

Young 図形を用いた古典群の表現論の制限公式

東大・理 寺田 至 (Itaru Terada)

Young 図形は組合せ論的な構造の豊富な魅力の尽きない対象である。表現論的には、対称群の既約表現や \mathbb{C} 上の古典群の既約表現をパラメトライズするのに使われ、これらの表現に付随する種々の量や性質が Young 図形を用いてうまく表される。

Young 図形をめぐる理論の中で精緻なものの一つが Littlewood-Richardson 法則である。(ほかに Robinson-Schensted 対応などの興味深いものもあるが本稿では扱わない。) Littlewood-Richardson 法則は Lie 環・Lie 群論との関連では、① $GL(n, \mathbb{C})$ の多項式表現のテンソル積の分解、② 同じく $GL(k, \mathbb{C}) \times GL(n-k, \mathbb{C})$ への制限の分解を記述している。本講究録中の小池和彦氏の報告では①の Sp, SO 版が述べられている。

([K1], [K2] 参照)

本稿ではそれをうけて②の Sp 版を解説する。即ち、次の
 ①②の場合に \mathbb{C} 上の古典群 G の有限次元既約有理表現を部分
 群 H に制限したときの分解を Young 図形を用いて記述する。
 以下 \mathbb{C} 上の群のみを考えるので \mathbb{C} は省略する。

① $G = Sp(2n)$ から $H = Sp(2k) \times Sp(2n-2k)$ への制限

② $G = Sp(2n)$ から $H = GL(k) \times Sp(2n-2k)$ (parabolic 部分
 群の Levi 部) への制限

この内容は小池和彦氏と共著の投稿中の論文 [KT2] の一部で
 ある。小池和彦氏の論文 [K1] とこの [KT2] の中で、 G が $GL(n)$,
 $SO(2n+1)$, $SO(2n)$ の場合を含めて、 G の有理表現を G と等し
 い rank を持つ reductive 部分群 H に制限したときの分解がすべ
 て求められている。(H が G の parabolic 部分群の Levi 部の場
 合がすべて含まれる。) (G が $SO(2n)$ の場合 1 つの限定があ
 る。詳細は [KT2] を参照していただきたい。)

われわれの方法の特徴は次のように要約できる。(小池氏
 の報告で述べられたテンソル積の分解の方法とも共通する。)

(1) Young 図形に関する操作規則 (主として Littlewood-
 Richardson 法則) を用いて結果を述べる。

(2) rank に関し統一的に扱う。特にこの種の現象は n が
 一定の限界より大きいとき安定性を呈するか、その安定状態
 を記述するための具体的な数学的対象を無限変数対称式とし

て明確に与え、安定状態を表す無限変数対称式間の等式と、rank を小さくしたときの変動を表す法則との組合せで現象を表現する。

結果の公式だけをお知りになりたい方は、 $Sp(2n)$ や $GL(k)$ の有理表現のパラメトライズのかた（^{不講義録} $[K_2]$ 及び本稿 §5 の初め）と結果の部分（§3, 4(例), §6）及び“ n による変化”を表す specialization hom. の像の具体的計算（^{不講義録} $[K_2]$ 及び §5）だけをご覧になればすむよう配慮するつもりである。本稿では証明は述べないが、安定状態の記述のためにどういう対象を用意したかは是非とも明確にしていきたい。

1. 分割に関連した用語の追加

分割 λ , その長さ $l(\lambda)$, 分割を表す Young 図形, Littlewood-Richardson 係数の定義は ^{不講義録} $[K_2]$ をご覧いただきたい。引き続き分割全体の集合を \mathcal{P} で表す。ここで用語を2つ追加しておく。

定義 分割 λ に対し, λ の Young 図形の の意味での転置図形で表される分割を λ' で表し, λ の 共役分割 という。

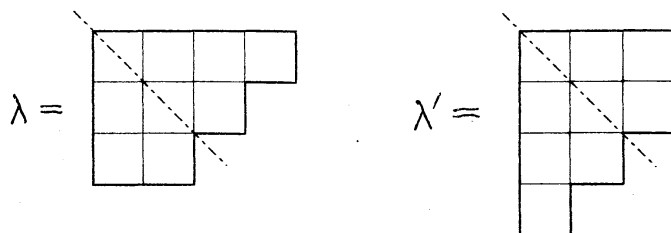


図1 λ' (共役分割)

定義 $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$, $\lambda \supset \mu$ とする。 $LR_{\lambda, \mu}^{\nu}$ を定義するとき
に個数を数えた対象 ([本講義]参照) を, shape が $\lambda - \mu$ で weight が ν の LR-tableau と呼ぶ。即ち下の例のように, λ の Young
図形の中に左上隅を重ねて μ の Young 図形を置き, λ の中で
 μ より外側の箱にそれぞれ数字を書きこんで, 次の条件を
満たすようにしたもののことである。

- (1) 1 の個数が ν_1 個, 2 の個数が ν_2 個, ... ($\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$)
- (2) 各行に沿って数字は等号を許して右に単調増加
- (3) 各列に沿って数字は等号を許さずに下に単調増加
- (4) 第 k 列以降の数字 i の個数を $d_k(i)$ とすると, すべての
の k に対し $d_k(1) \geq d_{k+1}(1) \geq \dots$

例 $\lambda = (4, 3, 1)$, $\mu = (2, 1)$, $\nu = (3, 2)$ のとき, shape
が $\lambda - \mu$ で weight が ν の LR-tableau は次の2個。

		1	1
	1	2	
2			

		1	1
	2	2	
1			

図2 shape $\lambda - \mu$, weight ν の LR-tableau

2. 制限公式のための定式化

普遍指標環 Λ , 普遍指標 λ_{GL} (= Schur 関数 s_{λ}) と λ_{Sp} ,
specialization hom. $\pi_n, \pi_{Sp(2n)}$ の定義も[本講義]をご覧願いたい。

われわれが「普遍指標環と呼ぶ」graded ring は, 可算個の変

数 t_1, t_2, \dots に関する \mathbb{Z} 係数の “対称多項式” (実際には単項式の形式的無限和で t_1, t_2, \dots に関し対称で, 単項式の次数が有界なもの) のなす環であった。部分群への制限の式を無限変数化するために, Λ の $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ への 標準的埋込み C を定義する。便宜上 $\Lambda \otimes \Lambda$ の左の Λ と右の Λ では異なる文字を変数として使うことにしよう。

