数理解析研究所講究録
第 647 巻 1988 年 72-98

アメリカにおける発展方程式の最近の話題

航空技研　岩宮敏幸 (Toshiyuki Iwamiya)

§1　序論

非線形偏微分方程式

(1.1)　$Au = f$

を解くことを考えてみよう。ここで A は非線形偏微分作用素 u は未知関数 f は与えられた関数とする。この方程式を直接解くことは一般に困難なので、多くの場合、容易に解ける近似方程式

(1.2)　$A^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon$

を経由する。この場合、問題は、近似方程式の解 u^ε が収束するか、収束した時極限関数 u は元の方程式 (1.1) を満足するかということに帰着される。これについて従来から行われてきた方法は、Compactness Method とも呼ばれるもので、まず近似方程式 (1.2) を利用して近似解の列 $\{u^\varepsilon\}$ に対する種々の汎関数の一様評価を求め、Sobolev の埋蔵定理等を用

いて近似解列$\{u^\varepsilon\}$のCompact性を示し、部分列をとって収束させ解の候補uを得る。この場合uが元の方程式(1.1)を満足することを示すのは比較的容易である。一方、考える非線形偏微分方程式の範囲が広がるにつれて、近似解列$\{u^\varepsilon\}$のCompact性を保障するのに十分なだけの評価が得られず、弱Compact性のみしか主張できない問題が多く現れてきた。この場合、部分列をとることにより弱収束極限として解の候補者uを得ることができるが、このuが元の方程式を満たしているかどうかというのは困難な問題ではあるが、方程式の非線形性とも深く関係しており非常に興味深い問題である。この方法はWeak Compactness Methodと呼べるもので、近年新しい道具が続々と開発されて、急速に発展をとげている。この流れの中に、変分法、単調作用素の理論、Hamilton-Jacobi方程式に対するviscosity solutionの理論、Homogenization、Compensated compactnessの理論、concentration compactness等があり、お互いに関係しあいながら新しい考え方が生みだされ、適用範囲を広げている。

本稿では特にconcentration compactnessに焦点をあてSobolevの不等式を例にとってconcentration compactness argumentといわれるものを紹介し、さらにそれに関連して2-D Euler方程式の近似解列の弱収束の振舞を解析した

R.J. DiPernaとA. Majdaによる論文「Reduced Dimension and Concentration-Cancellation for Two Dimensional Incompressible Flow」を介する。

§2 Concentration Compactness Argument

Sobolevの不等式を例にとる。$L^p(\mathbb{R}^N)$を通常のLebesgue空間とするとき、Sobolevの不等式とは次のものである。

mを自然数とし、実数p, qを $1 \leqq p < \frac{N}{m}$, $q = \frac{Np}{N-mp} > p$ とするとき、ある正数Cが存在して

$$(2.1) \qquad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqq C \|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

が成立する。ここで $D^m u = (D^\alpha u)_{|\alpha|=m}$ はuのm階微分を表わす。

Sobolevの不等式に関連した重要な問題の一つは不等式(2.1)を満たす最小のCはいくつか、その時ある関数uが存在して等式 $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = C\|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ を満たしているかということである。

この問題の解答を与えるのに先立って記号を導入しておく。

$$(2.2) \qquad I_\lambda = \operatorname{Inf}\{\|D^m u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \,;\, \|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \lambda\}$$

I_1のminimizing sequence $\{u_n\}$をとり、これがcompactであれば簡単であるが、$\mathbb{R}^N$には平行移動と原点を中心とする相似変換という2つのNoncompact群が作用しているため話はそう単純ではない。$\mathbb{R}^N$の相似変換に関する不変性を考慮する

