

未定係数法のための REDUCE パッケージ

広大. 工 伊藤雅明 (Masaki Ito)

数式処理システムを使って微分方程式の解を求める場合、未定係数法がしばしば用いられる。ここでは、数式処理システム REDUCE による未定係数法のためのパッケージを紹介する。

微分方程式

$$K(u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_m}) = 0 \quad (1)$$

の解を求める場合、次のように未定係数を含む解を予想し

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m; c_1, \dots, c_n) \quad (2)$$

これを微分方程式(1)に代入すると、 c_1, \dots, c_n を含む条件式

$$F(x_1, \dots, x_m, c_1, \dots, c_n) = 0 \quad (3)$$

が得られる。(3)式が x_1, \dots, x_m について恒等的に満たされるように未定係数 c_1, \dots, c_n を決めることによって解が求められる。

ここでは、(3)式が x_1, \dots, x_m の多項式であり、且つ未定

係数 c_1, \dots, c_n に関しては線形である場合を考える。この場合 (3) 式は

$$\sum_{i=1}^p f_i(c_1, \dots, c_n) x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_m^\epsilon = 0 \quad (4)$$

と表わされるので、未定係数 c_1, \dots, c_n は次の条件式

$$f_1(c_1, \dots, c_n) = 0$$

- - - - -

$$(5)$$

$$f_q(c_1, \dots, c_n) = 0$$

を満たすように決めればよい。現在の REDUCE システムで、このことを行うには、まず、COEFF オペレーターを使って各 x_i ($i=1, \dots, m$) についての係数 f_1, \dots, f_q を求め、SOLVE を使って c_1, \dots, c_n を決めるといった方法が考えられる。しかし、取扱う問題が少し複雑になると、COEFF オペレーターでは、手続きが非常に煩雑になる。また、一般的には条件式のいくつかは独立ではなく、条件式の数は未定係数の数 n より大きくなることがある。このような場合には、SOLVE オペレーターでは、うまく働いてくれない。

そこで、(3) 式の $F(x_1, \dots, x_m, c_1, \dots, c_n)$ が与えられたとき、 F が x_1, \dots, x_m について恒等的に 0 になるように、自動的に未定係数 c_1, \dots, c_n を決め、その値をそれぞれ自身に代入するパッケージ、SOL 及び SOL2 を以下の例で示す。

例. ルジャンドルの方程式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

の 7 次及び 5 次の解を SOL 及び SOL2 を使って求めよ。

```
LOAD "FAPLIB:SOL";
```

```
OPERATOR F, X, C;
```

```
% LEGENDRE POLYNOMIAL
```

```
FOR ALL Y, X, N LET
```

```
  F(Y, X, N) = (1-X**2)*DF(Y, X, 2) - 2*X*DF(Y, X) + N*(N+1)*Y;
```

```
% EXAMPLE 1.  LEGENDRE POLYNOMIAL OF ORDER 7
```

```
Y7 := FOR I:=0:7 SUM C(I)*X(0)**I;
```

```
Y7 := C(7)*X(0)7 + C(6)*X(0)6 + C(5)*X(0)5 + C(4)*X(0)4 + C(3)*  
X(0)3 + C(2)*X(0)2 + C(1)*X(0) + C(0)
```

```
F7:=F(Y7, X(0), 7)¥
```

```
SOL(F7, X, C)¥
```

```
SOLVED !
```

```
Y7;
```

```
(C(1)*X(0)*( - 429*X(0)6 + 693*X(0)4 - 315*X(0)2 + 35))/35
```

% EXAMPLE 2. LEGENDRE POLYNOMIAL OF ORDER 5

Y5:=C0+C1*X+C2*X**2+C3*X**3+C4*X**4+C5*X**5;

$$Y5 := X^5 * C5 + X^4 * C4 + X^3 * C3 + X^2 * C2 + X * C1 + C0$$

F5:=F(Y5, X, 5)¥

SOL2(EQ(F5, X), C0, C1, C2, C3, C4, C5)¥

SOLVED !

Y5;

$$(X * C5 * (63 * X^4 - 70 * X^2 + 15)) / 63$$