記法 変数列 $x = (x_1, x_2, \dots)$ に関する普通指標環を Λ_x と書く。 Λ_y, Λ_t 等も同様。

$C: \Lambda_t \longrightarrow \Lambda_x \otimes \Lambda_y$ は直観的にいえば, t_1, t_2, \dots に関する対称式 $f(t)$ に対し, 変数 $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ に関する “同等な” 対称式 $f(x, y)$ を対応させる写像である。形式的には次の通り。

命題及び定義 次の図式を可換にする graded ring の単射準同型 C がただ一つ存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_t & \xrightarrow{C} & \Lambda_x \otimes \Lambda_y \\
 \pi_{m+n} \downarrow & & \pi_m \downarrow \quad \pi_n \downarrow \\
 \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_{m+n}]^{\mathcal{X}_{m+n}} & \xrightarrow{\substack{t_i = x_i \ (1 \leq i \leq m) \\ t_{m+j} = y_j \ (1 \leq j \leq n)}} & \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]^{\mathcal{X}_m} \otimes \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]^{\mathcal{X}_n}
 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} t_i = x_i \ (1 \leq i \leq m) \\ t_{m+j} = y_j \ (1 \leq j \leq n) \end{array} \right\} \text{ 代入}$

(すべての自然数 m, n に対して。)

例 k 次基本対称式 $e_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k}$ に対し,

$$C(e_k) = e_k(x, y) = \sum_{V \subset \{1, 2, \dots, m+n\}, |V|=k} \prod_{v \in V} v = \sum_{\ell=0}^k \sum_{i_1 < \dots < i_\ell, j_1 < \dots < j_{k-\ell}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\ell} y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_{k-\ell}}$$

例 Schur 関数 S_λ については

$$(*) \quad C(S_\lambda) = S_\lambda(x, y) = \sum_{\mu, \nu \in \mathcal{P}} LR_{\mu\nu}^\lambda S_\mu(x) \otimes S_\nu(y)$$

が知られている (例えば [M, p. 41, (5.9)] 参照)。 $l(\lambda) \leq m+n$ とし て両辺に $\pi_{m,x} \otimes \pi_{n,y}$ を施すと次の等式を得る。

$$\lambda_{GL(m+n)}(t_1, \dots, t_{m+n}) = \sum_{\substack{\mu, \nu \in \mathcal{P} \\ l(\mu) \leq m, l(\nu) \leq n}} LR_{\mu\nu}^\lambda \mu_{GL(m)}(t_1, \dots, t_m) \nu_{GL(n)}(t_{m+1}, \dots, t_{m+n}).$$

この式は, $GL(m+n)$ の既約表現 $\lambda_{GL(m+n)}$ を,

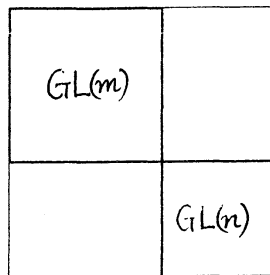
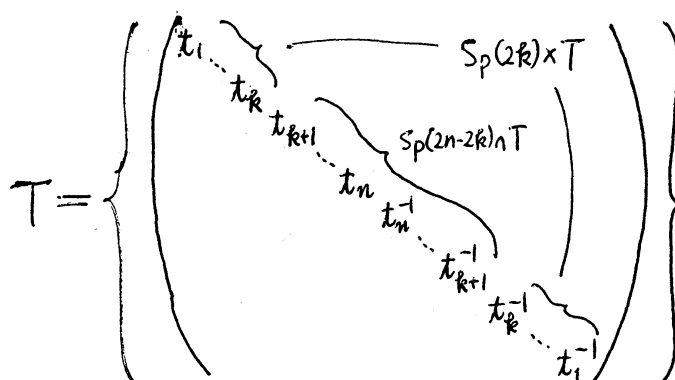


図 3

のように diagonal に埋めこまれた $GL(m) \times GL(n)$ に制限したときの分解を表している。それを見るには, $GL(m+n)$ は極大 torus として $T = \{\text{diag}(t_1, \dots, t_{m+n}) \mid t_i \in \mathbb{C}^\times (1 \leq i \leq m+n)\}$ を持ち, $\lambda_{GL(m+n)}$ はこの表現による $\text{diag}(t_1, \dots, t_{m+n})$ の像の trace を t_1, \dots, t_{m+n} で表す関数であること, そして上の $GL(m) \times GL(n)$ は極大 torus T を共有し, 変数 t_1, \dots, t_m が $GL(m)$ の部分に対応, t_{m+1}, \dots, t_{m+n} が $GL(n)$ の部分に対応することを思い出せばよい。

以下で述べる制限公式の導き方はすべて基本的にこれと同じである。即ち, 極大 torus の部分群への分かれ方と



($l(\mu) \leq k, l(\nu) \leq n-k$) の和に書き直す式のことである。これと $\pi_{Sp(2n)}$ の定義を考え合わせれば、その母体となる普遍指標間の等式とは、 $C(\lambda_{Sp}) = \lambda_{Sp}(x, y)$ を $\mu_{Sp}(x) \otimes \nu_{Sp}(y)$ に関してまとめ直す式であることがわかる。その計算を実行すると次の式を得る。

定理 λ を任意の分割とするとき

$$\lambda_{Sp}(x, y) = \sum_{\mu, \nu \in \mathcal{P}} \left(\sum_{\kappa, \theta \in \mathcal{P}} LR_{\theta, \nu}^{\lambda} LR_{(2\kappa)', \mu}^{\theta} \right) \mu_{Sp}(x) \otimes \nu_{Sp}(y).$$

ここで $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_l)$ のとき $2\kappa = (2\kappa_1, \dots, 2\kappa_l)$; $(2\kappa)'$ はその共役分割である。

