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p$ を標準単項式 (standard monomial) と言う.

(7.1) 定義 ([Eis]). R が半順序集合 P に支配される k 上の ASL であるとは, 次の条件が満たされる時を言う:

(ASL-1) 標準単項式全体の集合は R の k 上

の vector 空間としての基底である。[38]

(ASL-2) $\alpha \not\sim \beta$ の時、$\alpha\beta$ は標準的でないから、(ASL-1)によって

$$(*) \quad \alpha\beta = \sum_i r_i \gamma_i \delta_i \quad \begin{pmatrix} 0 \neq r_i \in k \\ \gamma_i \leqq \delta_i \end{pmatrix}$$

と相異なる標準単項式の一次結合として一意的に書けるが、この時、$\gamma_i \leqq \alpha, \beta \ (\forall i)$ が成立する。■

例えば、Stanley-Reisner環 $k[P] = k[X_\alpha ; \alpha \in P]/(X_\alpha X_\beta ; \alpha \not\sim \beta)$ は、$\deg X_\alpha = 1$, $\forall \alpha \in P$, とし、$\alpha \in P$ と X_α[39] $\in k[P]$ を同一視すれば、P は $(k[P])_1$ に含まれると見做せる。この時、$\alpha \not\sim \beta$ ならば (ASL-2)の関係式(*)は $\alpha\beta = 0$ であるから、最も"簡単な"ASLである。[40] 従って、$k[P]$ を P に支配される k 上の離散(discrete) ASL とも呼ぶ。

---

38) 従って、$R = \oplus_{n \geq 0} R_n$ は k-代数として R_1 で生成されることに注意せよ。

39) 厳密には、$X_\alpha \bmod (X_\alpha X_\beta ; \alpha \not\sim \beta)$ と書くべきである。

40) 公理(ASL-1)を $k[P]$ が満たすことは容易に確認できる。

さて，(ASL-1) の恩恵は

(7.2) 命題.[41] R を半順序集合 P に支配される k 上の ASL とする時，$H(R,n)=H(k[P],n)$，$\forall n\geqq 0$，であり，従って，$F(R,\lambda)=F(k[P],\lambda)$ となる. ■

我々は，$k[P]$ が Cohen-Macaulay 環である時，P は k 上 Cohen-Macaulay であると呼んだ.

(7.3) 定理([D-E-P$_2$]).[42] P が体 k 上 Cohen-Macaulay であれば，P に支配される k 上の任意の ASL は Cohen-Macaulay である. ■

$X=(x_{i,j})_{\substack{1\leqq i\leqq n\\ 1\leqq j\leqq m}}$ を nm 個の変数を成分とする行列，$A=k[\{x_{i,j}\}_{\substack{1\leqq i\leqq n\\ 1\leqq j\leqq m}}]$ は体 k 上の nm 変数多項式環とする. $1<t\leqq n(\leqq m)$ とし，I_t

---

41) (3.5), (3.6) を参照せよ. また，$\dim R=\dim k[P]$ $(=\mathrm{rank}(P)+1)$ も成立する.

42) ASL の理論の基本定理と呼ぶ.

を X の $t\times t$-小行列式全体で生成された A の ideal とし，$R = A/I_t$ と置く．他方，記号 $[i_1, i_2, \cdots, i_r | j_1, j_2, \cdots, j_r]$，但し，$i_1, \cdots, i_r$，$j_1, \cdots, j_r$ は整数で，$1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$，$1 \le j_1 < \cdots < j_r \le m$，$1 \le r < t$ ——の全体を土台集合とする半順序集合 P を，$[i_1, \cdots, i_r | j_1, \cdots, j_r] \le [i'_1, \cdots, i'_s | j'_1, \cdots, j'_s]$ であるのは $r \ge s$（$r \le s$ の誤りではない!!）かつ $i_1 \le i'_1, \cdots, i_s \le i'_s$，$j_1 \le j'_1, \cdots, j_s \le j'_s$ である時と定義する．そして，$[i_1, \cdots, i_r | j_1, \cdots, j_r] \in P$ に対して，$i_1, \cdots, i_r$ 行及び $j_1, \cdots, j_r$ 列から成る X の小行列式を対応させて，P を R に埋め込めば，[43] R は P に支配される k 上の ASL であることが示せる（[D-E-P1] 参照）．更に，P は分配束，故 Cohen-Macaulay 半順序集合だから，(7.3) の御陰で，R も Cohen-Macaulay 環となる．