と、$I_\lambda = \lambda^{p/q} I_1$ であることがわかり、次の劣加法性を得る。

(2.3) $$I_1 < I_\alpha + I_{1-\alpha} \quad , \quad 0<\alpha<1$$

この種の不等式が Concentration Compactness Argument では本質的な役割を演じる。結果を与えよう。

定理2.1 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ のノルム $\|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ に関する完備化とする。このとき I_1 に対するすべての minimizing sequence $\{u_n\}$ は平行移動と相似変換を除いて $\mathcal{D}^{m,p}$ で相対 compact である。即ちある点列 $\{y_n\}$ と正数列 $\{\sigma_n\}$ が存在して修正した minimizing sequence $\{\tilde{u}_n(x) = \sigma_n^{-N/q} u_n\left(\frac{x-y_n}{\sigma_n}\right)\}$ は $\mathcal{D}^{m,p}$ で相対compact である。

証明の概略を与える。

$\{u_n\}$ を I_1 の minimizing sequence とする。

$$\rho_n(x) = \sum_{j=0}^{m} |D^j u_n|^{q_j} \qquad q_j = \frac{Np}{N-(m-j)p}$$

(2.4)
$$Q_n(t) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{|x-y|\le t} \rho_n(x)\,dx \qquad \text{(concentration function)}$$

とおく。容易にわかることとして、Q_n は t に関して単調増加、有界で $t\to\infty$ における極限を L_n とすると $L_n \geqq 1+I_1$ である。また、相似変換 $u_n^\sigma(x) = \sigma^{-N/q} u_n\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ により対応する Concentration function Q_n^σ は $Q_n^\sigma(t) = Q_n\left(\frac{t}{\sigma}\right)$ となる。従って、一般性を失うことなく、$Q_n(1) = \frac{1}{2}$ と仮定してよい。また部分列をとることにより、$L_n \to L$ とする。

1st concentration compactness lemma

$\rho_n(x) \geqq 0$, $Q_n(t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leqq t} \rho_n(x)\,dx \nearrow L_n$ (as $t \to \infty$) L_nは有界とするとき、部分列（新めて n とかく）が存在し $L_n \to L$ かつ次の3つのいずれかが成立する。

① Shift compactness

点列 $\{y_n\}$ が存在して $\rho_n(\cdot + y_n)$ は tight。即ち、

$$\int_{|x| \geqq R} \rho_n(x+y_n)\,dx \longrightarrow 0 \quad \text{as } R \to \infty。$$

② Vanishing

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leqq R} \rho_n(x)\,dx = 0 \quad \text{for } R > 0。$$

③ Dichotomy

$\bar{\alpha} \in (0, L)$ が存在して次を満たす。

任意の $\varepsilon > 0$ に対し点列 $\{y_n\}$ と正数列 $R_0 < R_n \to \infty$ が存在して、

$$\left| \bar{\alpha} - \int_{|x-y_n| \leqq R_0} \rho_n(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

$$\int_{R_0 \leqq |x-y_n| \leqq R_n} \rho_n(x)\,dx < \varepsilon$$

が成り立つ。

注意　Hellyの選出定理により、部分列をとれば Q_n は単調増加関数 Q に収束させることができるが、$\bar{\alpha} = \lim_{t\to\infty} Q(t) \in [0, L]$ により上の3通り Shift compactness ($\bar{\alpha} = L$)、Vanishing ($\bar{\alpha} = 0$) Dichotomy ($\bar{\alpha} \in (0, L)$) にわかれる。

このlemmaを適用しよう。まず、$Q_n(1)=\frac{1}{2}$よりVanishingは起こり得ない。Dichotomyが起きたとしよう。$\xi,\eta\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$を$0\leqq\xi,\eta\leqq 1$, $\xi=1$ $(|x|\leqq 1)$ $\xi=0$ $(|x|\geqq 2)$ $\eta=1$ $\eta=0$ $(|x|\leqq\frac{1}{2})$となるようにとり$\xi_n(x)=\xi\left(\frac{x-y_n}{R}\right)$, $\eta_n(x)=\eta\left(\frac{x-y_n}{R_n}\right)$, $u_n^1=\xi_n u_n$, $u_n^2=\eta_n u_n$とおく。このとき、簡単な計算により 十分大なるnに対して