係数の部分を図解すれば、図4のような「もの」の個数である。

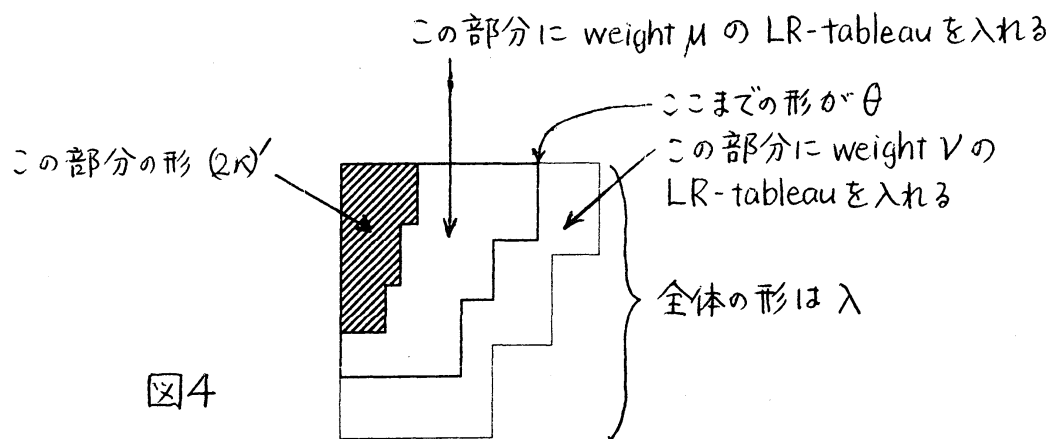


図4

但し与えられているのは λ, μ, ν だけであり, K と θ は自由に動く (自由といっても $(2K)' < \theta < \lambda$ かつ $|\lambda| - |\theta| = |\nu|$, $|\theta| - |(2K)'| = |\mu|$ でないような「もの」は存在しない。)

さらに, 上の分解を全部求めるのであれば μ も ν も特定せず, K と θ を $(2K)' < \theta < \lambda$ であるように全部動かして, λ と θ の間及び θ と $(2K)'$ の間を LR-tableau で埋めた「もの」を全部書き上げ, それぞれから 2 つの LR-tableau の weight μ 及び ν を読み取り, どのような μ と ν の組合せが何回現れるか数えればよい。

なお, この形に書くと μ と ν に関する対称性が見えてこないが, LR 係数の Schur 関数の積の分解係数としての意味に立ち戻って考えると, 上の定理の係数は μ と ν に関してちゃんと対称になっている (ここでは細部は省略する)。

予稿集では $(2K)'$ とすべきところを誤って単に $2K$ と記してしまつたことをお詫びさせていただきたい。

さて, この定式化は, 左辺に $\pi_{Sp(2n)}$ を施すのと右辺に “ x に関して $\pi_{Sp(2k)}$, y に関して $\pi_{Sp(2n-2k)}$ ” を施すのが “compatible” になるように, そしてその結果が $\downarrow_{Sp(2k) \times Sp(2n-2k)}^{Sp(2n)}$ の制限公式になるように考えたものであった。 $Sp(2n)$ の既約表現は長さ n 以下の分割で網羅されるから $l(\lambda) \leq n$ と仮定しよう。 $\pi_{Sp(2n)}$ の記述 (\rightarrow 小池氏の報告) を思い出すと, $l(\lambda) \leq n$ ならば

$\pi_{sp(2n)}(\lambda_{sp}) = \lambda_{sp(2n)}$ であつた。従つて

系 λ を長さ n 以下の分割とする。このとき

$$\lambda_{sp(2n)}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\mu, \nu \in \mathcal{P}} \left(\begin{array}{c} \text{定理と同じ} \\ \text{係数} \end{array} \right) \pi_{sp(2k)}(\mu_{sp})(t_1, \dots, t_k) \cdot \pi_{sp(2n-2k)}(\nu_{sp})(t_{k+1}, \dots, t_n).$$

特に k も $n-k$ も共に $l(\lambda)$ 以上ならば

$$\lambda_{sp(2n)}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\mu, \nu \in \mathcal{P}} \left(\begin{array}{c} \text{定理と同じ} \\ \text{係数} \end{array} \right) \mu_{sp(2k)}(t_1, \dots, t_k) \cdot \nu_{sp(2n-2k)}(t_{k+1}, \dots, t_n). \quad \text{—}$$

後半について補足すると, $LR_{\beta\gamma}^{\alpha}$ は定義により $\beta < \alpha$ (Young 図形が左上を重ねたときす, ほうり含まれることをいう) でなければ 0 であるが, $LR_{\beta\gamma}^{\alpha}$ には β と γ に関する対称性があり, “ $\gamma < \alpha$ でなければ 0” も成立する。従つて定理の右辺に実際に出てくる μ と ν はいずれも λ に含まれるものに限られる。それで $l(\lambda) \leq k, n-k$ であれば, 右辺に現れるすべての μ, ν について $\pi_{sp(2k)}(\mu_{sp}) = \mu_{sp(2k)}$, $\pi_{sp(2n-2k)}(\nu_{sp}) = \nu_{sp(2n-2k)}$ となるわけである。これが, 「普遍指標間の等式は安定状態を表す」と述べたことの具体的な意味であり, その安定圏に入るための条件が $l(\lambda) \geq k, n-k$ というわけである。

安定圏に達しない場合, 系の右辺のうち $l(\mu) > k$ なる μ については $\pi_{sp(2k)}(\mu_{sp})$ を求め, $l(\nu) > n-k$ なる ν については $\pi_{sp(2n-2k)}(\nu_{sp})$ を求める必要がある。その求め方が, 小池氏の報告の最後に述べられている specialization の image の決定である。 $l(\mu) > k$ のとき, $\pi_{sp(2k)}(\mu_{sp})$ は 0 になつたり, ある既約指標の ± 1 倍 (すなわち $\pm \zeta_{sp(2k)}$, $l(\zeta) \leq k$) になつたり

する（が、既約指標の2倍とか異なる2つの既約指標の和とかにはならない）。具体的に μ をもってきたときどれになるかはそこに書かれている Young 図形操作で正確にわかる。この操作を系の右辺の各項に適用した結果、0 にならなくなった項を省き残った土の項を打消し合、たあとの式が実際の安定前の制限公式というわけである。