---

43) わざわざ余分な生成元を添付するのであるが，それらの生成元がすべて R_1 に含まれるような R の次数付構造がちゃんと存在する．

古典的な不変式論に登場する著名なASLで整域であるものは，すべてCohen-Macaulayである．すると，ASL整域はCohen-Macaulay環であるか？ ―― という問が自然に浮かぶ．

(7.4) 定義．半順序集合 P が体 k 上整域的(integral)[44] であるとは，P に支配される k 上のASL整域が存在する時を言う．■

例えば，半順序集合

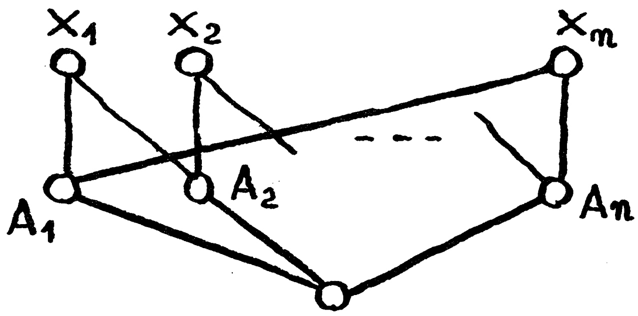


図-26

が整域的であるのは $m \leqq 4$ かつその時に限る．

---

44) P が整域的であれば P は唯一つの極小元を持つ．

(7.5) 予想. 整域的半順序集合は Cohen-Macaulay である. ■

(7.6) 定理([H-W1]). P の階数が $\leqq 2$ の時, P が整域的ならば P は Cohen-Macaulay である. ■

他方, 我々が ASL 整域を興味の対象とするのは, Stanley の定理(5.5)を強力な武器として保有していることも要因である. 実際, (3.6), (5.5), (7.3) を融合すると,

(7.7) 補題. Cohen-Macaulay 半順序集合 P の順序複体 $\Delta(P)$ の h-vector を $(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ とし, $s = \max\{i ; h_i \neq 0\}$ と置く. R は P に支配される k 上の ASL 整域であって, 更に, 数列 $h_0, h_1, \cdots, h_s$ は対称であると仮定せよ。この時, R は Gorenstein 環である. ■

古典的な束論で考察された著名な束が整域的であるか否かを調べることは，整域的半順序集合の理論を築き上げるための重要な課題である.

(7.8) 定理([H3]).[45] Lを有限束，kを体とし，

$$\mathcal{R}_k[L] := k[X_\alpha ; \alpha \in L]/(X_\alpha X_\beta - X_{\alpha\wedge\beta} X_{\alpha\vee\beta} ; \alpha \nsim \beta)$$

と置く. この時，次の条件は同値である：

(i) $\mathcal{R}_k[L]$はLに支配されるk上のASLである.

(ii) $\mathcal{R}_k[L]$は整域である.

(iii) Lは分配束である. ■

(7.9) 系. 分配束は任意の体上整域的である. ■

---

45) (7.8)の証明では，Birkhoffによる有限分配束の構造定理([Bir, p.59]参照)が鍵である.

