

単純自己修正点過程 における推定

大阪大学基礎工学部

稲垣宣生

1. 自己修正点過程

時間軸 $[0, \infty]$ 上の点過程 $N(\cdot)$ を考える。点の発生時刻を τ_1, τ_2, \dots によって表し、 $N(t) = \#\{\tau_i : 0 \leq \tau_i \leq t\}$ を時間 $[0, t]$ で発生した点の個数とし $N(0) = 0$ とする。 $\mathcal{F}_t = \sigma(\{N(s) : 0 \leq s \leq t\})$ は過去の事象の全体とする。 $N(t)$ は純粹出生過程で、時刻 t における瞬間出生率は、

$$\lambda(t) = \lambda(t | \mathcal{F}_t) = \rho \phi(\rho t - N(t))$$

で与えられるとする。ここで ρ は正定数であり、 ϕ は次の性質を満たすとする：

$$(SC1) \quad 0 \leq \phi(x) < \infty, \quad \text{for } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(SC2) \quad \phi(x) \geq \exists c > 0, \quad \text{for } \forall x > 0,$$

$$(SC3)(i) \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \phi(x) < 1,$$

$$(ii) \quad \liminf_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) > 1.$$

最後の性質により、時間 t の経過に比較して点の発生が少
ないとき $x = \rho t - N(t)$ は大きい正数になるので $\phi(x)$ は大き
くなり点の発生が多くなる。次に、時間の経過に比較して点の
発生が多くなるとき $x = \rho t - N(t)$ は小さい負の数になるので
 $\phi(x)$ は小さくなり点の発生が少なくなる。

Isham and Westcott は、このような点過程を導入して自己
修正点過程 (self-correcting point process) とよんだ。時
間の尺度を変えることによって $\rho = 1$ としても一般性を失わ
ないことから、 $\rho = 1$ として Isham and Westcott は $N(t)$
の平均と分散を $\mu(t), V(t)$ とし、次のような $N(t)$ に
ついてのモーメント性質を得た:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\mu(t) - t| < \infty,$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |V(t)| < \infty.$$

Vere-Jones and Ogata は条件付き強度が指数関数: $\lambda(t) =$
 $\exp\{\alpha + \beta(t - N(t))\}$ のとき、ストレス放出過程 (stress
release process) $X(t) = t - N(t)$ のエルゴード性を示し次の結
果を得た:

定理

$$p\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T h(X(t)) dt$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \pi_j E \left[\int_0^{\infty} h(X(t)) dt \mid X(0)=j \right],$$

ここで $\{\pi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ はマルコフ連鎖 $\{X(n)\}_{n=0}^{\infty}$ の定常分布である。

さらに、Ogata and Vere-Jones は母数 α, β の最尤推定量の漸近正規性を示した。

Hayashi は条件 (SC1)-(SC3) に加えて

$$(SC4) \quad \forall k > 0 \text{ に対して } \exists M > 0 \text{ が存在して } \phi(x) \leq M \text{ for } \\ \forall x \leq k,$$

を満たす様な一般の条件付き強度に対しても Vere-Jones and

Ogata の結果が成り立つことを示した。さらに、Hayashi

は条件付き強度

$$\lambda(t) = \rho \phi(\beta \{\rho t - N(t) + \alpha\})$$

の母数 α, β, ρ の最尤推定量の漸近正規性を示した。

しかし、条件付き強度が複雑なために、どの結果も ”陽に (explicitly)” 求めたものではない。本稿では、単純な条件付き強度

$$\lambda(t) = \rho \phi(\rho t - N(t)) = a, \quad \text{if } \rho t - N(t) \leq c, \\ = b, \quad \text{if } \rho t - N(t) > c,$$