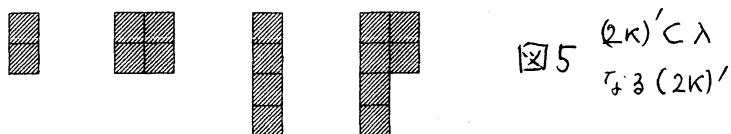
以上がわれわれの方針にのっとった①の解答である。ただ、安定圏に達しない場合に項が消えたり交代和を打消したりするプロセスが入るため最短コースでなくなるように思われる点が少し心残りである。これについては特別な場合にはさらに解決できる。次節の最後のほうで少し検討したい。

4. 例と補足

例 $\lambda = (2, 2, 1, 1)$ として $\lambda_{Sp(2n)}$ を $Sp(2k) \times Sp(2n-2k)$ に制限する。

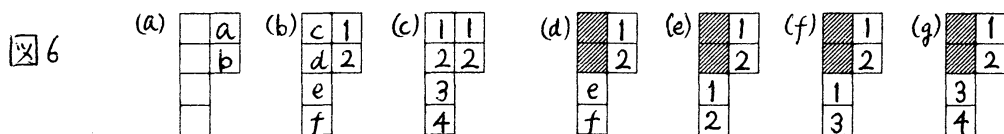
まず定理を適用して、 $\lambda_{Sp}(x, y)$ を $\mu_{Sp}(x) \otimes \nu_{Sp}(y)$ で表す式を求めるため、図4のような「もの」を全部書き上げる過程をなるべく実感の出るように少し再現してみよう。

λ に含まれる $(2k)'$ の可能性は次の5通りある。これを



入の中に左上を揃えて入れる。今後この中を斜線で覆うことにしよう。

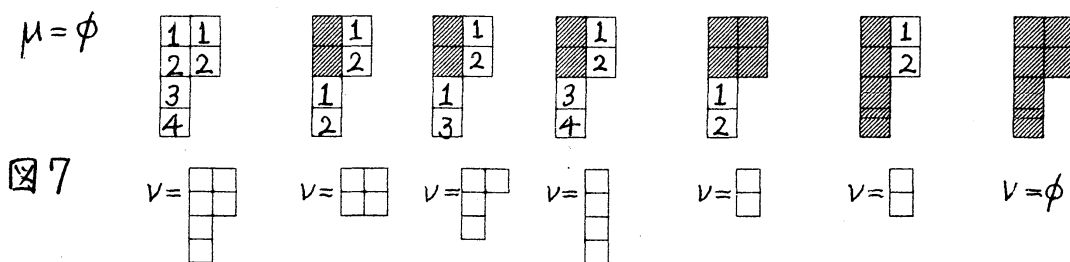
あとの都合上 μ が同じものごとくにまとめて作っていくことにする。まず $\mu = \phi$ の分を全部作ろう。初めに $(2K)' = \phi$ とすると θ も ϕ となり、 λ が丸々 weight ν の LR-tableau 用の場所として残っている。一般に shape の“内側”が ϕ の、すなわち shape が $\lambda - \phi$ の形の LR-tableau は 1 通りしかなく、それは 1 行目を全部 1, 2 行目を全部 2, ... というふうにした weight λ のものである。これを今の場合に確かめてみよう。まず一番右の列(第 2 列)の中身を上から a, b としよう(図 6 (a))。LR-tableau の定義(不稿_{第節})の条件(3)(下に増加)より $a < b$ である。定義(4)を $k=2$ として適用すると、第 2 列は最終列だから“第 k 列以降”とは第 2 列のことであり、仮に $a \geq 2$ とすると $d_2(1) = 0 < d_2(a) = 1$ で違反, よって $a = 1$ となる。さらに $b \geq 3$ とすると $d_2(2) = 0 < d_2(b) = 1$ で違反だから $b = 2$ となる。すなわち第 2 列は上から 1, 2 しかありえない。次に第 1 列の中身を上から c, d, e, f としよう(図 6 (b))。定義(2)(右に非減少)より $c \leq 1, d \leq 2$, 定義(3)(下に増加)より $c < d (< e < f)$ だから





$c=1, d=2$ は決まり。仮に $e \geq 4$ とすると $d_1(3)=0 > d_1(e)=1$ となり定義(4)に違反するから $e=3$ となつて、同様の議論で $f=4$ と決まる。こうしてできたのが図6(c)である。

次に $(2\kappa)' = \square$ とする。相変らず $\mu = \phi$ だから $\theta = (2\kappa)' = \square$ であり、その外側に LR-tableau を作つてその weight ν を求めていけばよい。第2列は $(2\kappa)' = \phi$ の場合と同様の議論で中身は1,2に決まってしまう。第1列(第3,4行)の中身を $e < f$ とする(図6(d))。これらは第2列と接していないから、定義(2)は何ら制約を与えない。まず $e=1$ としてみると、 $f=2$ ($d_1(1)=d_1(2)=2 > d_1(3)=0=\dots$) と $f=3$ ($d_1(1)=2 > d_1(2)=d_1(3)=1 > d_1(4)=0=\dots$) は可(図6(e),(f))だが $f \geq 4$ では $d_1(3)=0 < d_1(f)=1$ となり定義(4)に反する。次に $e=2$ とすると、 $d_1(1)=1 < d_1(2)=2$ で違反。 $e=3$ とすると同様の議論で $f=4$ のみ可(図6(g))となり、 $e \geq 4$ の場合はすべて不可となる。(e),(f),(g)のそれぞれの場合の ν は(1の個数, 2の個数, ...) を数えて $(2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)$ となる。

同じ調子で残り3通りの $(2\kappa)'$ についてもやってみると、図7の7通りが $\mu = \phi$ の場合のすべてであることがわかる。



$\mu = \square$ の場合ももう少し見ておこう。 $(2K)' = \emptyset$ の場合これに“1を1個”つけてできる LR-tableau というのは外側の形即ち θ が \square の1通りしかない。その外側に LR-tableau を作ってみると図8 (a),(b)の2通りができる。(図では θ と $(2K)'$ の間の部分を太枠で囲って示すことにする。) 次に $(2K)' = \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}$ ととると, “shape が $\theta = \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}$, weight が“(1)の LR-tableau”は

$\theta = \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}$ の  と $\theta = \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ の  の2つか”