(2.5) $$\left|\int_{\mathbb{R}^N}|D^m u_n|^p-\int_{\mathbb{R}^N}|D^m u_n^1|^p-\int_{\mathbb{R}^N}|D^m u_n^2|^p\right|\leqq C(\varepsilon^{1/p}+\varepsilon)$$

ある正数γが在って$\|D^m u_n^1\|_{L^p}^p$, $\|D^m u_n^2\|_{L^p}^p\geqq\gamma$がわかる。更に部分列をとることにより

(2.6) $$\int_{\mathbb{R}^N}|u_n^1|^q\longrightarrow\alpha,\quad\int_{\mathbb{R}^N}|u_n^2|^q\longrightarrow\beta$$ とすれば $|1-(\alpha+\beta)|<\varepsilon$ となる。

次に$\varepsilon_k\to 0$なる数列をとりε_kに対応するαをα_k, ε_kに対応するβをβ_kとする。部分列をとり$\alpha_k\to\bar\alpha$, $\beta_k\to\bar\beta$とすれば$\bar\alpha+\bar\beta=1$となる。$\bar\alpha=1$または0とすれば(2.5)より$I_1\geqq I_1+\gamma$となり矛盾、$\bar\alpha,\bar\beta\neq 0$とすれば 同じく(2.5)より $I_1\geqq I_{\bar\alpha}+I_{1-\bar\alpha}$ となり(2.3)に反する。以上よりDichotomyは起こり得ないことがわかった。

<u>2nd concentration compactness lemma</u>

$u_n\rightharpoonup u$ in $\mathcal{D}^{m,p}$

$|D^m u_n|^p\overset{*}{\rightharpoonup}\mu$ in M

$|u_n|^q\overset{*}{\rightharpoonup}\nu$ in M tightly とする。ただし、

Mは $\mathbb{R}^N$上の measure の空間を表わし、μ, νは$\mathbb{R}^N$上の有界非負な measure, $\rightharpoonup$, $\overset{*}{\rightharpoonup}$ はそれぞれの空間における弱収束および弱*収束を表わすものとする。このとき

① 高々可算個の元をもつ集合JとJを index にもつ$\mathbb{R}^N$の点列 $(x_j)_{j\in J}$ と正数列 $(\nu_j)_{j\in J}$ が存在して

(2.7) $$\nu = |u|^q + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}$$

(2.8) $$\mu \geq |D^m u|^p + I_1 \sum_{j\in J} \nu_j^{p/q} \delta_{x_j}$$ が成り立つ。

② $v \in \mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, $|D^m(u_n+v)|^p \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{\mu}$ in M とすると

$$\tilde{\mu} - \mu \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

$$\tilde{\mu} \geq |D^m(u+v)|^p + I_1 \sum_{j\in J} \nu_j^{p/q} \delta_{x_j}$$

③ 特に $v\equiv 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}^N} d\mu \leq I_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} d\nu\right)^{p/q}$ のときは

(2.9) $$\nu = \gamma \delta_{x_0} = (I_1 \gamma^{p/q})^{-1} \mu$$ となる。

<u>注意</u> 上の lemma は Sobolev の不等式より得られる次の逆向きの Hölder 不等式を用いて証明される。

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\nu\right)^{1/q} \leq I_1^{-1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\mu\right)^{1/p}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

定理の証明に戻ろう。残された問題は $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathcal{D}^{m,p}$ のとき $\alpha \equiv \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \in [0, 1]$ が 1 となることを示すことである。まず $\alpha = 0$ としよう。このとき $u \equiv 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} d\mu = I_1 \int_{\mathbb{R}^N} d\nu = 1$ から上の lemma の③が使え $\nu = \delta_{x_0}$ となる。一方 Q_nの定義より $Q_n(1) \geq \int_{|x-x_0|\leq 1} |u_n|^q dx$ を得るが、左辺は$\frac{1}{2}$

