数理解析研究所講究録
第642巻 1988年 67-76

Differentiable vectors and analytic vectors in completions of certain representation spaces of a Kac-Moody algebra

愛媛大理　須藤 清一 (Kiyokazu Suto)

§0. 序

$\mathfrak{g}$を，対称化可能なCartan行列を持つKac-Moody環，$\mathfrak{k}$をそのunitary実形とする。また$L(\Lambda)$をintegrable highest weight $\mathfrak{g}$-module with highest weight Λ とする。

ここでは，$\mathfrak{k}$の$\mathfrak{g}$及び$L(\Lambda)$への作用のexponentiabilityについて論じる。まず，$\mathfrak{g}$及び$L(\Lambda)$の標準的な完備化$H(ad)$及び$H(\Lambda)$における，$\mathfrak{g}$の作用に関するC^m-vector ($m=0,1,2,\cdots,\infty,\omega$)を定義し，その簡単な特徴付けを与える。この結果を用いると，各C^m-vectorsの空間に自然に位相が入って完備位相空間となるが，その位相に関する$\mathfrak{k}$のclosureを$\mathfrak{k}_m$とする。このとき，$\mathfrak{k}_2$の$H(ad)$及び$H(\Lambda)$への作用がexponentiableであり，さらに$\mathfrak{k}_\omega$のexponentialsは各C^m-vectorsの空間を不変にすることを示す。最後に，これらのexponentialsの間に成り立ついくつかの交換関係を与える。

§1. 記号

以後の節では次の記号を断り無く用いる。

A：対称化可能な一般型 Cartan 行列

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ ： A を Cartan 行列に持つ実 Kac-Moody 環

$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ ： $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の Cartan 部分環

$\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ ： A を Cartan 行列に持つ複素 Kac-Moody 環

$\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ ： $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環

Δ ： $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root 系

$\mathfrak{g}^{\alpha}$ ： $\alpha \in \Delta$ に対応する root 空間， $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$

$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ ： simple root の全体

Δ_+ ： positive root の全体

$\mathfrak{n}_{\pm} = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$

$\mathfrak{g} \ni x \longmapsto x^* \in \mathfrak{g}$ ： $\mathfrak{g}$ 上の antilinear antiautomorphism s.t.

$h^* = h$ for $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ ， $(\mathfrak{g}^{\alpha})^* = \mathfrak{g}^{-\alpha}$ for $\alpha \in \Delta$.

$\mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g} \,;\, x^* + x = 0\}$ ： $\mathfrak{g}$ の unitary 実形 .

$(\cdot|\cdot)$ ： $\mathfrak{g}$ 上の standard invariant form

ν ： $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}^*$ の上への linear bijection s.t.

$\nu(h)(h') = (h|h')$ for $h, h' \in \mathfrak{h}$.

$(\alpha|\beta) = (\nu^{-1}(\alpha)|\nu^{-1}(\beta))$ for $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$

：$\mathfrak{h}^*$ 上の symmetric bilinear form

$(x|y)_0 = (x|y^*)$ for $x, y \in \mathfrak{g}$ ： $\mathfrak{g}$ 上の Hermitian form s.t.

$$([x,y]|z)_0 = (y|[x^*,z])。\quad {}^\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$$

$\Lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$: dominant integral weight i.e.

$$2(\Lambda|\alpha_i)/(\alpha_i|\alpha_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad {}^\forall i = 1, \cdots, n$$

$L(\Lambda)$: Λ を highest weight に持つ既約 highest weight $\mathfrak{g}$-module

$(\cdot|\cdot)_\Lambda$: $L(\Lambda)$ 上の inner product s.t.

$$(xu|v)_\Lambda = (u|x^*v)_\Lambda \quad {}^\forall x \in \mathfrak{g},\ u, v \in L(\Lambda).$$

§2. $\mathfrak{g}$ 及び $L(\Lambda)$ の完備化

$(\cdot|\cdot)_0$ は部分空間 $\mathfrak{n}_- + \mathfrak{n}_+$ 上では正定値だが，$\mathfrak{h}$ 上では一般に正定値ではない。そこで $\mathfrak{g}$ 上の内積 $(\cdot|\cdot)_1$ を次のように定義する。

