数理解析研究所講究録
第644巻 1988年 146-156

ω-stable groups and CZ-groups

神戸大学・自然　田中克己（Katsumi Tanaka）

ω-stable group（ω安定群）とは、ω安定な構造の中で定義可能な群のこととする。ＣＺ-group（ＣＺ群）とは閉集合についての極小条件をみたすT_1位相をもった群で、Ｇの各元ａに対し、次のＧからそれ自身への写像が全て連続となるものとする：

$x \to xa$,　$x \to ax$,　$x \to x^{-1}$,　$x \to x^{-1}ax$　。

Cherlin と他の model theorist 達はω安定群とアフィン代数群との類似性を指摘している。実際、Cherlin は「全ての Morley rank 有限の単純ω安定群は代数群である。」と予想している。一方、ＣＺ群の概念は、Kaplansky により線形群の抽象化として導入されたものである。したがって、ω安定群とＣＺ群が似たような性質を持っていても何ら不思議は無い。

安定群がM_c群（中心化群についての極小条件をみたす群）

であることは、Baldwin 等によって以前から知られているが、これらの関係は次のダイアグラムで表わされる。

$$\begin{array}{ccccc} M_c\text{群} & \supset & \text{CZ群} & \supset & \text{線形群} \\ \cup & & & & \cup \\ \text{安定群} & \supset & \omega\text{安定群} & \supset & \text{アフィン代数群} \end{array}$$

本稿では、これらの群論的概念とモデル理論的概念の類似性に着目し、相互の応用で得られたいくつかの結果を報告する。§1では、CZ群についてのいくつかの構造定理のω安定群への移植を考える。§2では、ω安定群についてのZil'berのIndecomposability theorem を眺めることによりアフィン代数群についての irreducibility theorem のCZ群への一般化を考える。最後に、ω安定群に位相を導入して、CZ群にできるかという問題について考察する。

§1. CZ群からω安定群へ

次の定理は安定群についての構造定理のうちで初めて得られたものの一つである。

定理1(Baldwin-Saxl 1976). すべての局所ベキ零安定群は可解である。

これに対比して、後から分かったことであるが、group theorist は次の強力な定理を得ていた。

定理２（Yen 197?）．　すべての局所ベキ零M_c群は可解である。

この流れの上に次の結果がある。

定理３（Felgner 1977）．　Gを $\aleph_0$-categorical な安定群とする。

（ｉ）　Gが局所可解ならば可解である。

（ｉｉ）　Gが局所ベキ零ならばベキ零である。

ここで $\aleph_0$-categoricity は大変強い有限性条件である（注：Ryll-Nardzewski の定理）。Baldwin は定理３から $\aleph_0$-categoricity の仮定を落とせるかという問題を提出した。これについては、今のところ次のことが知られている。

定理４（－ 1987）．　（ｉ）　有限の Morley rank を持つ局所可解ω安定群は可解である。

（ｉｉ）　有限の Morley rank を持つ局所ベキ零連結ω安定群はベキ零である。

ここで、（ｉｉ）で連結性の条件は落とすことができない。以下の反例がある。

例．　$A \cong Z(2^\infty)$ を Prüfer群、$B \cong Z_2 = \{1, b\}$ とする。　$G = A \rtimes B$とし、$A = \langle a_1, a_2, \cdots \rangle$ で　$a_1{}^2 =$

1, $a_{n+1}^2 = a_n$ としたとし、$b^{-1} a_{n+1} b = a_n$ で定める。Gは locally dihedral 2-group とよばれ、局所有限、局所ベキ零だがベキ零でない。 Gはω安定で Morley rank 1, degree 2 である。

定理4とCZ群の次の結果を比較すると面白い。

定理5(Higgins 1977). (i) Gが連結閉部分群についての極小条件をみたす局所可解CZ群ならば、Gは可解である。

(ii) Gが連結閉部分群についての極小条件をみたす局所ベキ零連結CZ群ならば、ベキ零である。

さらに、安定群についてはつぎのことが言える。

定理6. Gを局所ベキ零安定群とする。 そのとき、Gの定義可能な特性部分群の昇鎖列で各因子が中心的であるものが存在する。 特に、Gは超中心的である。

証明. 定理1より、局所ベキ零安定群は可解群となるので我々は derived length d についての帰納法で証明する。

明らかに$d \geq 2$であると仮定してよい。 Kを$G' = [G, G]$を含む derived length $d-1$ の定義可能な特性群となる。 帰納法の仮定から、Kの定義可能な特性群の昇鎖列Sでその因子がどれもKの中で中心的であるものが存在する。

主張：B/CをSの因子、各自然数$i \geqq 0$にたいし$W_i = B/C \cap \zeta_i(G/C)$とすると、$\bigcup W = B/C$となる。

各$\zeta_i(G/C)$は安定群G/Cの定義可能な特性群であるから、各W_iはGの定義可能な特性群となる。だから、もし主張が成り立てば、Sの各因子の間に高々型ωの昇鎖列を挿入することができる。そして部分群G'をも含めたこの列は定理の結論を満足する。