であり、右辺は $\nu=\delta_{x_0}$ より $n\to\infty$ で 1 に収束するので矛盾である。次に $0<\alpha<1$ としよう。このとき (2.7) より

$$1=\int_{\mathbb{R}^N}d\nu=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q dx+\sum_{j\in J}\nu_j=\alpha+\sum_{j\in J}\nu_j$$

また (2.8) より

$$I_1=\int_{\mathbb{R}^N}d\mu\geqq\int_{\mathbb{R}^N}|D^m u|^p dx+I_1\sum_{j\in J}\nu_j^{p/q}$$
$$\geqq I_\alpha+\sum_{j\in J}I_{\nu_j}$$

を得るが、これは劣加法性 (2.3) に反する。以上により定理は証明された。

上に紹介した Concentration compactness argument はかなり一般性をもつもので、種々の不等式における Best constant を実現する問題、山部の問題に代表される非線形楕円型方程式の解の存在問題等に応用されている。

2nd concentration compactness lemma からわかる様に、関数列 $\{u_n\}$ の $\|D^m u_n\|_{L^p}$ を制御すれば、$|u_n|^q$ は高々可算個の点にのみ集中していくという現象は大変興味深いものである。次節以降紹介する 2-D Euler 方程式の場合は $N=2$, $m=1$, $p=1$, $q=2$ で D^1u_n の一部を制御したとき $|u_n|^2$ はどんな集合の上に集中するかを解析したものである。

§3 2次元 Euler 方程式の近似解列

2次元非粘性非圧縮流体の流れを記述する Euler 方程式は次の様に表される。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v = -\nabla p \qquad x \in \mathbb{R}^2,\ t>0 \tag{3.1}$$
$$\mathrm{div}\, v = 0$$
$$v(x,0) = v_0(x),\ \mathrm{div}\, v_0 = 0$$

ここで v は流速場、p は圧力を表わす。この方程式について十分滑らかな初期データから出発すれば、解は大域的に一意に存在することが知られている。近年、理論的な面からも数値計算の面からも数学者の関心を引いているのは、vortex sheet の時間発展を解析する問題で、初期データ v_0 に対応する渦度 $\omega_0 = \mathrm{curl}\, v_0$ が Radon measure の場合である。

まず 2-D Euler 方程式の弱解の定義を与えよう。

<u>定義 3.1</u> $v \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2\times(0,\infty))$ が 2-D Euler 方程式 (3.1) の弱解であるとは すべての $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2\times(0,\infty))$, $\mathrm{div}\,\Phi = 0$ に対して

$$\iint (\Phi_t \cdot v + \nabla\Phi : v\otimes v)\, dx dt = 0 \tag{3.2A}$$

かつ v は弱い意味で非圧縮、即ち、すべての $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2\times(0,\infty))$ に対して

$$\iint \nabla\psi \cdot v\, dx dt = 0 \tag{3.2B}$$

が成り立つことを言う。ただし $\nabla\Phi = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\right)$, $v\otimes v = (v_i v_j)$ Matrix $A=(A_{ij})$, $B=(B_{ij})$ に対して $A : B = \sum_{i,j} A_{ij}B_{ij}$ を表わす。

これらを考慮して 2-D Euler 方程式 (3.1) の近似解列の定義を与えよう。

<u>定義 3.2</u> 滑らかな流速場 $v^\varepsilon(x,t)$ の列が 2-D Euler 方程式

(3.1)の近似解列であるとは、次が成り立つことを言う。

(1) v^εは非圧縮 即ち $\mathrm{div}\, v^\varepsilon = 0$

(2) v^εは一様に有界な局所運動エネルギーを持つ。即ち

(3.3) $$\max_{0\leq t\leq T}\int_{|x|\leq R} |v^\varepsilon(x,t)|^2 dx \leq C(R)$$