$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の基底 $\{h_i\}$ を適当にとれば

$$(h_i|h_j)_0 = \pm\delta_{ij} \quad {}^\forall i, j$$

とできる。この基底を正規直交基底とする $\mathfrak{h}$ 上の内積を $(\cdot|\cdot)_1$ とし，それを

$$(x|y)_1 = (x_-|y_-)_0 + (x_0|y_0)_1 + (x_+|y_+)$$

$$\text{for } x = x_- + x_0 + x_+,\ y = y_- + y_0 + y_+,\ x_\pm, y_\pm \in \mathfrak{n}_\pm,\ x_0, y_0 \in \mathfrak{h}$$

によって $\mathfrak{g}$ 全体に拡張する。

以下，$\pi = \mathrm{ad}$ (= $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現) or π_Λ (= $L(\Lambda)$ 上の表現) とし，その表現空間を V，V 上の内積 (= $(\cdot|\cdot)_1$ or $(\cdot|\cdot)_\Lambda$) を $(\cdot|\cdot)_\pi$，weights の全体を $P(\pi)$ とする。特に $P(\mathrm{ad}) = \Delta \cup \{0\}$。

$$\underline{V} = \prod_{\mu \in P(\pi)} V_\mu \qquad (V_\mu \text{ は weight } \mu \text{ の weight 空間}).$$

とおく。$\mathfrak{g}$は$\underline{V}$に自然に作用する。またVの$(\cdot|\cdot)_\pi$に関する完備化を$H(\pi)$とすると，$H(\pi) \subset \underline{V}$とみなせる：

$$H(\pi) = \{ (v_\mu)_\mu \in \underline{V} \mid \textstyle\sum_{\mu \in P(\pi)} \|v_\mu\|_\pi^2 < +\infty \} .$$

§3. $\mathfrak{g}$の作用の norm の評価

$h_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$を strictly dominant i.e.

$$\alpha(h_0) > 0 \qquad {}^\forall \alpha \in \Delta_+$$

なる元とする。すると$\mathfrak{g}$の作用について次の評価を得る。

定理 1 (cf. Kac-Peterson [1]).

i) ${}^\exists C_1 > 0$ s.t. ${}^\forall x, y \in \mathfrak{g}$

$$\|[x, y]\|_1 \leq C_1 (\|x\|_1 \|[h_0, y]\|_1 + \|[h_0, x]\|_1 \|y\|_1)$$

ii) ${}^\exists C_{1,\Lambda} > 0$ s.t. ${}^\forall x \in \mathfrak{g}$, $v \in L(\Lambda)$

$$\|xv\|_\Lambda \leq C_{1,\Lambda} (\|x\|_1 \cdot \|v\|_\Lambda + \|x\|_1 \|h_0 v\|_\Lambda + \|[h_0, x]\|_1 \|v\|_\Lambda).$$

この評価から帰納的に次を得る.

命題 2. 任意の$x_1, \cdots, x_m \in \mathfrak{g}$及び$v \in L(\Lambda)$に対して

i) $\|[x_1, \cdots, [x_{m-1}, x_m] \cdots]\|_1$

$$\leq (m-1)!\, C_1^{m-1} \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_m \geq 0 \\ p_1 + \cdots + p_m = m-1}} \prod_{j=1}^m \frac{1}{p_j!} \|(\mathrm{ad}\, h_0)^{p_j} x_j\|_1$$

ii) $\|x_1 \cdots x_m v\|_\Lambda$

$$\leq (m+1)!\, C_{1,\Lambda}^m \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_m, q \geq 0 \\ p_1 + \cdots + p_m + q \leq m}} \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{1}{p_j!} \|(\mathrm{ad}\, h_0)^{p_j} x_j\|_1 \right\} \cdot \frac{1}{q!} \|h_0^q v\|_\Lambda$$

§4. 可微分 vector と解析的 vector

π, $\underline{V}$, etc. は §2 の通りとする。

$H(\pi)$ における C^m-vectors の空間 $H_m(\pi)$ ($m=0,1,2,\cdots,\infty,\omega$) を次のように定義する。

定義 3.

