数理解析研究所講究録
第 642 巻 1988 年 91-96

CP^N 上の主束のトーラス還元

広大・理　土井英雄 (Hideo Doi)

0. 入門

G を $\mathbb{C}$ 上の連結簡約代数群，T を極大トーラス，N_T を G における T の正規化部分群，$W_T := N_T/T$ とする。$\lambda \in Hom(\mathbb{C}^\times, T)$ を用いて定義されれる $P^N = (\mathbb{C}^{N+1} \setminus 0)/\mathbb{C}^\times$ 上の主G束 $(\mathbb{C}^{N+1} \setminus 0) \times_{\lambda^{-1}} G$ を $E(\lambda)$ と書く。P^1 上の正則主G束は，すべて $E(\lambda)$ の形になることが知られている，[G]。E を P^N 上の正則主G束とする。$L \in Gr$，P^N 中の射影直線達の作る Grassmann 多様体，に対して $E(\lambda)|L = E|L$ によって $\lambda_L := \lambda \in Hom(\mathbb{C}^\times, T)/W_T$ を定めると，generic な L に対して $\lambda_L = \lambda$ は一定になる。このとき E を λ 型と称えることにする。$Fl := \{(x, L) \in P^N \times Gr ;\ x \in L\}$ とおき，図式 $P^N \xleftarrow{\mu} Fl \xrightarrow{\nu} Gr$ を通して E を記述し，Leiterer 氏に従って μ^*E からある種の gauge potential を構成することができる。主結果は 1.5 で，gauge potentials が $E(\lambda)$ のそれと同値になるための充分条件を与えるものである。応用として，E の generic line L の高次無限小近傍 $L^{(i)}$ でのふるまいを調べることにより次を得る。

0.1 定理　E を P^N 上の λ 型の正則主G束，$m = \max \langle \lambda, \alpha \rangle$; $\alpha \in R := Root(G, T)$ とする。もし任意の generic line L に対して，$E|L^{(m+2)} = E(\lambda)|L^{(m+2)}$ ならば，$E = E(\lambda)$ である。

これは、GL_n に対する [L, 1.1.Theorem] の一般化になっている。またトーラス還元に関する一寸おもしろい帰結を導くこともできる。

0.2 定理　$E \to P^N$ を正則主G束とする。もし P^N 中のある射影平面 P^2 において、$E|P^2 = E(\lambda)|P^2$ ならば、$E = E(\lambda)$ である。

これは vector束に対する [OSS, Ch.I 2.3.2 Theorem] の一般化になっている。なお以下において扱う対象はすべて *holomorphic category* におけるモノである。

1. P^1領域上の主束

領域 $X \subset P^N$ に対して、$Gr(X) = \{L \in Gr ; L \subset X\}$, $Fl(X) = \nu^{-1} Gr(X)$ とおく。$Gr(X)$ が連結 $\mu : Fl(X) \to X$ が全射であるとき、X を P^1領域と呼ぶ。$P^N \xleftarrow[\mu]{} Fl \xrightarrow[\nu]{} Gr$ を取り扱うために標準座標を導入する。$e_0, e_1, \cdots e_N$ を C^{N+1} の基底とし $C^{N-1} = W = \sum C e_i, i \geq 2$ とおく。$W^2 = W \times W \hookrightarrow Gr$ を $(w_0, w_1) \to C(e_0 + w_0) + C(e_1 + w_1)$, $W^2 \times P^1 \to P(W^c) := (C^{N+1} \setminus W)/C^\times$ を $(w_0, w_1, t_0, t_1) \to t_0(e_0 + w_0) + t_1(e_1 + w_1)$, で定義する。このとき $W^2 \times P^1 \hookrightarrow Fl \subset P^N \times Gr$ であり、ν は射影 $W^2 \times P^1 \to W^2$ となる。また、この座標による同一視は自由に用いる。

1.1 例　$Y = Y_0 \times Y_1 \subset W^2$ の領域に対し、$\mu(Y \times P^1)$ は $P(W^c)$ 内の P^1領域である。したがって、P^N 中の射影直線 L に対し、L に収縮する P^1領域の族が存在する。