ここで、 $a < 1 < b$ である。

$$= \exp\{(\log a)N(A_T) + (\log b)N(B_T) - aL(A_T) - bL(B_T)\},$$

ここで、 $\chi_{\cdot}(t)$ は定義関数であり、

$$A = \{t : X(t) \leq 0\}, \quad B = \{t : X(t) > 0\},$$

$$N(A_T) = \int_0^T \chi_A(t) dN(t), \quad N(B_T) = \int_0^T \chi_B(t) dN(t),$$

$$L(A_T) = \int_0^T \chi_A(t) dt, \quad L(B_T) = \int_0^T \chi_B(t) dt,$$

であって、いずれも path に依存する。ゆえに、対数尤度方程式は

$$(\partial / \partial a) \log L_T(\theta) = N(A_T)/a - L(A_T) = 0,$$

$$(\partial / \partial b) \log L_T(\theta) = N(B_T)/b - L(B_T) = 0,$$

であるから、 a, b の最尤推定量は

$$\hat{a}_T = N(A_T) / L(A_T),$$

$$\hat{b}_T = N(B_T) / L(B_T).$$

過程 $M(t) = N(t) - \int_0^t \lambda(t) dt$ を導入し、

$$J(T) = \int_0^T f(t) dM(t)$$

を、右側連続で \mathcal{F}_t -可測な確率関数 $f(t)$ の Lebesgue-Stieltjes 積分として定義すると、 $J(T)$ は Wiener 過程に関する Ito 確率積分の性質と同様な性質を持っている。すなわち、 $E\{\int_0^T |f(t)| \lambda(t) dt\} < \infty$ と仮定すると、そのとき次の定理が成り立つ:

を考える。これは、条件 (SC1)-(SC4) を満たしているので、単純自己修正点過程 (simple self-correcting point process) とよぶことにする。時間軸の位置と尺度を変えることによって、 $\rho = 1$, $c = 0$ としても一般性を失わない。我々は、そのストレス放出過程 $X(t) = t - N(t)$ に対して、条件付き強度を

$$\begin{aligned} \lambda_{\theta}(t) &= a, & \text{if } X(t) \leq 0, \\ &= b, & \text{if } X(t) > 0, \end{aligned}$$

ここで、 $a < 1 < b$ である、

とする単純自己修正点過程を考え、母数 $\theta = (a, b)$ の最尤推定量とその漸近的性質を ”陽に” 求める。この結果は一般の自己修正点過程を理解するために役立つであろう。

2. 尤度関数と最尤推定量

正則な点過程の尤度関数は、条件付き強度を使って

$$L_T(\theta) = \exp\left\{ \int_0^T \log \lambda(t) dN(t) - \int_0^T \lambda(t) dt \right\}$$

で与えられる。したがって、単純自己修正点過程の尤度関数は

$$\begin{aligned} L_T(\theta) &= \exp\left\{ \int_0^T (\log a) \chi_A(t) dN(t) \right. \\ &\quad + \int_0^T (\log b) \chi_B(t) dN(t) \\ &\quad \left. - \int_0^T a \chi_A(t) dt - \int_0^T b \chi_B(t) dt \right\} \end{aligned}$$

定理

(i) $\{ \int_0^T f(t) dM(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq T < \infty \}$ はマルチンゲールである。

(ii) $E\{ \int_0^T f(t) dM(t) \} = 0$.

(iii) $E\{ \int_0^T f(t) dM(t) \}^2 = E\{ \int_0^T f(t)^2 \lambda(t) dt \}$.

(iv) $P\{ | \int_0^T f(t) dM(t) | > c \}$
 $\leq d/c^2 + P\{ | \int_0^T f(t)^2 \lambda(t) dt | > d \}$.

尤度関数は

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) \log L_T(\theta) = \begin{bmatrix} \int_0^T \chi_A(t) dM(t) / a \\ \int_0^T \chi_B(t) dM(t) / b \end{bmatrix}$$

であるから、Fisher 情報行列は

$$I_T(\theta) = \begin{bmatrix} E\{ L(A_T) \} / a & 0 \\ 0 & E\{ L(B_T) \} / b \end{bmatrix}.$$

同様にして、最尤推定量 $\hat{\theta}_T = (\hat{a}_T, \hat{b}_T)$ の平均と分散は

$$E\{ \hat{\theta}_T \} = \theta = (a, b) \text{ 不偏}$$

$$V\{ \hat{\theta}_T \} = \begin{bmatrix} a E\{ L(A_T)^{-1} \} & 0 \\ 0 & b E\{ L(B_T)^{-1} \} \end{bmatrix}.$$