整域的半順序集合の分類問題については、[H6]、[H11]、[H-W1]、[Wat2] で考察されているが、決定的な結果が得られるまでの道のりは程遠く、真相は霧に包まれたまま眠っている。

しばらくの間、整域的であると希望している半順序集合の候補を列挙しよう。

箱(box)の個数が n 個以下の Young 図形(diagram)全体が Young 図形の埋蔵関係で成す半順序集合を $Y(n)$ で表す。例えば、

$Y(5)$ =

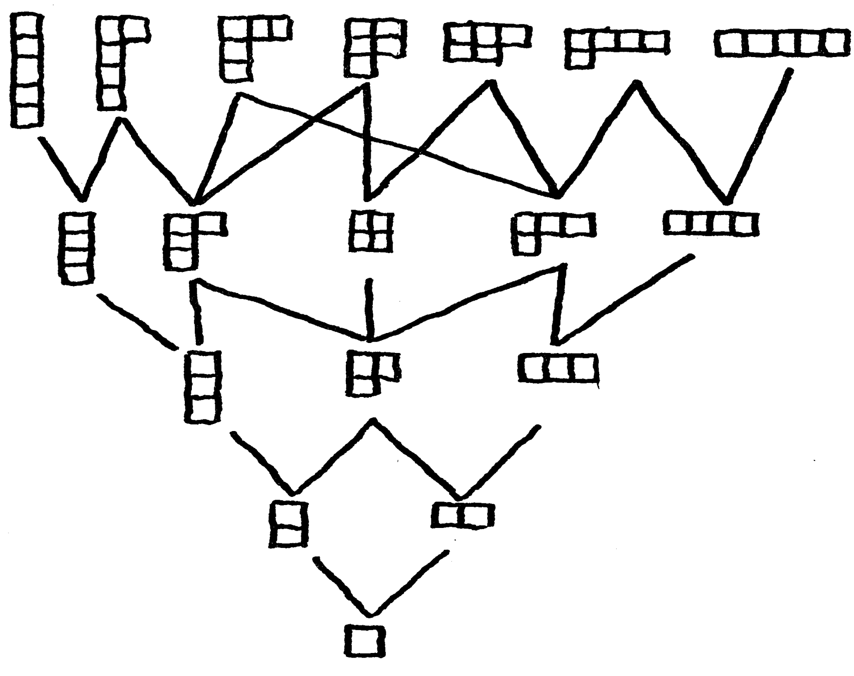


図-27

となる．3任意の $n \geq 1$ に対して，$\Sigma(n)$ は Cohen-Macaulay である．

(7.10) 予想．3任意の $n \geq 1$ に対して，半順序集合 $\Sigma(n)$ は整域的である．■

p を素数，q を p の巾とし，$\mathbb{F}_q$ で q 個の元から成る有限体を表す．$\mathbb{F}_q$ 上の n 次元 vector 空間 $V_n(q)$ の部分空間全体が包含関係で成す束を $L_n(q)$ で表す．例えば，