X は、いつも $P(W^c)$ 内の P^1領域を表すものとする。$(t_0, t_1) \in P^1$ の非斉次座標、t

$= t_+ = t_0/t_1$, $t_- = t_1/t_0$ を用いて, $X'_\pm := Gr(X) \times \{|t_\pm| < 2\} \subset W^2 \times P^1$, $X_\pm := \mu X'_\pm \subset P^N$ とする。 $X = X_+ \cup X_-$ 上の主束 E が 変換関数 $f_{+-} =: f$ $X_+ \cap X_- \to G$ により定義されているとする。 $f \circ \mu(W,\cdot) : \{1/2 < |t| < 2\} \to G$ の Birkhoff分解 $a\lambda b$ が, "a, b は $W \in Gr(X) \subset W^2$ について正則, $Ad\lambda(t) b = 1 + O(t^{-1})$ $t \to \infty$" となるように取れるとき,「E は λ-gauge にある。」と言う。

1.2 補題、λ型の正則主G束 $E \to X$ に対し, $L \subset X$ を generic line, Lに充分近い $L' \in Gr$ について $E|L' = E(\lambda)|L'$, とする。このとき, Y … Lを含むP^1領域で $E|Y$ が λ-gauge にある … が存在する。

したがって局所的(?)に考える場合 "in λ-gauge" をかなり一般的に想定できる。

W^2 の座標を (W_{0i}, W_{ij}) とする。 W^2上の正則関数 f に対し $d^+f := \sum(\partial_{0j} f - t\,\partial_{ij} f)\,dW_{0j}$ とおく, ∂_{ij} は W_{ij} に関する微分 t は P^1の座標、に対応するものであるが, 形式的助変数として扱う。また 1形式 $\varphi = \sum \varphi_j\, dW_{0j}$ に対し, $d^+\varphi := \sum d^+\varphi_j\, dW_{0j}$ とおく。

領域 $D \subset W^2$ 上の $\mathfrak{g}$ 値 1形式 $\theta = \sum \theta_j\, dW_{0j}$ が (ア) $d^+\theta + \theta\wedge\theta = 0$, (イ) root分解に応じて $\theta = \theta_{\mathfrak{t}} + \sum \theta_\alpha$; $\alpha \in R$ と表すとき, $\langle\lambda, \alpha\rangle \leqq -2$ ならば $\theta_\alpha = 0$, となっているとき, λ-gauge potential と呼ばれる。ただし $\mathfrak{g}, \mathfrak{t}$ は G, T の Lie環。 $Q_\lambda := \{g \in G\ ;\ \lim_{t\to 0} Ad\lambda(t)\cdot g$ が G 内に存在する$\}$, $\mathcal{H}_\lambda :=$ $E(\lambda) \to P^1$ の正則gauge変換群 とおく。 $Q_\lambda = KN$ を Levi分解, N … unipotent とする。 $R_N = N$の roots $= \{\alpha \in R\ ;\ \langle\lambda, \alpha\rangle > 0\}$ とおく。このとき $\mathcal{H}_\lambda$ は $\{h = h(t) : C \to Q_\lambda$; 正則, $h = h_K h_N$ $h_K \in K$, $h_N \in N$ と分解するとき, h_K は定数, $h_N = \prod X_\alpha(f_\alpha)$ $\alpha \in R_N$, $X_\alpha(\ )$ root部分群, f_α は

高々 $\langle\lambda,\alpha\rangle$ 次の多項式$\}$ と自然に同一視できる。 θ,θ' を D上の λ-gauge potentials とする。$C : D \to \mathcal{N}_\lambda$ 正則写像で $\theta' = C^{-1}d^+C + \mathrm{Ad}C^{-1}\theta$ となるものが存在するとき，θ と θ' は λ同値である，という。ここで λ-gauge potentials は，"t" を含まない対象であることに注意しておく。

1.3 補題、＋定義　$E \to X$ を λ-gauge にある主G束，f を E の特定された変換関数，$a\lambda b$ を $f\circ\mu$ の特定されたBirkhoff分解とする。このとき $\theta := a^{-1}d^+a$ は λ-gauge potential である。

λ-gauge potentials の効用は，次が成立することである。

1.4 命題、　E, E' を X 上の λ-gauge にある主G束，θ,θ'をその λ-gauge potentials とする。

(i)　$E \simeq E' \Rightarrow \theta,\theta'$ は λ同値。

(ii)　$\mu : Fl(X) \to X$ の fibers が連結のとき，θ,θ' が λ同値 $\Rightarrow E \simeq E'$。

明らかに 0 は $E(\lambda)$ の λ-gauge potential である。したがって λ-gauge potential が 0 と λ同値になるための良い充分条件を見い出すことが重要になってくる。