最尤推定量の分散は Cramer-Rao の下限である $I_T(\theta)^{-1}$ を達しないので有効ではないが、漸近的には一致しそうであるから漸近有効であろう。

3. $\{X(n)\}_{n=0}^{\infty}$ の定常分布

ストレス放出過程 $X(t)=t-N(t)$ はエルゴード性を持つマルコフ過程であり、時間が整数値をとる場合を考えると、 $\{X(n)\}_{n=0}^{\infty}$ は既約非周期マルコフ連鎖でエルゴード性を持つ。

3.1 推移確率

マルコフ連鎖 $\{X(n)\}_{n=0}^{\infty}$ の推移確率

$$P_{h,k} = P\{X(n+1)=k \mid X(n)=h\}$$

を求めよう。 $k \geq h+2$ に対しては、 $P_{h,k} = 0$ であるから推移確率行列は

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & P_{-2,-2} & P_{-2,-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & P_{-1,-2} & P_{-1,-1} & P_{-1,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & P_{0,-2} & P_{0,-1} & P_{0,0} & P_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & P_{1,-2} & P_{1,-1} & P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & P_{2,-2} & P_{2,-1} & P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

の様な形をしている。

(i) $X(n) = -h$ ($h > 0$) の条件の下で、

$X(n+1)$ の取り得る値は $X(n+1) = -h+1, -h, -h-1, -h-2, \dots$

であって、

$$\begin{aligned} P_{-h, -k} &= P_{-h, -(h-1)-(k-h+1)}, k = h-1, h, h+1, \dots \\ &= e^{-a} a^{k-h+1} / (k-h+1)!. \end{aligned}$$

(ii) $X(n) = h$ ($h \geq 0$) の条件の下で、

$X(n+1)$ の取り得る値は $X(n+1) = h+1, h, h-1, \dots, 1, 0, -1, -2, \dots$ であって、

① $1 \leq k \leq h+1$ のとき、

$$\begin{aligned} P_{h, k} &= P_{h, h+1-(h-k+1)} \\ &= e^{-b} b^{h-k+1} / (h-k+1)!, \end{aligned}$$

② $k \geq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} P_{h, -k} &= \int_0^1 \{ b e^{-bx} (bx)^h / h! \}^x \\ &\quad \{ e^{-a(1-x)} (a(1-x))^k / k! \} dx. \end{aligned}$$

3.2 定常分布

マルコフ連鎖 $\{X(n)\}_{n=0}^{\infty}$ の定常分布を $\{\pi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ とすれば、

$$\pi_k = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \pi_h P_{h, k}$$

を満たす。

(i) $k > 0$ のとき、 $P_{h,k}$ の値が 0 でないのは $h = k-1, k, k+1, k+2, \dots$ に対してであって、

$$\begin{aligned}\pi_k &= \sum_{h=k-1}^{\infty} \pi_h e^{-b} b^{h-k+1} / (h-k+1)! \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \pi_{h+k-1} e^{-b} b^h / h!\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $\pi_k = c p^k$, $k \geq 0$ とおくと、

$$\begin{aligned}c p^k &= \sum_{h=0}^{\infty} c p^{h+k-1} e^{-b} b^h / h! \\ &= c p^{k-1} e^{-b} e^{b p}.\end{aligned}$$

これより、

$$p = e^{b(p-1)}, \quad \therefore \log p = b(p-1).$$

$b > 1$ として $0 < p < 1$ の範囲でこの様な p はただ一つある。

c については後で求める。

(ii) $-k \leq 0$ のとき、 $P_{h,-k}$ の値が 0 でないのは $h = -k-1, -k, -k+1, -k+2, \dots$ に対してであって、

$$\begin{aligned}\pi_{-k} &= \sum_{h=-k-1}^{\infty} \pi_h P_{h,-k} \\ &= c \sum_{h=0}^{\infty} p^h \int_0^1 \{b e^{-bx} (bx) h / h!\} \\ &\quad \times \{e^{-a(1-x)} (a(1-x))^k / k!\} dx \\ &\quad + \sum_{h=1}^{k+1} \pi_{-h} e^{-a} a^{k+1-h} / (k+1-h)! \\ &= c \int_0^1 b e^{b(p-1)x} \{e^{-a(1-x)} (a(1-x))^k / k!\} dx\end{aligned}$$

$$+ \sum_{h=0}^{k+1} \pi_{-(k+1-h)} e^{-a} a^h / h! \\ - c e^{-a} a^{k+1} / h!.$$