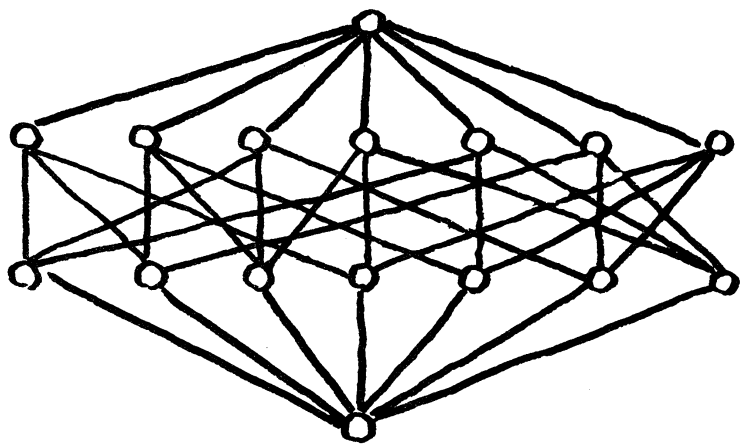
$L_3(2) =$ 

図-28

となる．$L_n(q)$ は modular 束であり，更に，幾何束でもある．

(7.11) 予想. 任意の n と q に対して, $L_n(q)$ は整域的である. ■

集合 $\underline{n}=\{1,2,\cdots,n\}$ の部分集合全体がその包含関係で作る集合束を B_n で表す. $L_n(q)$ は B_n の "q-analog" としてきわめて質の良い振舞をする. すると, (7.8) で構成した B_n に支配される ASL 整域 $R_{\mathbb{Z}}[B_n]$ の何らかの意味での q-analog を探して, それが $L_n(q)$ で支配される ASL 整域となる —— というのが狙いである.

さて, Cohen-Macaulay 半順序集合に支配される ASL 整域の規準加群の話題 [H7] で本講を締め括ろう. 半順序集合 P の部分集合 I が条件「$\alpha\in I$, $\beta\in P$, $\beta\leq\alpha$ ならば $\beta\in I$」を満たす時, I を P の半順序集合としての ideal (poset ideal) と呼ぶ.[46)]

---

46) R が P に支配される k 上の ASL で I が P の半順序集合としての ideal の時, R/I は $P-I$ に支配される k 上の ASL である.

半順序集合 P に於いて、任意の非負整数 n に対して、n 個の元から成る P の重複を許した鎖(multichain) $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ の集合を $\mathcal{A}_n(P)$ で表す. 他方、I を空集合でない P の半順序集合としての ideal とする時、$\mathcal{A}_n(P)$ の元 $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ で $\alpha_1 \in I$ となる重複鎖全体の集合を $\mathcal{A}_n^I(P)$ で表す. 特に $\mathcal{A}_0(P) = \{\phi\}$, $\mathcal{A}_0^I(P) = \phi$ である. そして、$F(P, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \#(\mathcal{A}_n(P))\lambda^n$, $F^I(P, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \#(\mathcal{A}_n^I(P))\lambda^n$ と置く.

(7.12) 定義 ([H7]). P を唯一つの極小元 $-\infty$ を持つ階数 $d-1$ の Cohen-Macaulay 半順序集合とし、I を P の半順序集合としての ideal とする. この時、I が P の規準 ideal (canonical ideal) であるとは、次の条件が満たされる時を言う:

(CAN-1) $F^I(P, \lambda) = (-1)^d \lambda^\rho F(P, \lambda^{-1})$ が或る $\rho \in \mathbb{Z}$ に対して成立する.

(CAN-2) P の半順序部分集合 $P - I$ は階数 $d-2$ の Cohen-Macaulay 半順序集合である. ■

例えば、図-29 の Cohen-Macaulay 半順序集合では、$I_\alpha = \{-\infty, \alpha\}$ が規準 ideal である。もちろん、$I_\beta = \{-\infty, \beta\}$、$I_\gamma = \{-\infty, \gamma\}$ も P の規準 ideal だから、規準 ideal は存在しても一意的とは限らない。

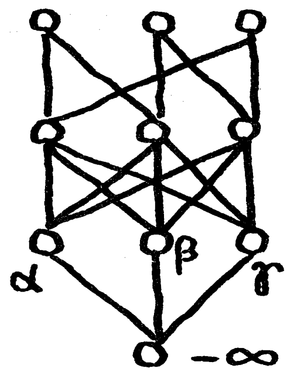
$P =$ 

図-29

しかる時に、(5.9) と (7.2) 及び (7.3) の御利益によって、Cohen-Macaulay 半順序集合の規準 ideal の環論的背景となる次の事実が直ちに従う。

(7.13) 命題. P を唯一つの極小元 $-\infty$ を持つ Cohen-Macaulay 半順序集合とし、I を P の規準 ideal、R を P に支配される ASL 整域とする。この時、R の規準加群 K_R は I で生成される R の ideal $I \cdot R$ と R-加群として同型である。 ■

