数理解析研究所講究録
第 646 巻 1988 年 147-150

2次元戸田分子方程式

広大 工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

現在ソリトン方程式として知られている非線形偏微分(差分)方程式のほとんどすべてが変換によって2次形式(Bilinear form)に書き直せることが知られている。微分方程式の解をWronskian (or Casorati 行列式)表示すると，2次形式は行列式のもつ特別な関係式(例えばPlücker relation, Jacobiの公式)に対応している。

2次元戸田分子方程式の解のWronskian表現 $\tau_N^{(\ell)}$ は

$$\tau_N^{(\ell)} = \det\left| \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x_1^{j-1}\partial y_1^{i-1}} \phi^{(\ell)} \right|_{1\le i,j\le N}, \qquad \tau_0^{(\ell)}=1, \quad \tau_{-1}^{(\ell)}=0,$$

where $\phi^{(\ell)} = (a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_1)^{\ell}\, \phi^{(0)}, \qquad \ell \geqq 0,$

$\phi^{(-\ell)} = (a_0 \frac{\partial}{\partial y_1} + b_0)^{\ell}\, \phi^{(0)}, \qquad \ell > 0,$

$\Phi^{(0)}$ は x, y の任意関数

と表現される。

$\tau_N^{(\ell)}$ のもついろいろな関係式が数式処理 Reduce 3.3 を使って推定された。以下の式は $N=0, 1, 2, 3$ まで成立することが数式処理で確かめられた。

まず2項演算子 $D_{x_1}^m D_{y_1}^n f \cdot g \quad (m, n \geq 0)$ を次式で導入する。

$$D_{x_1}^m D_{y_1}^n f \cdot g \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_1'}\right)^n f(x_1, y_1)\, g(x_1', y_1') \Big|_{\substack{x_1' = x_1 \\ y_1' = y_1}} .$$

この記号を用いると関係式は次のようになる。

(1) $\quad D_{x_1} D_{y_1} \tau_N^{(\ell)} \cdot \tau_N^{(\ell)} = 2\, \tau_{N+1}^{(\ell)} \tau_{N-1}^{(\ell)}$,

(2) $\quad D_{x_1} \tau_N^{(-1)} \cdot \tau_N^{(0)} = a_0\, \tau_{N+1}^{(0)} \tau_{N-1}^{(-1)}$,

(3) $\quad D_{y_1} \tau_N^{(1)} \cdot \tau_N^{(0)} = a_1\, \tau_{N+1}^{(0)} \tau_{N-1}^{(1)}$,

(4) $\quad (a_0 D_{y_1} + b_0)\, \tau_{N+1}^{(0)} \cdot \tau_N^{(-1)} = \tau_{N+1}^{(-1)} \tau_N^{(0)}$,

(5) $\quad (a_1 D_{x_1} + b_1)\, \tau_{N+1}^{(0)} \cdot \tau_N^{(1)} = \tau_{N+1}^{(1)} \tau_N^{(0)}$,

ここで a_0, a_1, b_0, b_1 は定数,

(6) $$D_{x_1}D_{y_1}\tau_N^{(0)}\cdot\tau_N^{(-1)}=(a_0D_{y_1}+2b_0)\tau_{N+1}^{(0)}\cdot\tau_{N-1}^{(-1)},$$

(7) $$D_{x_1}D_{y_1}\tau_N^{(0)}\cdot\tau_N^{(1)}=(a_1D_{x_1}+2b_1)\tau_{N+1}^{(0)}\cdot\tau_{N-1}^{(1)},$$

(8) $$a_0D_{y_1}\tau_{N-1}^{(-1)}\cdot\tau_N^{(1)}+a_1D_{x_1}\tau_N^{(-1)}\cdot\tau_{N-1}^{(1)}$$
$$=b_0\tau_{N-1}^{(-1)}\tau_N^{(1)}-b_1\tau_N^{(-1)}\tau_{N-1}^{(1)},$$

(9) $$D_{y_1}\tau_N^{(0)}\cdot\tau_N^{(2)}+a_1^2D_{x_1}\tau_{N+1}^{(0)}\cdot\tau_{N-1}^{(0)}=-2a_1b_1\tau_{N+1}^{(0)}\tau_{N-1}^{(2)},$$

(10) $$D_{x_1}\tau_N^{(0)}\cdot\tau_N^{(-2)}+a_0^2D_{y_1}\tau_{N+1}^{(0)}\cdot\tau_{N-1}^{(-2)}=-2a_0b_0\tau_{N+1}^{(0)}\tau_{N-1}^{(-2)}.$$

(1)式は2次元戸田分子方程式の2次形式表現であり,任意のNで成立する.

(2),(3),(4),(5)式は2次元戸田分子方程式に対するBäcklund変換の式である.$b_0=b_1=0$のときは任意のNで成立することが証明されている.

(6)式以下が新しい関係式である.

任意関数$\phi^{(0)}$に新しい条件(例えば$\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\phi^{(0)}=\phi^{(0)}$)を追加すると,$\tau_N^{(l)}$は色々な新しい関係式をみたすよう

になる。これらの式は色々なソリトン方程式例えば

Massive Thirring Equation,

Pohlmeyer - Lund - Regge - Getmanov 方程式

Derivative nonlinear Schrödinger 方程式

Two - dimensional nonlinear Schrödinger 方程式

などの2次形式に関係していることが分った。

数学研究では新しい関係式を導出することが大切であるが，関係式を予想し，数式処理を使ってこれをチェックし，あとで一般的証明を与えるという方法は研究のスピード化に非常に有用である。