$\{\pi_{-k}\}_{k=0}^{\infty}$ を係数に持つ巾級数を $P(t)$ とすれば、

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{-k} t^k \\ = c \int_0^1 b e^{b(p-1)x} e^{a(1-x)(t-1)} dx \\ + \{P(t) e^{a(t-1)} - c e^{-a}\} / t \\ - c \{e^{a(t-1)} - e^{-a}\} / t \\ = cb e^{a(t-1)} \{e^{b(p-1)-a(t-1)} - 1\} \\ / \{b(p-1)-a(t-1)\} \\ + e^{a(t-1)} \{P(t) - c\} / t.$$

これから $P(t)$ をもとめると、

$$P(t) = c \frac{tbp - tb e^{a(t-1)} - \{b(p-1)-a(t-1)\} e^{a(t-1)}}{\{b(p-1)-a(t-1)\} \{t - e^{a(t-1)}\}}.$$

L'Hopital の定理によって、

$$P(1) = c \frac{bp - b - ab + a - ab(p-1)}{b(p-1)(1-a)} \\ = c \{b(p-1) + a(1-bp)\} / \{b(p-1)(1-a)\}.$$

一方、

$$P(1) = 1 - \sum_{h=1}^{\infty} \pi_h = 1 - cp/(1-p)$$

であるから、これより c を求めると、

$$c = b(1-p)(1-a)/(b-a).$$

以上によって定常分布が得られた。

4. 最尤推定量の一致性と漸近正規性

4.1 最尤推定量の一致性

$\theta = (a, b)$ の最尤推定量 $\hat{\theta}_T = (\hat{a}_T, \hat{b}_T)$ の一致性を示すために、まず $T \rightarrow \infty$ のとき $L(B_T)/T \rightarrow (1-a)/(b-a)$ であることを示そう。ストレス放出過程 $X(t) = t - N(t)$ のエルゴード性によって、

$$L(B_T)/T = T^{-1} \int_0^T \delta(X(t)) dt$$

$$\rightarrow L_B = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \pi_j E\left[\int_0^1 \delta(X(t)) dt \mid X(0)=j\right],$$

in probability, as $T \rightarrow \infty$,

ここで、 $\delta(x) = 1(x > 0)$ のとき、 $= 0(x \leq 0)$ のとき とする。

ところが $X(0)=j$ のもとで $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$ の取り得る値は、 $X(t) = j+t, j+t-1, j+t-2, \dots$ であるから、 $j < 0$ のとき $X(t)$ は 0 または負の値しか取らないので $\delta(X(t)) = 0$ である。ゆえ

に、 $j \geq 0$ に対してだけ $X(0)=j$ を考えればよい。

$$\begin{aligned} L_B &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j E\left[\int_0^1 \delta(X(t)) dt \mid X(0)=j\right] \\ &= c \sum_{j=0}^{\infty} p^j \int_0^1 E[\delta(X(t)) \mid X(0)=j] dt. \end{aligned}$$

一方、 $j \geq 0$ について

$$\begin{aligned} E[\delta(X(t)) \mid X(0)=j] &= P[X(t) > 0 \mid X(0)=j] \\ &= \sum_{k=0}^j P[X(t)=j+t-k \mid X(0)=j] \\ &= \sum_{k=0}^j e^{-bt} (bt)^k / k! \\ &= \int_{bt}^{\infty} x^j e^{-x} / j! dx. \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} L_B &= c \int_0^1 \left\{ \int_{bt}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p^j x^j e^{-x} / j! dx \right\} dt \\ &= c \int_0^1 \left\{ \int_{bt}^{\infty} e^{(p-1)x} dx \right\} dt \\ &= c / \{b(1-p)\} = (1-a)/(b-a) \end{aligned}$$