1.5 定理　$D \subset W^2$ 凸領域，$\theta = \sum \theta_j dW_{0j}$ を D上の Lie $\mathcal{N}_\lambda$ 値 1形式とする。$\mathrm{Lie}\,Q_\lambda = \mathrm{Lie}\,K + \sum \mathfrak{g}_\alpha$; $\alpha \in R_N$ に応じて $\theta = \theta_K + \sum \theta_\alpha$ と分解するとき，θ_K は，W_1 について定数，$\theta_\alpha = \sum \theta_{\alpha j} t^j$ $0 \leq j \leq \langle\lambda,\alpha\rangle$ において，$\theta_{\alpha j}$ は，W_1 について高々 $\langle\lambda,\alpha\rangle - j$ 次の多項式であると仮定する。もし，$d^+\theta + \theta\wedge\theta = 0$ ならば，$C : D \to$

M_λ 正則写像で，(i) $Q_\lambda = KN$ に応じて $C = C_K C_N$ と分解するとき C_K は W_1 について定数 $C_N = \prod \chi_\alpha(f_\alpha)$ $\alpha \in R_N$，$f_\alpha = \sum f_{\alpha j} t^j$，$0 \leq j \leq \langle\lambda, \alpha\rangle$ において $f_{\alpha j}$ は W_1 について高々 $\langle\lambda,\alpha\rangle - j$ 次の多項式，(ii) $\theta = C^{-1} d^+ C$ となるものが存在する。

2. トーラス還元

$E \to P^N$ を λ型の主G束で 0.1 の条件を満たすものとする。P^1領域 X で，$E|X$ が λ-gauge にあるものをとり，θ をその λ-gauge potential とする。仮定により任意の $x \in Gr(X) \subset W^2$ に対し，射影直線と見た $x \subset P^N$ を含む P^1領域 X_x と $E|X_x$ の変換関数 $f_x : X_{x+} \cap X_{x-} \to G$ で $f_x \circ \mu(W,t) = \lambda(t) + O(|W-x|^{m+3})$ となるものが存在する。[L, 3.10, 5.4] を用いると，θ が 1.5 の条件をみたすことがわかる。したがって 1.4 より $E|X \simeq E(\lambda)|X$ である。$E \times_{Ad} \mathfrak{g}|X \supset X \times \mathfrak{t}$ であるから，$E \times_{Ad} \mathfrak{g}$ の X上の切片で，正則半単純元に値をとるものが存在する。X上の切片は Hartogs の定理により P^N上の切片に拡張できるので，[G, Par. 4] により E は，トーラス還元をもつ。

次に $E \to P^N$ に対し $E|P^2 = E(\lambda)|P^2$ とする。$H^1(P^2, \mathcal{O}(m)) = 0$ であるから，P^N中の射影平面達の作る Grassmann多様体における P^2 の近傍 U で，$\forall P \in U$ に対し $E|P = E(\lambda)|P$ となるものがとれる。これより λ型の主束であることがわかる。$L_0 = \mathbb{C}e_0 + \mathbb{C}e_1$，generic line，$P_0 = \mathbb{C}e_0 + \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2 \in U$，$V_0 = \mathbb{C}e_2$ とする。$y = (y_0, y_1) \in W^2$，$V \in P(W) = (W \setminus 0)/\mathbb{C}^\times$ に対し，$P(y, V) = \mathbb{C}(e_0 + y_0) + \mathbb{C}(e_1 + y_1) + V$ とおけば，0 in W^2 の近傍 Y と V_0 in $P(W)$ の近傍 B で，$P(Y, B) \subset U$ となるものがとれる。このとき，さらに E が $\mu(Y \times P^1)$ 上で λ-gauge にあるようにとっておき，その λ-gauge potential を θ とする。$\theta_y := \theta(\cdot + y)$ は，$e_0 + y_0$, $e_1 + y_1$, W を用いて，標、

準座標、を定義したときの λ-gauge potential である。これより $\theta_y|V$ は、$P(y,V)$ の λ-gauge potential になる。 $V=\mathbb{C}v$, $s: \mathbb{C}^2 \ni (s_0,s_1) \to s_0 v \times s_1 v \in V^2$ とすれば、$(s^*\theta_y)_\alpha$ は、s_1 について、高々 $\langle\lambda,\alpha\rangle$ 次の多項式となる。これより θ の具体的表示、を用いれば、θ_α は、W_1 について 高々 $\langle\lambda,\alpha\rangle$ 次の多項式であることが導かれし，1.4，1.5 が適用できる。

参考文献

[G] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J. Math. 79, 121 - 138 (1956).

[L] J. Leiterer, *On holomorphic vector bundles over linearly concave manifolds*, Math. Ann. 274, 391 - 417 (1986).

[OSS] C. Okonek, M. Schneider & H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Mathematics 3, Birkhäuser, 1980.