あり, これだけである。そのそれぞれの外側に LR-tableau を作っていくと図8 (c)~(f)ができる。

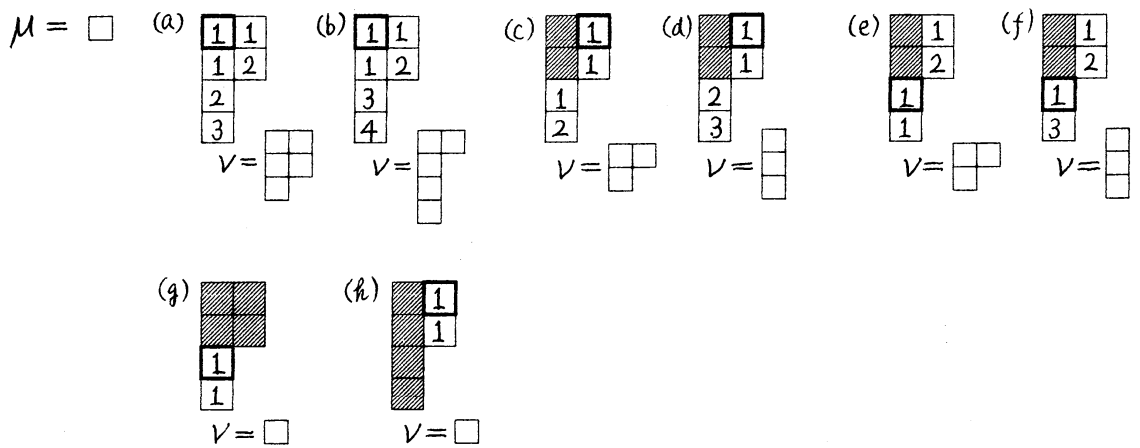
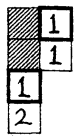
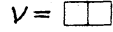
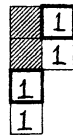
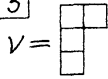
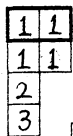


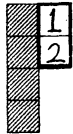
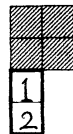
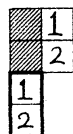
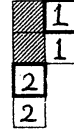
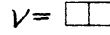
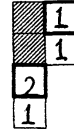
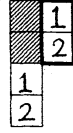
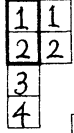
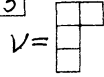
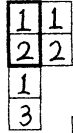
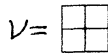
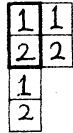
図8 $\lambda_{sp}(x, y) = \sum \mu_{sp}(x) \otimes \nu_{sp}(y)$ の分解 ($\mu = (1)$ の部分)

この調子で数字埋めの作業を続けていくと, μ と ν のリストは図7, 図8 を除き次のようになる。この1つ1つに対応して項 $\mu_{sp}(x) \otimes \nu_{sp}(y)$ がでてくるわけである。

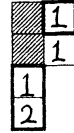
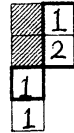
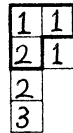
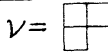
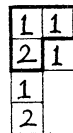
$$\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$



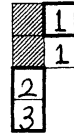
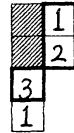
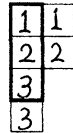
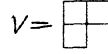
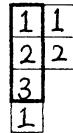
$$\mu = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$



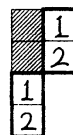
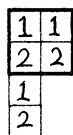
$$\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$



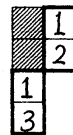
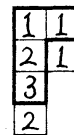
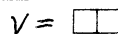
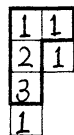
$$\mu = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$



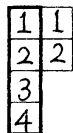
$$\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$



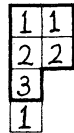
$$\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$



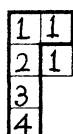
$$\mu = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$



$$\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$



$$\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$



$$\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$



图 9

系のところで述べたように、 l と $n-l$ がともに4以上ならば、いまのリストはそのまま $\lambda_{Sp(2n)}$ を $Sp(2l) \times Sp(2n-2l)$ に制限したときの成分 $\mu_{Sp(2l)} \times \nu_{Sp(2n-2l)}$ の重複度のみリストになっているわけである。

次に l や $n-l$ が“小さい”場合に何が起きるか例で見てみることにしよう。簡単のため、 $n-l$ は十分大きい(4以上、従って上のリストの全部の ν に対し $\pi_{Sp(2n-2l)}(\nu_{Sp}) = \nu_{Sp(2n-2l)}$) とし、 l が一番小さい $l=1$ の場合をやってみよう。上の分解に現れた μ_{Sp} に $\pi_{Sp(l)}$ を施した結果は図10のようになる ($l(\mu) \leq 1$ のものはそのまま $\mu_{Sp(l)}$ となるので省略)。

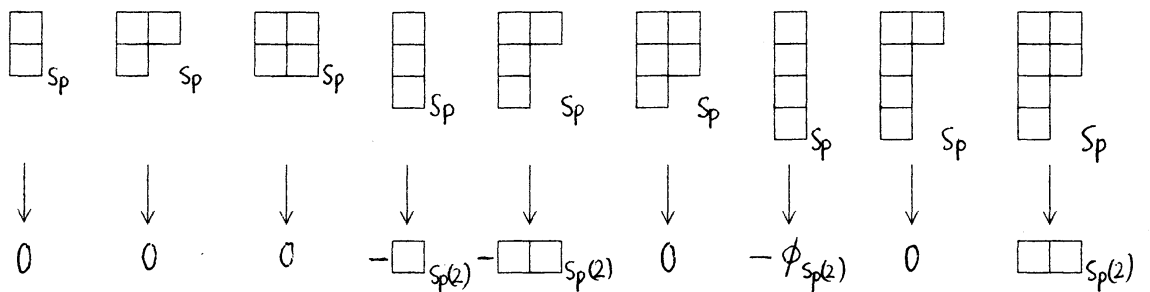


図10 $\pi_{Sp(l)}$ の影響

このうち最後の $\mu = (2, 2, 1, 1)$ の場合だけ、小池氏の報告の最後にあった操作を適用して確かめてみよう。

(4, 2) …… μ の列の長さ (= μ' に対応する分割)