が示された。したがって、 $L(A_T)+L(B_T)=T$ より

$$L(A_T)/T \rightarrow L_A = 1 - (1-a)/(b-a) = (b-1)/(b-a),$$

in probability

を得る。

さらに、 $T \rightarrow \infty$ のとき

$$I_T(\theta) / T$$

$$\rightarrow I(\theta) = \begin{bmatrix} (b-1)/\{a(b-a)\} & 0 \\ 0 & (1-a)/\{b(b-a)\} \end{bmatrix},$$

$$V\{\hat{\theta}_T\} \rightarrow 0$$

が示され、これより最尤推定量の一致性が証明される。

4.2 最尤推定量の漸近正規性

最尤推定量の漸近正規性の証明は、一般のポアソン型点過程に対する次の中心極限定理を使って行われる。

定理

$\lambda_T(t)$, $0 \leq t \leq T$ は条件付き強度で、 $f_T = \{f_T(t), \forall t: 0 \leq t \leq T\}$ はポアソン型点過程に関する予測可能関数の中心化されたものとする。次の条件が成り立つとする。

$$(AN1) \quad p\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f_T(t)^2 \lambda_T(t) dt = \sigma^2 < \infty,$$

$$(AN2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f_T(t)^2 \chi_{\{|f_T(t)| > \varepsilon\}} \lambda_T(t) dt = 0,$$

for $\forall \varepsilon > 0$.

そのとき、

$$\int_0^T f_T(t) dM(t) \rightarrow N(0, \sigma^2), \quad \text{as } T \rightarrow \infty.$$

いま、尤度関数に $T^{-1/2}$ を掛けたものを

$$\begin{aligned} \Delta_T &= T^{-1/2} \left(\partial / \partial \theta \right) \log L_T(\theta) \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1/2} \int_0^T \chi_A(t) dM(t) / a \\ T^{-1/2} \int_0^T \chi_B(t) dM(t) / b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とおく。 $f_T(t) = T^{-1/2} \chi_A(t) / a$ と考えると、

$$(AN1) \quad T^{-1} \int_0^T \chi_A(t) / a dt \rightarrow (b-1) / \{a(b-a)\},$$

in probability

が成立ち、 $\{ |f_T(t)| > \varepsilon \} = \{ |\chi_A(t)| > \varepsilon a T^{1/2} \}$ であるから T が大きいとき (AN2) は成り立つ。 $\chi_B(t)$ についても全く同様なことがいえる。2次元確率ベクトル Δ_T についても同様な議論が成り立つので、

$$\mathcal{L}[\Delta_T] \rightarrow N(0, I(\theta))$$

が証明される。これより直ちに、最尤推定量の漸近正規性

$$\mathcal{L}[T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta)] \rightarrow N(0, I^{-1}(\theta)),$$

が示される。

参考文献

- [1] 林利治、 「点過程におけるエルゴード性」、 修士論文、 1985年4月。
- [2] Hayashi, T. (1986). Laws of large numbers in self-correcting point process, Stoch. Proc. Appl., 23, 319-326.
- [3] Hayashi, T. (1987). Local asymptotic normality in self-correcting point processes, Proc. of the 2nd Pacific Area Statist. Conf., (to appear).
- [4] Isham, V. and Westcott, M. (1979). A self-correcting point process, Stoch. Proc. Appl., 8, 335-347.
- [5] Kutoyants, Yu. A. Parameter Estimation for Stochastic Process, 1984, (translated by Prakasa Rao, B. L. S.), Heldermann Verlag.
- [6] Ogata, Y. and Vere-Jones, D. (1984). Inference for earthquake models: a self-correcting model, Stoch. Proc. Appl., 17, 337-347.
- [7] Snyder, D. L. Random Point Processes, 1975, Wiley.

- [8] Vere-Jones, D. and Ogata, Y. (1984). On the moments of a self-correcting process, J. Appl. Prob., 21, 335-342.