$H_0(\pi) \underset{def}{=} H(\pi)$, $H_m(\pi) \underset{def}{=} \{v \in H_{m-1}(\mathrm{ad}) \mid \pi(x)v \in H_{m-1}(\pi) \ {}^\forall x \in \mathfrak{g}\}$ $(m>0)$,

$H_\infty(\pi) \underset{def}{=} \bigcap_{m=0}^\infty H_m(\pi)$,

$H_\omega(\pi) \underset{def}{=} \{v \in H_\infty(\pi) \mid {}^\forall x \in \mathfrak{g} \ {}^\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} \varepsilon^m \|\pi(x)^m v\|_\pi < +\infty\}$.

命題 2 によって、各 $H_m(\pi)$ は、strictly dominant なるただ 1 個の元 $h_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ によって特徴付けられることがわかる。すなわち次を得る。

定理 4. 上の記号の下で

$H_m(\pi) = \{v \in \underline{V} \mid \pi(h_0)^m v \in H(\pi)\}$ ${}^\forall m = 0,1,2,\cdots$,

$H_\omega(\pi) = \{v \in H_\infty(\pi) \mid {}^\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} \delta^m \|\pi(h_0)^m v\|_\pi \underset{def}{=} \|v\|_{\pi,\omega,\delta} < +\infty\}$.

$m=0,1,2,\cdots$ に対して $H_m(\pi)$ 上の内積 $(\cdot|\cdot)_{\pi,m}$ を

$$(u|v)_{\pi,m} \underset{def}{=} \sum_{j=0}^{m} (\pi(h_0)^j u \mid \pi(h_0)^j v)_\pi \quad \text{for } u, v \in H_m(\pi)$$

と定める。明らかに $(H_m(\pi), (\cdot|\cdot)_{\pi,m})$ は Hilbert 空間になる。また $H_\infty(\pi)$ には $H_m(\pi)$ ($m=0,1,2,\cdots$) 達の射影極限としての位相を考える。定理 1 から明らかに、

<u>命題 5</u>. $m=0,1,2,\cdots$ とする。$\mathfrak{g}$ の V_Λ の作用は bilinear map:

$$H_{m+1}(ad)\times H_{m+1}(\pi)\ni(x,v)\longmapsto \pi(x)v\in H_m(\pi)$$

に連続に拡張される。従って $H_\infty(ad)$ は位相 Lie 環になり，位相線型空間 $H_\infty(\Lambda)$ $(\underset{def}{=}H_\infty(\pi_\Lambda))$ に連続に作用する。

次に $H_\omega(\pi)$ 上の位相を考える。$0<\varepsilon\leqq+\infty$ に対して

$$H_\omega(\pi;\varepsilon)\underset{def}{=}\{v\in H_\omega(\pi)\mid 0<{}^\forall\delta<\varepsilon\quad \|v\|_{\pi,\omega,\delta}<+\infty\}$$

とおき，$\|\cdot\|_{\pi,\omega,\delta}$, $0<\delta<\varepsilon$ という norm の族による位相を考える。$H_\omega(\pi)$ にはこれらの空間の帰納極限としての位相を考える。すると再び定理1によって

<u>命題 6</u>. $0<\varepsilon\leqq+\infty$ とする。$H_\omega(ad;\varepsilon)$ は位相 Lie 環となり，$H_\omega(\Lambda;\varepsilon)$ $(\underset{def}{=}H_\omega(\pi_\Lambda;\varepsilon))$ に連続に作用する。特に $H_\omega(ad)$ は位相 Lie 環で $H_\omega(\Lambda)$ $(\underset{def}{=}H_\omega(\pi_\Lambda))$ に連続に作用する。

<u>§ 5</u>. unitary form $\mathfrak{k}$ の完備化とその exponentials の定義.

