数理解析研究所講究録
第 641 巻 1988 年 124-126

中心対称な多面体の面の個数について
(R. Stanley の結果の紹介)

東海大・理 渡辺敬一 (Kei-ichi WATANABE)

P を d 次元 simplicial polytope (各 face が simplex であるような多面体), $f_i = f_i(P)$ で P の i 次元の face の個数をあらわすことにする ($f_{-1} = 1$ とおく)。($f_0, \cdots, f_d$) を並べたものを P の f-vector という. また, P の "h-vector" $h = (h_0, \cdots, h_d)$ を

$$h_i = h_i(P) = \sum_{j=0}^{i} \binom{d-j}{d-i} \cdot (-1)^{i-1} \cdot f_{j-1} \qquad (0 \le i \le d)$$

で定義する。$h(P)$ から $f(P)$ を回復するのは容易だから, $h(P)$ を与える事と $f(P)$ を与える事は同値である。例えば, P が正8面体とすると, $f(P) = (6, 12, 8)$ だから, $h(P) = (3, 3, 1)$ となる。もっと一般に, $(\pm 1, 0, \cdots, 0), (0, \cdots \pm 1, \cdots 0), (0, \cdots, 0, \pm 1)$ を頂点とする polytope を "cross polytope" といい, この場合 $h(P) = \left(\binom{d}{1}, \binom{d}{2}, \cdots, \binom{d}{d}\right)$ で与えられる。

講演では R. Stanley の結果 [1] を中心として, $f(P)$, $h(P)$ に関する予想を、可換環論, torus embedding, "hard Lefschetz theorem" 等をどのように組合せて証明し

て行くかを紹介した。

まず，simplicial complex Δ と体 k に対し，"Stanley-Reisner ring" $k[\Delta]$ を（Δ の vertex を $v_1, \ldots, v_n$ とする）

$$k[\Delta] = k[X_1, \ldots, X_n]/(X_{i_1}\cdots X_{i_s} \mid \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}\} \notin \Delta)$$

で定義する．$k[\Delta]$ は graded ring だから，Poincaré series

$$F(k[\Delta], t) := \sum_{n \geq 0} \dim k[\Delta]_n \cdot t^n = \sum_{i=-1}^{d} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{i+1} \cdot f_i = \frac{1 + h_0 t + h_1 t^2 + \cdots + h_d \cdot t^{d+1}}{(1-t)^{d+1}}$$

によって，$h(P)$ と $f(P)$ の関係が説明される．P が simplicial polytope であるとき，$|P|$ は S^d（球面）と同相だから，$k[P]$ は Gorenstein 環となり，$h(P)$ は対称的になる。（$h_i = h_{d-1-i}$，$-1 \leq i \leq d$）。

次に，P の頂点を有理点に選ぶと，（$\mathbb{R}^{d+1} \supset P \ni 0$ として），P は $\mathbb{R}^{d+1}$ の rational partial polyhedral decomposition を定めるので，トーラス埋め込みの理論より，compact alg. variety $X_P = T_N \operatorname{emb}(P)$ が定義され，この variety の cohomology ring に対し，

$$\bigoplus_{i=0}^{d+1} H^{2i}(X; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[P]/(\theta_0, \ldots, \theta_d) \quad \text{（環の同型）}$$

が成立する。但し，$(\theta_0, \ldots, \theta_d)$ は $\mathbb{C}[P]$ の次数 1 の元から成る parameter 系．$\mathbb{C}[P]$ は Gorenstein 環より，$(\theta_0, \ldots, \theta_d)$ は regular sequence であり，$\dim H^{2i}(X; \mathbb{C}) = \dim(\mathbb{C}[P]/(\theta_0, \ldots, \theta_d))_i = h_{i+1}(P)$．$(-1 \leq i \leq d+1)$．

Pが原点に対し対称的なとき，Pを"centraly symmetric"という．対称的という事は，Pに位数2の群が作用しているという事であり，この作用は X_P，$\mathbb{C}[P]$，$H^*(X;\mathbb{C})$ に拡張される．この作用と，hard Lefschetz Theorem（Stanleyの論文によると，斉藤盛彦氏によって intersection cohomology を使って証明が与えられたそうだが）を組合せると，次のような結果が得られる．

<u>定理</u>．Pが $(d-1)$ 次元 centrally symmetric simplicial polytope

$\Rightarrow$ (1) $h_i(P) \geq \binom{d}{i}$，特に $f_{d-1} \geq 2^d$

(2) $h_i(P) - h_{i-2}(P) \geq \binom{d}{i} - \binom{d}{i-1}$ $\quad (1 \leq i \leq [\frac{d}{2}])$

(3) $h_{i-1}(P) = \binom{d}{i}$ となる i，$(2 \leq i \leq d)$ が存在するとき，

$\forall j$，$h_{j-1}(P) = \binom{d}{j}$ で，Pは "cross-polytope" と同値．

REFERENCES.

[1] R. Stanley, On the Number of Faces of Centrally-Symmetric Simplicial Polytopes, Graphs and Combinatorics 3, 55-66 (1987).

[2] R. Stanley, Commutative Algebra and Combinatorics, Progress in Math. 41, Birkhauser 1983.

[3] 小田忠雄，凸体と代数幾何学，紀伊國屋，(1985)