(3) 対応する渦度$\omega^\varepsilon = \mathrm{curl}\, v^\varepsilon$ はL^1で一様有界である。

(3.4) $$\max_{0\leq t\leq T}\int_{\mathbb{R}^2} |\omega^\varepsilon(x,t)|\, dx \leq C$$

(4) ある$L>0$に対し v^εはSobolev空間$H^{-L}_{loc}(\mathbb{R}^2)$で一様にLipschitz連続かつ v^εは2-D Euler方程式(3.1)に弱い意味でconsistentである。即ち、すべての$\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2\times(0,\infty))$, $\mathrm{div}\,\phi = 0$に対して

(3.5) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint(\phi_t\cdot v^\varepsilon + \nabla\phi : v^\varepsilon\otimes v^\varepsilon)\, dx dt = 0$$

このような近似解列は次の様な方法で作り出される。

(1) 初期データの平滑化

(2) 2-D Navier-Stokes方程式の解のzero diffusion limit

(3) 計算渦力学の計算アルゴリズム

近似解列に対して次の事を示すのは難しくない。

ある部分列v^εと流速場$v\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2\times(0,\infty))$が存在して

(3.6) $$\|v^\varepsilon - v\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \quad , 1\leq p<2$$
$$v^\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

ただしΩは$\{(x,t)\,;\, |x|\leq R,\ 0<t<T\}$の形の有界領域を表わす。こうして2-D Euler方程式(3.1)の解の候補は得られる

が v^εはL^2で弱収束しかしていないため、$\iint \nabla\phi : v^\varepsilon\otimes v^\varepsilon dxdt$ が $\iint \nabla\phi : v\otimes v dxdt$ に収束することは期待できない。実際、この極限過程でエネルギーの集中が起こり得ることを具体的な例で見ておこう。

$r=(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ とする。$\omega(r)$をrの滑らかな関数とするとき、

(3.7) $$v(x) = r^{-2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}\int_0^r s\omega(s)ds$$

で与えられる v は 2-D Euler方程式の解となることはよく知られている。ωを

(3.8) $$\int_0^\infty s\omega(s)ds = 0$$

となる様にとり、v^εを

(3.9) $$v^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

とおくと、v^εも 2-D Euler方程式の解となる。このとき、次の事実は容易に示される。

(3.10) $$\int |v^\varepsilon|^2 dx \leq C$$

$$v^\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad in\ L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$\int |\omega^\varepsilon| dx \leq 2\pi\int_0^\infty s\,|\omega(s)|\,ds$$

$$\omega^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad in\ M(\mathbb{R}^2)$$

$$v^\varepsilon\otimes v^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} C_0\,\delta(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad in\ M(\mathbb{R}^2)$$

ここで $$C_0 = \pi\int_0^\infty \frac{\left(\int_0^r s\omega(s)ds\right)^2}{r}dr$$

この例では、エネルギーは原点にのみ集中し、弱極限は恒等的に0で2-D Euler方程式を満たしている。

次に γ次元Hausdorff測度の定義を思い出しておこう。

$E \subset \mathbb{R}^N$, $\gamma > 0$, $r > 0$ とする。γ次元Hausdorff premeasureは

$$(3.11) \qquad H_r^\gamma(E) = \inf\left\{ \sum_j r_j^\gamma \; ; \; E \subset \bigcup_j B_j \; , \; r_j \leq r \right\}$$

ここで $\{B_j\}$ は開球による E の可算被覆で r_j は開球 B_j の半径を表わす。E の γ次元 Hausdorff測度は次式で与えられる。

$$(3.12) \qquad H^\gamma(E) = \lim_{r\to 0} H_r^\gamma(E) = \sup_{r>0} H_r^\gamma(E)$$