この主張を証明するために、次のことを示さなければならない。「$M = B/C$をSの因子とし、$a \in B$とすれば、ある自然数nに対し$Ca \in \zeta_n(G/C)$となる。」G/Cは安定群であり中心化群の極小条件をみたすので、Gのある有限部分集合Xが存在して、$C_M(X) = C_M(G)$となる。Gは局所ベキ零だから、群$\langle a, X\rangle$はベキ零。よって、ある自然数nに対し$[a, \overbrace{\langle X\rangle, \dots, \langle X\rangle}^{n\text{コ}}] = 1$が成り立つ。いま、$M$を$\mathbb{Z}[M]$-加群とみなし、$m = Ca$と書くことにすると、任意の$x_1, \dots, x_n \in X$にたいし、

$$m(x_1 - 1)\cdots(x_n - 1) = 0$$

となる。G/Kはアーベル群だから、Gの元gにたいする自己同形写像$g-1$は互いに可換となる。ある$r < n$にたいし、

$$m(g_1 - 1)\cdots(g_r - 1)(x_{r+1} - 1)\cdots(x_n - 1) = 1$$

が、すべての$g_1, \cdots, g_r \in G$とすべての$x_{r+1}, \cdots, x_n \in X$にたいし成り立つならば、因子$x_{r+1}$を右に移して、各元

$$m(g_1-1)\cdots(g_r-1)(x_{r+2}-1)\cdots(x_n-1)$$

がXの各元と可換となり、Gの各元と可換となる。 したがって、

$$m(g_1-1)\cdots(g_r-1)(x_{r+1}-1)\cdots(x_n-1)=0$$

がすべての$g_1, \cdots, g_{r+1} \in G$と$x_{r+2}, \cdots, x_n \in X$について成り立つ。 帰納法の仮定から、任意の$g_1, \cdots, g_n \in G$にたいし、$[a, g_1, \cdots, g_n] \in C$ となる。 だから、$Ca \in \zeta_n(G/C)$。 よって、上の主張が示され定理の証明が終わる。

任意の群Gは極大局所ベキ零部分群を唯一つ持つことが知られている。 これをGの Hirsch-Plotkin radical といい、$\rho(G)$と記す。

定理7. もしGが periodic なω安定群ならば、Gの Hirsch-Plotkin radical $\rho(G)$は定義可能である。

これを示すために、次の補題が必要となる。

補題1. M_c群の任意の部分群はM_c群である。

補題2 (Bryant). periodic な局所ベキ零M_c群はベキ零群の有限拡大である。

補題3. Gをω安定群、MとNをGの部分群とする。 こ

のとき、もし$N \triangleleft M$でかつ$[M:N]<\omega$ならばそれぞれのmodel closureについて$\overline{N} \triangleleft \overline{M}$でかつ$[\overline{M}:\overline{N}]<\omega$となる。

(定理7の証明) $\rho(G)$はGの正規部分群だから、補題3より、このmodel closure $\overline{\rho(G)}$はGの正規部分群となり、よって$\overline{\rho(G)}^{\circ} \triangleleft G$。補題1より、$\rho(G)$はベキ零群の有限拡大。MをGのベキ零正規部分群で$[\rho(G):M]<\omega$とする。補題3から、$[\overline{\rho(G)}:\overline{M}]$は有限となり$\overline{M}$はベキ零。いま$\overline{\rho(G)}^{\circ} \subset \overline{M}$だから$\overline{\rho(G)}^{\circ}$はベキ零。Hirsch-Plotkin radicalの一意性から、$\overline{\rho(G)}^{\circ}$は$\rho(G)$に含まれる。したがって$[\rho(G):\overline{\rho(G)}^{\circ}]$は有限。よって、$\rho(G)$は定義可能部分群$\overline{\rho(G)}^{\circ}$の有限個の剰余類の和集合として表わされるから、それ自身定義可能となる。

§2. ω安定群からCZ群へ

Kaplanskyは線形群の抽象化として次の概念を定義した。Z空間とは、閉集合についての極小条件をみたすT_1空間とする。群GがT_1群であるとは、逆元をとる写像と、変数をひとつ固定したとき、積の写像は連続となるものとする。Z群とは、その空間がZ空間であるT_1群のこととし、C群

とは、T_1群で固定したxにたいし写像 $a \to a^{-1}xa$ がどれも連続になるものをいう。 CZ群とは、C群かつZ群である群とする。 このとき、次のことが言える。

定理1. Gを連結閉集合についての極大条件をみたすZ群とする。 $(X_i)_{i \in I}$ をGの連結閉集合の族とする。 各X_iがeを含むものとすると、$(X_i)_{i \in I}$ で生成される群は連結閉集合となる。 さらに、Iの元のある有限列 $a = (a(1), \cdots, a(n))$ が存在して、

$$\langle X_i : i \in I \rangle = X_{a(1)}^{\varepsilon_1} \cdots X_{a(n)}^{\varepsilon_n} \qquad (\varepsilon_j = \pm 1)$$