$m=0,1,2,\cdots,\infty,\omega$ とする。$\mathfrak{g}\ni x\mapsto x^*\in\mathfrak{g}$ は $(\cdot|\cdot)_1$ に関して isometric であり，§4 の $\mathfrak{h}_0$ を不変にする。従って $H_m(ad)$ 上にまで連続に拡張される。この拡張も $*$ と書く。

$$\mathfrak{k}_m=H^u_m(ad)\underset{def}{=}\{x\in H_m(ad)\mid x+x^*=0\}$$

とおくと，$\mathfrak{k}_m$ は $H_m(ad)$ の real form であり，$\mathfrak{k}$ の closure と一致する。また $\mathfrak{k}_\infty$, $\mathfrak{k}_\omega$ はそれぞれ Lie 環 $\mathfrak{g}_\infty\underset{def}{=}H_\infty(ad)$, $\mathfrak{g}_\omega\underset{def}{=}H_\omega(ad)$

の，Lie 環としての real form である。

さて，内積 $(\cdot|\cdot)_1$ の定義によって，次のような $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ の上への linear bijection T が存在する。

(1) $(x|y)_0=(x|Ty)_1$ $\forall x, y\in\mathfrak{g}$，従って T は $(\cdot|\cdot)_1$ に関して自己共役.

(2) T は $(\cdot|\cdot)_1$ を不変にする。従って(1)と合わせて $T^2=Id$.

(3) P_0 を $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{h}$ の上への直交射影とすると $Id-T\leqq 2P_0$.

すると，$x\in E_1$，$y\in H_1(\mathrm{ad})$ に対して

$$\begin{aligned}\|(1-\mathrm{ad}\,x)y\|_1^2 &= \|y\|_1^2+\|[x,y]\|_1^2-2\mathrm{Re}(y|[x,y])_1\\ &= \|y\|_1^2+\|[x,y]\|_1^2-2\mathrm{Re}(y|(Id-T)([x,y]))_1\\ &\qquad\qquad -2\mathrm{Re}(y|T([x,y]))_1\\ &= \|y\|_1^2+\|[x,y]\|_1^2-2\mathrm{Re}(y|(Id-T)([x,y]))_1\\ &\qquad\qquad -2\mathrm{Re}(y|[x,y])_0\end{aligned}$$

$\mathrm{ad}\,x$ は $(\cdot|\cdot)_0$ に関して反対称作用素だから $(y|[x,y])_0$ は純虚数。

$$\therefore\ \|(1-\mathrm{ad}\,x)y\|_1^2=\|y\|_1^2+\|[x,y]\|_1^2-2\mathrm{Re}(y|(Id-T)([x,y]))_1$$

上の(3)によって

$$2\mathrm{Re}(y|(Id-T)([x,y]))_1\leqq 4\,\|y\|_1\|P_0([x,y])\|_1 .$$

$x=\sum_{\alpha\in\Delta\cup\{0\}}x_\alpha$，$y=\sum_{\alpha\in\Delta\cup\{0\}}y_\alpha$，$x_\alpha\in\mathfrak{g}^\alpha$，$y_\alpha\in\mathfrak{g}^\alpha$ とすると

$$[x_\alpha, y_{-\alpha}]=(x_\alpha|y_{-\alpha})\nu^{-1}(\alpha)\qquad\forall\alpha\in\Delta$$

だから，

$$\|P_0([x,y])\|_1\leqq\sqrt{\sum_{\alpha\in\Delta}\|\alpha\|_1^2\|x_\alpha\|_1^2}\cdot\|y\|_1$$

ただし $(\lambda|\mu)_1 \underset{\text{def}}{=} (\nu^{-1}(\lambda)|\nu^{-1}(\mu))_1$ for $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ とした。

また $\pi_\Lambda(x)$ が $(\cdot|\cdot)_\Lambda$ に関して反対称作用素になることから，結局次を得る。

<u>補題7</u>. $^\forall x = \sum_{\alpha \in \Delta \cup \{0\}} x_\alpha \in \mathfrak{k}_1$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ に対して，

i) $\|(1 - \mathrm{ad}\, x)y\|_1^2 \geq \left(1 - 4\sqrt{\sum_{\alpha \in \Delta} \|\alpha\|_1^2 \|x_\alpha\|_1^2}\right)\|y\|_1^2 \quad {}^\forall y \in H_1(\mathrm{ad})$

ii) $\|(1 - \pi_\Lambda(x))v\|_\Lambda^2 \geq \|v\|_\Lambda^2 \quad {}^\forall v \in H_1(\Lambda)\ (\underset{\text{def}}{=} H_1(\pi_\Lambda))$.