(4, 1) …… “階段” (0, 1) を引いたもの

(0, 1) …… $l+1 (= 2)$ より大きいものを $2l+2$ から引いた値でおきかえたもの。おきかえた個数 $s=1$

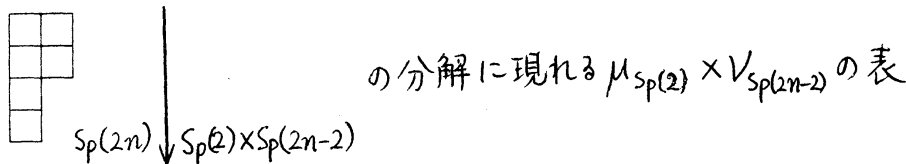
(1,0) …… 大きい順にしたもの。置換の符号 $\varepsilon = -1$

(1,1) …… “階段”(0,1) を加えたもの。

列の長さが (1,1) である分割は $\square\square$ である。従って

$$\pi_{Sp(2)}(\mu_{Sp}) = (-1)^{|\mu|} \varepsilon_{\square\square_{Sp(2)}} = \square\square_{Sp(2)} \text{ となる。}$$

さて図10に基づいて上のリストを書き変える。まず $\pi_{Sp(2)}$ で0になる $\mu = (1,1), (2,1), (2,2), (2,2,1), (2,1,1,1,1)$ の部分は全部削除する。 $\mu = (1,1,1)$ から出てくる4つの項は、 $\mu = (1)$ のうち ν が同じもの4つを捜してそれと打消す。 $\mu = (2,1,1)$ から出てくる3つの項は、 $\mu = (2)$ 及び $(2,2,1,1)$ から出てくるうちの3つと打消す。 $\mu = (1,1,1,1,1)$ から出てくる2つの項は $\mu = \emptyset$ のうちの2つと打消す。かくして生き残るのは次の通りである。



μ	ν
\emptyset	
\square	
$\square\square$	

図 11

このようにしてせ、かく苦労して求めた項が水泡に帰して消えていくのを見ていると、何か遠回りをしているのではないかという気分は否めない。安定形の式から $k, n-k$ が小さいときのこともわかるということ自体は美しい法則であるが、例えば特定の k に対する結果だけ知るには何か交代和を含まない式がありうるのではないかという気がしてくる。

これはある程度正しい。例えば、上の例の中で $\mu=(1,1,1,1)$ から出てきた2つの項とちょうど打消し合う $\mu=\phi$ の項としては、 $(2k)'$ の長さが2を超える2つを選べばうまくいく。ありがたいことにこれは偶然ではなく、一般の (fixした) k に対し次のことが成立する。

定理 λ を長さ $n-k$ 以下の分割とする。 $\lambda_{Sp(2n)}$ を $Sp(2k) \times Sp(2n-2k)$ に制限したときの $\phi_{Sp(2k)} \times V_{Sp(2n-2k)}$ の重複度は

$$\sum_{l((k)') \leq 2k} LR_{(2k)', \nu}^{\lambda}$$

すなわち、この場合 ($\mu=\phi$ の場合) には、 $\pi_{Sp(2k)}(\mu_{Sp}) = \pm \phi_{Sp(2k)}$ となる他の μ については計算する必要がなく、しかも交代和も出てこない (何が生き残るか予め知ることができる)。

実は $l(\mu)=1$ なる μ に対しても同様のことができ、やはり他の図形を考慮する必要はなく、 $(k)'$ に weight μ の LR-tableau をつけたものの形 (前の記号を思い出せば θ) の長さが $2k$ 以下のものだけ求めればちょうど打消し合いの後生き残るもの

とちやうど一致する。(上の例で確認されたい。)

一般の μ に対しても“ $l(\theta) \leq 2k$ なるものだけ作ればよい”のは同様に正しいのだが、 $l(\mu) \geq 2$ のときは他の図形 $\tilde{\mu}$ で $l(\tilde{\mu}) \leq 2k$ で $\pi_{Sp(2k)}(\tilde{\mu}_{Sp}) = \mathbb{I} \mu_{Sp(2k)}$ となるものがあるため、これは考えてやっけて打消しを実行するしか今のところ方法がない。なんとかならぬものだろうか。

5. GL_n の有理表現(混合テンソル表現)の普遍指標

⑧のように $Sp(2n)$ から $GL(k) \times Sp(2n-2k)$ への制限を実行すると、 $GL(k)$ の(多項式表現と限らない)有理表現が出てくる。これまでに普遍指標的な扱いをした GL の表現は多項式表現だけだったので、ここで [K1] から GL の有理表現の(混合テンソル表現としての)普遍指標の定義を見てみよう。

小池氏の報告にある通り、 $GL(n)$ の既約有理表現は整数の n 項非増加列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ によって parametrize されていた。 λ を $\lambda = (\xi_1, \dots, \xi_\ell, 0, \dots, 0, -\eta_{n+1-m}, \dots, -\eta_1)$ ($\xi_i > 0, \eta_i > 0$) と表せば ξ, η は partition(分割)である。さらに $l(\xi) + l(\eta) \leq n$ を満たす。このとき λ に対応する $GL(n)$ の既約表現(又はその指標)を $[\xi, \eta]_{GL(n)}$ で表す。 $|\xi| = r, |\eta| = s$ とおき、 $V (= \mathbb{C}^n)$ を $GL(n)$ の自然表現(縦ベクトルの空間へのかけ算による作用)の空間とすれば、 $[\xi, \eta]_{GL(n)}$ は $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$

(r 階共変 \wedge 階反変テンソルの空間)の部分空間として実現できる。これが $[\xi, \eta]_{GL(n)}$ を混合テンソル表現と呼ぶ所以である。

さて, ξ, η を固定して n を大きくしていくと, 一定の系列としてのふるまいを示すというのが有理表現を $[\xi, \eta]_{GL(n)}$ のように表示して普遍指標を定義しようとする動機であり, 有理表現を多項式表現に1次表現 $X \mapsto (\det X)^{-e}$ を掛けたものとして扱うのは n を動かしたときの系列としての見方が異なる。今やろうとしている制限公式を扱うには混合テンソル表現としての系列化のほうが適しているのである。

さて $GL(n)$ の極大トーラスとして相変わらず対角行列全体 $\{\text{diag}(t_1, t_2, \dots, t_n)\}$ をとれば, 有理表現の指標は t_1, \dots, t_n の有理式, すなわち $[\xi, \eta]_{GL(n)} \in \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]^{\mathcal{K}_n}$ であるが, このまま n を大きくしていくと極限の定義に困る。例えば adjoint 表現 (から trivial 表現を除いて既約にしたもの) の指標は $[\square, \square]_{GL(n)} = \sum_{i \neq j} x_i x_j^{-1} + (n-1)$ であり, $n \rightarrow \infty$ とすると定数項が無限大になってしまう。

