数理解析研究所講究録
第 646 巻 1988 年 37-39



# 連立代数方程式について

小林　英恒(Hidetsune Kobayashi)(日大理工、数)
森継　修一(Shuichi Moritsugu)　(東大理、情報)
ロバート　ホーガン(Robert W. Hogan)(シチズン時計)

## 1. 条件付きの連立代数方程式

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
&\cdots \\
f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

を有理数を係数に持つ連立代数方程式とする。イデアル　I　を　$f_1, f_2, \ldots, f_m$ で生成されるイデアルとするとき、次の命題がしめされる。

命題　1

I とそのラディカル　r(I) とが一致するときは、ほとんどすべての線形座標変換によって、新しく得られた座標を　$z_1, z_2, \ldots, z_n$ とおくと、この座標にかんする辞書式順序によって得られるグレブナ基底は、つぎの型をしている。

$$\{z_1 - \phi_1(z_n),\ z_2 - \phi_2(z_n), \ldots, z_{n-1} - \phi_{n-1}(z_n),\ \phi_n(z_n)\} \tag{1.2}$$

この命題の意味は、(1.1) を解くことと(1.2) の共通零点を見つけることとが同値であることを示す。r(I) の零点と　I　の零点とは集合としては等しいから、重複度を度外視すれば、(1.1)は一変数 $z_n$ の代数方程式

$$\phi(z_n) = 0$$

を解けばすべての零点を得ることができる。

## 2. ラディカルの構成

線形座標変換によって新しく得られた座標を $z_1, z_2, ..., z_n$ とすると、

$$I \cap Q[z_n] = (g(z_n))$$

となる $g(z_n)$ は辞書式順序によって計算されたグレブナ基底の一つとして得られ、さらにこれの因数分解を

$$g = g_1^{e1} \cdot g_2^{e2} \ ... \ g_s^{es}$$

とおく。$(I, g_i^{e_i}) = q_i$ とおくと、このイデアルは準素イデアルであり

$$I = q_1 \cap q_2 \cap ... \cap q_s$$

となるが、これは I のむだの無い準素イデアル分解である。

このように準素イデアル分解が構成可能であるから、最初から I は 準素イデアルとしてよい。この仮定のもとに

$$I \cap Q[z_n] = (g^e)$$

となるから、イデアル $(I, g)$ のグレブナ基底の中に、$(g)$ を法として

$$(z_{n-1} - \phi_{n-1}(z_n))^a$$

の型のものが、存在する。次にイデアル $(I, z_{n-1} - \phi_{n-1}(z_n), g)$ のグレブナ基底の中に

$$(z_{n-2} - \phi_{n-2}(z_n))^b$$

の型の要素がある。

これを繰り返して、

$$(z_1 - \phi_1(z_n), z_2 - \phi_2(z_n), ..., z_{n-1} - \phi_{n-1}(z_n), g)$$

が I のラディカルとなる。

Jを任意のイデアルとするとき、V(J) をJの共通零点のなす集合とする。

命題２　Jが 0-次元準素イデアルであるとき、V(J)の元は、連立代数方程式 J＝0の解として、すべて同一の重複度を持つ。

命題３　Jが 0-次元素イデアルであるとき、V(J)の元は、連立代数方程式 J＝0の解として、すべて重複度が１である。

この２つの命題から、J画準素イデアルであるとき、V(J) の元は、重複度

$$\{\dim Q[x]/J\}/\{\dim Q[x]/r(J)\}$$

となることが示される。

　また、Ｉを任意の0-次元イデアルとするとき、Ｉを準素イデアルに分解して考えることによって、V(I)の各元の重複度を計算することができる。