π, V etc. は §2 の通りとする。$x \in \mathfrak{k}_2$ ならば，十分 0 に近い $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して $(1 - \varepsilon\pi(x))H_1(\pi)$ が $H(\pi)$ で dense になるので，Yosida [3, Chap IX] の結果が適用できて次の定理が成り立つ。

<u>定理8</u>. $^\forall x = \sum_{\alpha \in \Delta \cup \{0\}} x_\alpha \in \mathfrak{k}_2$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ に対して

i) $H(\mathrm{ad})$ 上の可逆有界作用素から成る1径数群 $e^{t\,\mathrm{ad}\,x} = \exp t\,\mathrm{ad}\,x$ で，その無限小生成作用素が $\mathrm{ad}\,x$ を含むものが一意に存在する。さらに作用素 norm を $\|\cdot\|_{op}$ と書くと，

$$\|e^{\mathrm{ad}\,x}\|_{op} \leq \exp 2\sqrt{\sum_{\alpha \in \Delta} \|\alpha\|_1^2 \|x_\alpha\|_1^2}\ .$$

ii) $H(\Lambda)\ (\underset{\text{def}}{=} H(\pi_\Lambda))$ 上の unitary 作用素から成る1径数群 $e^{t\pi_\Lambda(x)} = \exp t\pi_\Lambda(x)$ でその無限小生成作用素が $\pi_\Lambda(x)$ を含むものが一意に存在する。

明らかに $H_m(\pi)$ は，$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{t\pi(x)}v \in H(\pi)$ が $^\forall x \in \mathfrak{k}_m$ に対して

C^m-写像となるような $v\in H(\pi)$ の全体である。

§6. $\exp \pi(\mathfrak{k}_\omega)$ の性質

最後に $\exp \pi(\mathfrak{k}_\omega)$ の満たすいくつかの性質を示す。

$\mathfrak{g}\subset H_\omega(\mathrm{ad})$ の元が，$\exp \mathrm{ad}\, \mathfrak{k}_\omega$ に関する解析的 vector であることから次の補題が巾級数の計算によって出る。

補題 9. $x\in\mathfrak{k}_\omega$，$y\in\mathfrak{g}$ とする。十分小さい $\varepsilon>0$ に対して $e^{-\varepsilon\,\mathrm{ad}\,x}y\in\mathfrak{g}_\omega$ であり，

$$\pi(y)e^{\varepsilon\pi(x)}v = e^{\varepsilon\pi(x)}\pi(e^{-\varepsilon\,\mathrm{ad}\,x}y)v \qquad \forall v\in H_1(\pi).$$

この補題により，$H_m(\pi)$ の $\exp \pi(\mathfrak{k}_\omega)$ による不変性が，$\exp \pi(\mathfrak{k}_\omega)$ の各元の $H(\pi)$ 上の作用素としての有界性に帰着される。従って

定理 10. 記号は上記の通りとする。$m=0,1,2,\cdots,\infty,\omega$，$x\in\mathfrak{k}_\omega$ に対して，$e^{\pi(x)}$ は $H_m(\pi)$ を不変にし，$e^{\pi(x)}|_{H_m(\pi)}$ は連続である。

すると連続性によって補題9は次のように拡張される。

命題 11. $\forall x\in\mathfrak{k}_\omega$，$y\in H_1(\mathrm{ad})$，$v\in H_1(\pi)$ に対して

$$\pi(y)e^{\pi(x)}v = e^{\pi(x)}\pi(e^{-\mathrm{ad}\,x}y)v\ ;$$

この命題から exponentials が満たすべき最低限の交換関係が（無限小生成作用素を比べることにより）証明される。すなわち，

<u>命題 12</u>. $^\forall x \in \mathfrak{k}_\omega$, $y \in \mathfrak{k}_2$ に対して

$$e^{\pi(x)} e^{\pi(y)} e^{-\pi(x)} = \exp \pi(e^{\mathrm{ad}\, x} y).$$

参考文献

[1] V. G. Kac and D. H. Peterson, Unitary structure in representations of infinite dimensional groups and a convexity theorem, Invent. Math., 76 (1984), 1–14.

[2] K. Suto, Differentiable vectors and analytic vectors in completions of certain representation spaces of a Kac-Moody algebra, preprint.

[3] K. Yosida, Functional analysis, Springer-Verlag, 1980.