ところが次のようにすると t_i と t_i^{-1} をうまく“分離”して極限が定義できるのである。

定義 環準同型 $\tilde{\pi}_n: \Lambda_x \otimes \Lambda_y \rightarrow \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]^{\mathcal{K}_n}$ を $\Lambda_x \otimes \Lambda_y \xrightarrow{\pi_{n,x} \otimes \pi_{n,y}} \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathcal{K}_n} \otimes \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]^{\mathcal{K}_n} \xrightarrow{\substack{x_i = t_i \\ y_i = t_i^{-1}}} \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]^{\mathcal{K}_n}$

で定める。

すると、

命題及び定義 任意の分割 ξ, η に対し $\Lambda_x \otimes \Lambda_y$ の元 $[\xi, \eta]_{GL}$ であって

$$\widehat{\pi}_n([\xi, \eta]_{GL}) = [\xi, \eta]_{GL(\mathbb{C})} \quad (n \geq l(\xi) + l(\eta) \text{ のとき})$$

なるものが唯一つ存在する。これを普遍指標と呼ぶ。

例えば $[\square, \square]_{GL} = (\sum_i x_i)(\sum_i y_i) - 1$ であり、 $\widehat{\pi}_n$ を施すと $x_i, y_i \rightarrow t_i, t_i^{-1} = 1$ という現象が起こって変数の個数が増えるにつれて1の係数が大きくなっていくのである。

[K1]では一般の ξ, η に対して $[\xi, \eta]_{GL}$ が x, y に関する基本対称式を用いて構成されているが、ここでは省略する。([K1, Def. 2.1] 参照)

なお、 $[\xi, \eta]_{GL}$ が $\Lambda_x \otimes \Lambda_y$ にいることを明示するため $[\xi, \eta]_{GL}(x, y)$ と書くこともある。

GL の有理表現でも

命題 ([K1, Prop. 2.2]) $n \leq l(\xi) + l(\eta)$ のとき

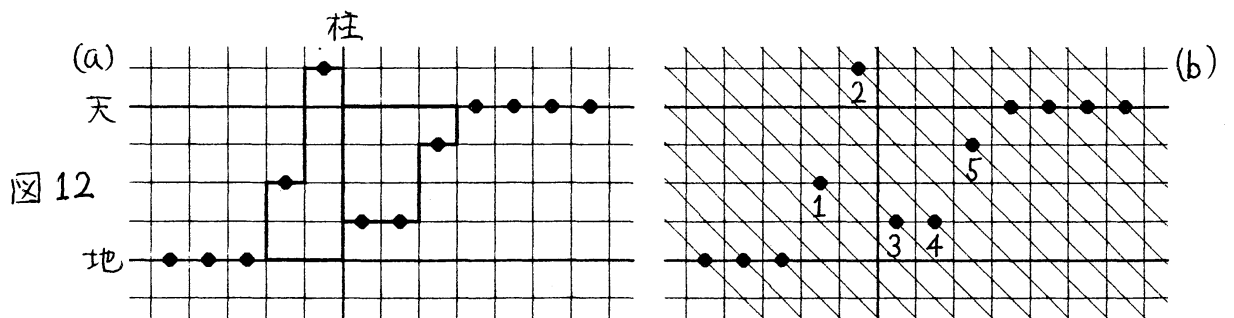
$$\widehat{\pi}_n([\xi, \eta]_{GL}) = 0 \text{ または } \pm \text{既約指標。}$$

が成り立ち、 S_p の場合同様この計算は容易である。その規則はやはり [K1] に述べられているが、試みられる方のためにここにも記しておこう。(以下の書き方は小池氏の報告の最後にあった S_p の場合と一見趣味が違うが実質的には同じ種類の操

作である。[K1, Def.2.1] の $[\xi, \eta]_{GL}$ を基本対称式の行列式で表した式を見れば行どうしを入れ替える操作として明確に理解される。))

以下例として $\xi=(3,2,2), \eta=(2,1,1,1), n=4$ としよう。まず図12(a)のように、碁盤の目の中に距離が n の2本の水平線(天と地)と1本の垂直線(柱)を定める。天と柱の交点を左上隅とするように ξ の Young 図形を置き、また地と柱の交点を隅として η の Young 図形を 180° 回転したものを置く。このとき ξ が地中に突き出たり η が天をぶち破ったりしてもかまわない。(図12(a)では η が天をぶち抜いている。) 以後水平辺に着目するので、各水平辺の中点に説明用の黒丸を書いた。柱より右の ξ の切れた部分には天に黒丸がずらっと並び、柱より左の η の切れた部分には地に黒丸がずらっと並んでいるものとする。各黒丸は図12(b)のように右下がり 45° 線に乗っているものとする。ここで

☆ 同一の 45° 線に2つ以上黒丸が乗っていたら $\tilde{\pi}_n([\xi, \eta]_{GL})=0$ となる。例のようにそうでなければ、天・地に“ずらっと”並ん



だ以外の黒丸（仮に左から1,2,3,4,5と番号をつけておく）を各45°線に沿って動かして互いの列を交換し、高さが左から広義増加するように並べ直す。例では図13(a)のようになる。黒丸の順序の置換の符号 $\varepsilon = \text{sgn} \begin{pmatrix} 12345 \\ 13425 \end{pmatrix} = +1$ を記録する。この図に水平辺, 垂直辺を復活してできた図形を図13(b)のように $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ とする。いまの例では $\tilde{\xi} = (3, 1)$, $\tilde{\eta} = (2, 2)$ である。このとき必ず $l(\tilde{\xi}) + l(\tilde{\eta}) \leq n$ であって, $\pi_n([\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]_{GL}) = \varepsilon [\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]_{GL(n)}$ が求める答である。今の例では $[\text{田}, \text{田}]_{GL(4)}$ となる。