となる。

証明. Iの元の任意の有限列 $a = (a(1), \cdots, a(n))$ にたいし、$X_a = X_{a(1)} \cdots X_{a(n)}$ とする。

主張1：X_a は連結。

A_kを $b_1 \cdots b_k$ $(b_i \in X_{a(i)})$ という形の元全体の集合とする。 このとき、

$$\{e\} = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots \subset A_n = X_a$$

となる。 いま各A_kが連結であることを示す。 明らかにA_0は連結である。 いまA_kが連結であると仮定する。 もし$A_{k+1}(b_1, \cdots, b_k)$ をGの連続写像 $x \to b_1 \cdots b_k x$ による$X_{a(k+1)}$の像とすると、$A_{k+1}(b_1, \cdots, b_k)$ は連結。 また、A_k $A_{k+1}(b_1, \cdots, b_k)$ は元$b_1 \cdots b_k e$

を含むから空でない。いま、

$$A_k = \bigcup_{b_i \in X_{a(i)}} A_{k+1}(b_1, \cdots, b_k)$$

だから、A_{k+1}は連結。したがって、X_aの閉包$\overline{X}_a$は連結閉集合となり、その中で極大な$\overline{X}_a$を取ってこれる。

主張2：Iの中の二つの有限列b，cにたいし $\overline{X}_b \overline{X}_c \subset \overline{X}_{(b,c)}$。ここで（b，c）はbとcの並列。

各$x \in X_c$にたいし、連続写像 $y \to yx$ はX_bを$X_{(b,c)}$の中へ写す。よって、$\overline{X}_b$を$\overline{X}_{(b,c)}$の中へ写す。したがって、

（＊）　$\overline{X}_b X_c \subset \overline{X}_{(b,c)}$.

一方、各$x \in \overline{X}_b$ はX_cを$\overline{X}_{(b,c)}$の中へ写す。したがって$\overline{X}_c$も$\overline{X}_{(b,c)}$の中へ写す。

主張3：$\overline{X}_a$は群である。

$\overline{X}_a$は極大で、$e \in \overline{X}_b$ だから、（＊）より、任意のbにたいし、

$$\overline{X}_a \subset \overline{X}_a \overline{X}_b \subset \overline{X}_{(a,b)} = \overline{X}_a 。$$

b＝a とおくと、$\overline{X}_a$は積について不動となる。bを$X_b = X_a^{-1}$ となるように取ると、$\overline{X}_b$は逆元をとる写像について不動となる。

$\overline{X}_a$はGの連結閉部分群で、すべてのX_iを含む。

主張4：　$\overline{X}_a = X_a X_a = X_{(a,a)}$。

逆元をとる写像は準同形だから、集合X_a^{-1}は$\overline{X}_a$の中でdenseとなる。 したがって、任意の元$x \in G$にたいし、xX_a^{-1}も$\overline{X}_a$でdense。 よって、$X_a \cap xX_a^{-1} \neq \phi$ となり、$x \in X_a X_a = X_{(a,a)}$。 この列（a，a）が定理を満足する。 □

応用として次のことが言える。

系． Gを連結閉集合についての極大条件をみたすCZ群とする。 HをGの連結閉部分群、XをGの部分集合とする。このとき、交換子群［X，H］はGの連結閉部分群である。

証明． 定理1より、各x　Xにたいし［x，H］＝$\{[x,h] : h \in H\}$ が連結となることを示せば十分。

連続写像 $y \to y^{-1}xy$ による連結群Hの像x^Hはやはり連結。 このとき、連続写像 $y \to x^{-1}y$ によるx^Hの像$x^{-1}x^H = [x, H]$ も連結。

付． ω安定群への位相の導入

ω安定群の特徴の一つとして、定義可能部分群についての極小条件をみたすことが挙げられる。 このことを使って、ω安定群に位相を導入する。

Gをω安定群とする。 Gの定義可能正規部分群の剰余類と空集合を閉集合として、部分基底を与える。 これにより

Gの上にT_1位相が定義される。 上の極小条件より、次の定理が導かれる。

定理. すべてのω安定群はZ群になる。

参考文献

J.T.Baldwin and J.Saxl, Logical stability in groups, J Austral. Math. Soc. Ser. A 21 (1976), 267-276.

G.Cherlin, Groups of small Morley rank, Ann. Math. Logic 17 (1979), 1-28.

U.Felgner, Stability and $\aleph_1$-categoricity of nonabelian groups, Logic Colloquium '76. Amsterdam, Oxford, North-Holland.

C.A.Higgins, Some structure theorems for CZ-groups, J. London Math. Soc. 20 (1979), 53-59.

I.Kaplansky, An introduction to Differential Algebra, Hermann, Paris, (1957).

K.Tanaka, Some local properties of ω-stable groups, Arch. Math. Logic 27 (1988), to appear.