Cohen-Macaulay 半順序集合の規準 ideal は何時存在するか？ —— という問い掛けはすぐに浮かぶ。

(7.14) 定理([H7]). 有限分配束 L に於いて、$\bar{X}$ を L の結既約(join-irreducible)[47] な元全体から成る部分半順序集合とする. この時, L が規準 ideal を持つためには、条件

(☆) $\bar{X}$ の任意の極小元 ξ に対して、$\bar{X}$ の部分半順序集合 $\bar{X}_\xi := \{x \in \bar{X} ;\ x \geqq \xi\}$ が i) 鎖であり、更に、ii) $\mathrm{rank}(X) - \mathrm{rank}(\bar{X}_\xi) \leqq 1$ である.

—— が成立することが必要十分である.

そして、(☆) の条件が満たされる時,

$$I = \left\{ \alpha \in L \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{等式 } \mathrm{rank}(X) = \mathrm{rank}(X_\xi) \\ \text{を満たす } \bar{X} \text{ の任意の極小元 } \xi \\ \text{に対して、} L \text{ で } \alpha \not\geqq \xi \text{ である} \end{array} \right\}$$

は L の規準 ideal である.

更に、L の規準 ideal は存在すれば一意的である. ■

---

47) 束 L の元 α が結既約とは、$\alpha = \beta \vee \gamma$ ならば $\beta = \alpha$ または $\gamma = \alpha$ が成立する時を言う.

例えば、図-31の分配束Lでは $I=\{-\infty, \alpha\}$ がその規準 ideal となる。

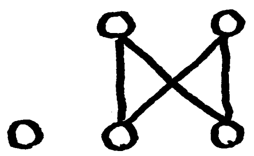
$X =$ 

図-30

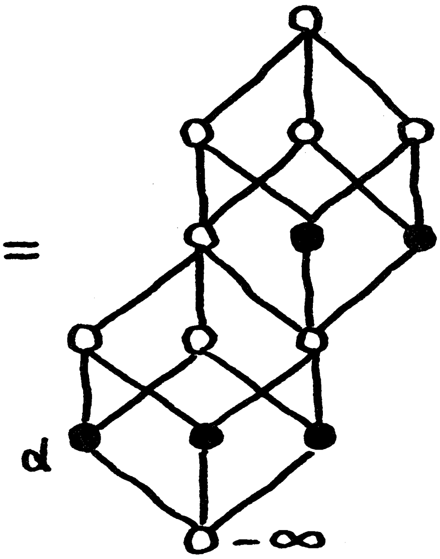
$L =$ 

図-31

Cohen-Macaulay半順序集合の規準idealの定義(7.12)は重複鎖の数え上げの問題と深く拘り合っているので、普通の組合せ論の常套手段では、存在定理(7.14)を証明することは殆ど不可能と思われる。我々の議論[H_7]の根本原理は、連立線型diophantine方程式系に随伴するtorus群の不変式環の規準加群を華麗に記述したStanleyの定理(5.10)なのである。

参考文献

[Bac_1] K.Baclawski, Cohen-Macaulay ordered sets, J. Algebra 63 (1980), 226-258.

[Bac_2] _____, Cohen-Macaulay connectivity and geometric lattices, European J. Combinatorics 3 (1982), 293-305.

[Bac_3] _____, Canonical modules of partially ordered sets, J. Algebra 83 (1983), 1-5.

[Bay] M.Bayer, The extended f-vectors of 4-polytopes, J. Combinatorial Theory, Series A 44 (1987), 141-151.

[Bir] G.Birkhoff, "Lattice Theory", third. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., No. 25 , Amer. Math. Soc., 1967.

[$B-L_1$] L.Billera and C.Lee, Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial convex polytopes, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series) 2 (1980), 181-185.

[$B-L_2$] _____, A proof of sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial convex polytopes, J. Combinatorial Theory, Series A 31 (1981), 237-255.

[$Bjö_1$] A.Björner, Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets. Trans. Amer. Math. Soc. 260 (1980), 159-183.