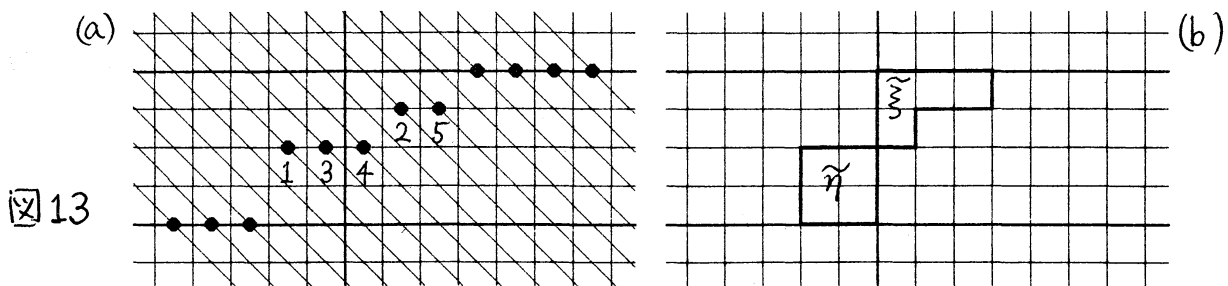
6. $Sp(2n)$ から $GL(k)$ から $Sp(2n-2k)$ への制限 (問題⑥)

細かい部分は少し省略する ([K1] をご覧いただきたい)。

ここでいう $GL(k) \times Sp(2n-2k)$ は $Sp(2n)$ の parabolic 部分群の Levi 部で, 本稿における Sp のとり方に則していえば

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} X & & \\ & Y & \\ & & K^t X^{-1} K \end{pmatrix} \mid X \in GL(k), Y \in Sp(2n-2k) \right\}, \text{ 但し } K = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}^k$$

である。 $Sp(2n)$ と H は ④ の場合同様極大 torus $T = \{\text{diag}(t_1, \dots, t_n,$



t_{n-1}, \dots, t_1)} を共有する。その分かれ方を見ると制限公式とは

$$\lambda_{Sp(2n)}(t_1, \dots, t_n) \text{ を } [\xi, \eta]_{GL(k)}(t_1, \dots, t_k) \cdot \mu_{Sp(2n-2k)}(t_{k+1}, \dots, t_n)$$

でまとめ直す式のことである。これと $\pi_{Sp(2n)}, \tilde{\pi}_n$ の定義をよく見比べればこれを生み出す普遍指標の関係式は

$$\lambda_{Sp}(x, y, z) \text{ を } [\xi, \eta]_{GL}(x, z) \otimes \mu_{Sp}(y)$$

でまとめ直す式である。ここで $\lambda_{Sp}(x, y, z)$ は λ_{Sp} の $\text{id} \otimes C$ ($C \otimes \text{id}$) $\circ C : \Lambda \rightarrow \Lambda_x \otimes \Lambda_y \otimes \Lambda_z$ による像を表す。それを GL, Sp の普遍指標の間関係式 ([KT1, Th.2.1] 及び [K1, Th.2.3]) を用いて計算すると

定理 λ を任意の分割とするとき

$$\lambda_{Sp}(x, y, z) = \sum_{\xi, \eta, \mu \in \mathcal{P}} \left(\sum_{\theta, \alpha, \beta, \tau \in \mathcal{P}} LR_{\mu\theta}^\lambda LR_{\alpha\beta}^\theta LR_{\tau\xi}^\alpha LR_{\tau\eta}^\beta \right) [\xi, \eta]_{GL}(x, z) \otimes \mu_{Sp}(y)$$

“安定圏”に入る条件も吟味すると

系 λ を長さ n 以下の分割とするとき

$$\lambda_{Sp(2n)}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\xi, \eta, \mu \in \mathcal{P}} \left(\begin{array}{c} \text{定理と} \\ \text{同じ} \end{array} \right) \left\{ \tilde{\pi}_{k, (x, z)}([\xi, \eta]_{GL}) \right\} (t_1, \dots, t_k) \left\{ \pi_{Sp(2n-2k), y}(\mu_{Sp}) \right\} (t_{k+1}, \dots, t_n)$$

特に $k \geq 2l(\lambda)$, $n-k \geq l(\lambda)$ ならば

$$\lambda_{Sp(2n)}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\xi, \eta, \mu \in \mathcal{P}} \left(\begin{array}{c} \text{定理と} \\ \text{同じ} \end{array} \right) [\xi, \eta]_{GL(k)}(t_1, \dots, t_k) \mu_{Sp(2n-2k)}(t_{k+1}, \dots, t_n)$$

上の公式では $k, n-k$ の両方が十分大きくないと安定圏に入らない。従って例えば $k=n$ ($Sp(2n)$ から $GL(n)$ への制限) の場合では n がいくら大きくなっても上の公式は正負の項の打消しを含む“遠回り”な公式になるという問題を抱えている。しかし、この場合には次のような (n が大きければ) 正の項

ばかりからなる無駄のない公式を与えることもできる。

定理 λ を任意の分割とするとき

$$\lambda_{Sp(2n)}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\xi, \eta \in P} \left(\sum_{\kappa, \theta \in P} LR_{2\kappa, \theta}^{\lambda} LR_{\xi, \eta}^{\theta} \right) \tilde{\pi}_n([\xi, \eta]_{GL})(t_1, \dots, t_n).$$

当研究集会において名士の長谷川浩司氏から, $Sp(2n)$ の表現のテンソル積の分解 (小池氏の報告で扱われたもの) と, 本稿④で扱った制限との間にはある種の duality が成立する (分解係数の間に対応関係がある) という興味深い指摘をいただいた。(興味のある方は [H] を参照していただきたい。)

参考文献

- [H] K. Hasegawa, Dual pairs on spinors — cases of (C_m, C_n) and $(C_m^{(1)}, C_n^{(1)})$, preprint.
- [K1] K. Koike, On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups — by means of the universal characters, Adv. in Math. に掲載予定
- [K2] 本講究録中の報告 小池和彦氏.
- [KT1] K. Koike and I.T., Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n , J. Algebra 107(1987), 466-511.
- [KT2] K. Koike and I.T., Young-diagrammatic methods for the restriction of representations of the complex classical Lie groups to reductive subgroups of maximal rank, Adv. in Math. に掲載予定
- [M] I.G. Macdonald, "Symmetric functions and Hall polynomials", Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.