$\inf\{\gamma ; H^\gamma(E) = 0\}$ を E の Hausdorff次元と呼ぶ。

2-D Euler方程式(3.1)に対する近似解列のエネルギー集中の様子については次の結果がある。

<u>定理3.1</u>　2-D Euler方程式(3.1)に対する任意の近似解列 $\{v^\varepsilon\}$ は次の性質を持つ部分列を持つ。

任意の $\gamma > 1$ をとる。任意の正数 r に対して集合 $F_r \subset \Omega$ が存在して、

$$H_r^\gamma(F_r^c) \leq C$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{F_r} |v^\varepsilon - v|^2 \, dx\,dt = 0$$

が成り立つ。ここで F_r^c は F_r の Ω における補集合、C は r に無関係な定数である。

上の事実をエネルギーは高々 Hausdorff次元1の集合に集中すると表現する。

さて、前の例でもわかる様に近似解列のエネルギーが集中

するにも拘らず、その弱極限が2-D Euler方程式の弱解になることもある。この現象をconcentration-cancellationと呼ぶ。concentration-cancellationについては次の結果がある。

<u>定理3.2</u>　2-D Euler方程式(3.1)の近似解列$\{v^\varepsilon\}$のエネルギー集中がHausdorff次元1未満の集合で起こるならば、即ち、ある$\gamma<1$とΩの部分集合の族$\{F_r ; r>0\}$が存在して、

$$H_r^\gamma(F_r^c) \leqq C \quad (C \text{はrに無関係})$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{F_r}|v^\varepsilon - v|^2 dx dt = 0$$

となっているならば、v^εの弱収束極限vは2-D Euler方程式の弱解である。

以下の節で定理3.1と定理3.2の証明の概略を与える。

§4　定理3.1の証明の概略

目標は　近似解列$\{v^\varepsilon\}$のL^p $(p>2)$ノルムが一様有界である様な集合F_rの構成とそのγ次元Hausdorff測度の評価である。これができれば、v^εはvにL^1収束しているので、補間定理によりL^2-収束することがわかる。この鍵を握るのが、radial distribution functionとRiesz potentialである。

一般にωを$\mathbb{R}^N$上の非負Borel測度とする。ωのradial distribution function $\omega(s,x)$は次式で定義される。

(4.1)　　$\omega(s,x) = \omega(B_s(x))$

ここで$B_s(x)$はxを中心とする半径sの開球を表わす。

(4.2) $$E=\{x\,;\,\omega(s,x)\leq Ks^{\delta}\ \text{for}\ 0\leq s\leq \tfrac{r}{5}\}$$

とおこう。このとき次の Covering lemma より

(4.3) $$H_r^{\delta}(E^c)\leq 5^{\delta}K^{-1}\,TM\omega$$

を得る。ここで $TM\omega$ は ω の Total mass を表わす。

補題4.1 (Covering lemma)

R^N の有界集合に含まれる開球の族 $\{B_{r_\alpha}$ (r_α は B_{r_α} の半径)$\}$ を考える。このとき可算個の互いに交わらない B_{r_j} を選んでその半径を5倍にすると元の族を覆うようにできる。即ち

(4.4) $$\bigcup_{\alpha} B_{r_\alpha}\subset \bigcup_{j} B_{5r_j}$$

非負 Borel 測度の族に対して適当な部分列をとれば必要な集合 F_r が共通に取れる事は次の定理で保障される。

定理4.1 Total mass $TM\omega$ が一様有界な非負 Borel 測度の族を考える。δ,γ を $\delta>0$, $\gamma>N\delta$ となるようにとり固定する。このとき、部分列 $\{\omega_k\}$ が存在し、次の性質を持つ。

任意の正数 r に対し、閉集合 F_r が存在して

(4.5) $$F_r\subset\{x\,;\,\omega_k(s,x)\leq Ks^{\delta},\ 0\leq s\leq 1,\ k\geq \tfrac{1}{r}\}$$