[$Bjö_2$] _____, Orderings of Coxeter groups, in "Combinatorics and Algebra" (C.Greene, ed.), Contemporary Mathematics, Vol. 34 , Amer. Math. Soc., 1984, pp. 175-195.

[B-G-S] A.Björner, A.Garsia and R.Stanley, An introduction to Cohen-Macaulay partially ordered sets, in "Ordered Sets" (I.Rival, ed.), Reidel, Boston, 1982, pp. 583-615.

[B-K] A.Björner and G.Kalai, An extended Euler-Poincaré theorem, preprint, Royal Institute of Technology, 1987.

[$B-W_1$] A.Björner and M.Wachs, Bruhat order of Coxeter groups and shellability, Advances in Math. 43 (1982), 87-100.

[$B-W_2$] _____, On lexicographically shellable posets, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 323-341.

[B-M] M.Bruggesser and P.Mani, Shellable decompositions of cells and spheres, Math. Scand. 29 (1971), 197-205.

[D-E-P_1] C.De Concini, D.Eisenbud and C.Procesi, Young diagrams and determinantal varieties, Inventiones Math. 56 (1980), 129-165.

[D-E-P_2] _____, "Hodge Algebras", Astérisque 91 (1980).

[Eis] D.Eisenbud, Introduction to algebras with straightening laws, in "Ring Theory and Algebra III" (B.R.McDonald, ed.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., No. 55 , Dekker, New York, 1980, pp. 243-268.

[Gar] A.Garsia, Combinatorial methods in the theory of Cohen-Macaulay rings, Advances in Math. 38 (1980), 229-266.

[Grü] B.Grünbaum, "Convex Polytopes", John Wiley & Sons, Inc. New York, N.Y., 1967.

[H_1] T.Hibi, Every affine graded ring has a Hodge algebra structure, Rend. Sem. Mat. Univers. Politech. Torino 44 (1986), 277-286.

[H_2] _____, For which finite groups G is the lattice $L(G)$ of subgroups Gorenstein ? , Nagoya Math. J. 105 (1987).

[H_3] _____, Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws, in "Commutative algebra and Combinatorics" (M.Nagata and H.Matsumura, eds.), Advanced Studies in Pure Math., Vol. 11 , North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 91-109.

[H_4] _____, Union and glueing of a family of Cohen-Macaulay partially ordered sets, Nagoya Math. J. 107 (1987).

[H_5] _____, Level rings and algebras with straightening laws, to appear.

[H_6] _____, Classification of integral trees, Order 3 (1987).

[H_7] _____, Canonical ideals of Cohen-Macaulay partially ordered sets, to appear.

[H_8] _____, Plane graphs and Cohen-Macaulay posets, to appear.

[H_9] _____, Regular and semi-regular points of Cohen-Macaulay partially ordered sets, submitted.

[H_{10}] _____, Plane graphs and Cohen-Macaulay posets II, submitted.

[H_{11}] _____, Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains III, to appear.

[H_{12}] _____, A numerical characterization of Gorenstein complexes, submitted.

[H_{13}] _____, What can be said about pure O-sequences ? , to appear.

[H_{14}] _____, Stanley's problem on (P,ω)-partitions, preprint.

[H_{15}] _____, What can be said about w-vectors of finite partially ordered sets ? , preprint.

[H_{16}] _____, Linear diophantine equations and Stanley's (P,ω)-partitions, in preparation.

[H_{17}] _____, Toroidal posets, in preparation.

[$H\text{-}W_1$] T.Hibi and K.-i.Watanabe, Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains I, Hiroshima Math. J. 15 (1985), 27-54.

[$H\text{-}W_2$] _____, Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains II, Hiroshima Math. J. 15 (1985), 321-340.

[Hoc_1] M.Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, Ann. of Math. 96 (1972), 318-337.

[Hoc_2] _____, Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, in "Ring Theory II" (B.R.McDonald and R.Morris, eds.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., No. 26 , Dekker, New York, 1977, pp. 171-223.