かつ その補集合 F_r^c の γ 次元 Hausdorff premeasure は

(4.6) $$H_r^{\gamma}(F_r^c)\leq C(\delta,\gamma)$$

を満たす。ここで $K=c+cr^{-\delta}$ で c は定数である。

この定理を示すために ω に対する Riesz potential

(4.7) $$\phi(x)=\int_{R^N}\frac{1}{|x-y|^{\delta}}\,d\omega(y)$$

を考える。このとき、閉集合F_rが存在して

(4.8) $$\phi_k(x) \leqq K \quad \text{for } k \geqq \frac{1}{r},\ x \in F_r$$

となれば、

$$s^{-\delta}\omega_k(s\ x) \leqq \int_{B_s(x)} \frac{1}{|x-y|^{\delta}}\,d\omega_k(y) \leqq \phi_k(x) \leqq K$$

より(4.5)が導かれる。従ってϕ_kが一様有界である様な集合の大きさを評価してやればよい。そのためにChebyschevの不等式、Egoroffの定理の類似を考える。その具体的な形を与える前に*Riesz potential*がどの空間に属すかみておこう。$\hat{\phi}$はϕのFourier変換を表わすとする。D^sを

(4.9) $$\widehat{D^s\phi} = |\xi|^s\hat{\phi}$$

で定義される作用素とする。このとき、もし$\delta+s<N$なら

(4.10) $$D^s\phi = \int \frac{1}{|x-y|^{\delta+s}}\,d\omega(y)$$

となる。更にJensenの不等式を利用すると

(4.11) $$|D^s\phi(x)|^p \leqq C\int \frac{1}{|x-y|^{(\delta+s)p}}\,d\omega(y)$$

を得る。従って$(\delta+s)p<N$ならば$D^s\phi \in L^p$となる。以上を考慮するとR^Nのある有界集合に台を持ち一様有界なtotal massを持つBorel測度の族の*Riesz potential*は$W^{1,p}$のCompact集合になる。ここで$p>1$は$(1+\delta)p<N$なる実数である。

以下$W^{1,p}$ $(p<N)$においてChebyschevの不等式、Egoroffの定理に類似の結果を与え、$W^{1,p}$の収束列に対し、適当な部

分列が十分大きな集合上で一様収束することを示す。

定理4.2 (Chebyschevの不等式)

$1 \leqq p < N$, $\varepsilon > 0$, $\gamma = N - p + \varepsilon > 0$とする。このとき、ある定数 $C = C(N, p, \varepsilon)$が存在して次の不等式が成り立つ。

(4.12) $$H^{\gamma}_{r(\theta)}(\{x; |f| \geqq \lambda\}) \leqq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^p dx$$

for all $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$。ここで

$$\theta = \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \alpha = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^p dx\right)^{1/p}$$

$$r(\theta) = c\,\theta^{q/N}, \quad q = Np/(N-p) \quad (c\text{は普遍定数})$$

注意 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$は対応するLebesgue関数で置き換えておくものとする。即ち、xをfのLebesgue pointとするとき$f(x)$は付随するLebesgue value、その他の点では$f(x) = 0$をとる。

証明。

(4.13) $$A = \{x; |f| \geqq \lambda\}$$

(4.14) $$D = \{x; r^{-\gamma}\int_{B_r(x)} |\nabla f|^p dy \geqq M \text{ for some } r, 0 < r \leqq r_0\}$$

とおく。M, r_0を適当にとることにより、$A \subset D$となることを示す。Covering lemmaにより

(4.15) $$H^{\gamma}_{5r_0}(D) \leqq CM^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^p dx$$