[Mac] F.S.Macaulay, Some properties of enumeration in the theory of modular systems, Proc. London Math. Soc. 26 (1927), 531-555.

[Mc_1] P.McMullen, The maximal number of faces of a convex polytope, Mathematika 17 (1970), 179-184.

[Mc_2] _____, The numbers of faces of simplicial polytopes, Israel J. Math. 9 (1971), 559-570.

[M-S] P.McMullen and G.Shephard, "Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture", Cambridge Univ. Press, 1971.

[Mot] T.Motzkin, Comotone curves and polyhedra, Bull. Amer. Math. Soc. 63 (1957), 35 (Abstract 111).

[Mun] J.Munkres, Topological results in combinatorics, Michigan Math. J. 31 (1984), 113-128.

[Rei] G.Reisner, Cohen-Macaulay quotient of polynomial rings, Advances in Math. 21 (1976), 30-49.

[Sta_1] R.Stanley, Ordered structures and partitions, Memoirs Amer. Math. Soc. 119 (1972).

[Sta_2] _____, Linear homogeneous diophantine equations and magic labelings of graphs, Duke Math. J. 40 (1973).

[Sta_3] _____, Combinatorial reciprocity theorems, Advances in Math. 14 (1974), 194-253.

[Sta_4] _____, Cohen-Macaulay rings and constructible polytopes, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 133-135.

[Sta_5] _____, The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, Studies in Appl. Math. 54 (1975), 135-142.

[Sta_6] _____, Magic labelings of graphs, symmetric magic squares, systems of parameters, and Cohen-Macaulay rings, Duke Math. J. 43 (1976), 511-531.

[Sta_7] _____, Cohen-Macaulay complexes, in "Higer Combinatorics" (M.Aigner, ed.), Reidel, 1977, pp. 51-62.

[Sta_8] _____, Hilbert functions of graded algebras, Advances in Math. 28 (1978), 57-83.

[Sta_9] _____, Balanced Cohen-Macaulay complexes, Trans. Amer. Math. Soc. 249 (1979), 139-157.

[Sta_{10}] _____, The number of faces of a simplicial convex polytope, Advances in Math. 35 (1980), 236-238.

[Sta_{11}] _____, Decompositions of rational convex polytopes, Annals of Discrete Math. 6 (1980), 333-342.

[Sta_{12}] _____, Linear diophantine equations and local cohomology, Inventiones Math. 68 (1982), 175-193.

[Sta_{13}] _____, Some aspects of groups acting on finite posets, J. Combi. Theory, Series A 32 (1982), 132-161.

[Sta_{14}] _____, "Combinatorics and Commutative Algebra", Progress in Math., Vol. 41 , Birkhäuser, Boston, 1983.

[Sta_{15}] _____, "Enumerative Combinatorics, Volume I", Wadsworth, Monterey, Calif., 1986.

[Sta_{16}] _____, On the number of faces of centrally-symmetric simplicial polytopes, Graphs and Combi. 3 (1987), 55-66.

[Sta_{17}] _____, Generalized h-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results, in "Commutative Algebra and Combinatorics" (M.Nagata and H.Matsumura, eds.), Advanced Studies in Pure Math., Vol. 11 , North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 187-213.

[Sta_{18}] _____, Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics and geometry, preprint, M.I.T., 1986.

[Wat_1] K.-i.Watanabe, Study of algebras with straightening laws of dimension 2, in "Algebraic and Topological Theories" (M.Nagata, et al., eds.) Kinokuniya, 1985.

[Wat_2] _____, Study of four-dimensional Gorenstein ASL domains (Integral posets arising from triangulations of a 2-sphere), in "Commutative Algebra and Combinatorics" (M.Nagata and H.Matsumura, eds.), Advances Studies in Pure Math., Vol. 11 , North-Holland, 1987, pp. 313-335.