となることに注意しておく。

まず、fのLebesgue point xにおいて$f(x)$を次の形の和で表現する。

(4.16) $$f(x) = f_0(x) + \sum_{j=0}^{\infty} (f_{j+1}(x) - f_j(x))$$

ただし、

(4.17) $$f_j(x) = \fint_{B_j} f(y)\,dy \quad (\fint_{B_j} \text{は } B_j \text{ における平均値})$$

$$B_j = B_{r_j}(x), \quad r_j = 2^{-j} r_0$$

である。

(4.18) $$|f_{j+1} - f_j| \leq 2^N \fint_{B_j} |f - f_j|\,dy$$

に注意すると、(4.16)と Poincaré 不等式により

(4.19) $$|f(x)| \leq |f_0(x)| + 2^N \sum_{j=0}^{\infty} r_j \left\{ \fint_{B_j} |\nabla f|^p dy \right\}^{1/p}$$

を得る。

$z \in A$, $z \notin D$ となる f の Lebesgue point z が存在したとする。このとき

$$\fint_{B_r(z)} |\nabla f|^p dy \leq M r^{-p+\varepsilon} \quad \text{for } 0 < r \leq r_0$$

なので、(4.19)より

(4.20) $$\lambda \leq |f_0(z)| + 2^N M^{1/p} \sum_{j=0}^{\infty} r_j^{\varepsilon/p}$$

$|f_0(z)|$ を評価しよう。

(4.21)
$$\begin{aligned} |f_0(z)| &= \left| \fint_{B_0} f\,dy \right| \\ &\leq \left\{ \fint_{B_0} |f|^q dy \right\}^{1/q} \\ &\leq r_0^{-N/q} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |f|^q dy \right\}^{1/q} \\ &\leq c_1 r_0^{-N/q} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^p dy \right\}^{1/p} = c_1 r_0^{-N/q} \alpha \end{aligned}$$

ここで c_1 は普遍定数，$B_0 = B_{r_0}(z)$ である。

(4.22) $$c_2 = 2^N \sum_{j=0}^{\infty} r_j^{\varepsilon/p}$$

とおけば、(4.20)(4.21)より

(4.23) $$\lambda \leqq c_1 r_0^{-N/q} \alpha + c_2 M^{1/p}$$

を得る。しかるに

(4.24) $$r_0 = (3c_1\theta)^{q/N}, \quad M = (3c_2)^{-p}\lambda^p$$

とおけば、(4.23)は成立せず $A \subset D$ がわかる。以上により定理が示された。

上の Chebyschev の不等式より、次の Egoroff の定理の $W^{1,p}$ 判が得られる。

<u>定理4.3</u> $f_i \to f$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leqq p < N)$ とする。このとき部分列 f_k が存在して次の性質を持つ。

任意の正数 ε に対して Borel 集合の増大列 $\{P_j\}$ が存在し各 P_j 上 f_k は f に一様収束するとともに、P_j^c の γ 次元 Hausdorff premeasure は 0 に収束する。ただし $\gamma = N - p + \varepsilon$。即ち、

(4.25) $$P_{j+1} \supset P_j \quad H^{\gamma}_{r_j}(P_j^c) \leqq a_j, \quad r_j \to 0, \ a_j \to 0$$

となる。

<u>注意</u> $r_j \to 0$, $a_j \to 0$ は前もって任意に選んでおける。

証明

$$A_{s,k} = \{x ; |f_s(x) - f(x)| \leqq \tfrac{1}{k}\}$$

$$D_{m,k} = \bigcap_{s \geqq m} A_{s,k}$$

とおく。このとき、

$$U = \bigcap_{k \geq k_0} D_{m(k),k}$$

の形の集合上で f_i は一様収束することに注意する。

(4.26) $$U^c = \bigcup_{k \geq k_0} F_k, \quad F_k = \bigcup_{s \geq m(k)} A^c_{s,k}$$

の γ 次元 Hausdorff premeasure を評価しよう。

$$\alpha_m = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_m - \nabla f|^p dy \right\}^{1/p}$$

とおく。$\lambda = \frac{1}{k}$, $\theta = \frac{\alpha_s}{\lambda} = k\alpha_s$ として Chebyschev 不等式を使うと、

$$H^\gamma_{\bar{r}_s}(A^c_{s,k}) \leq C k^p \alpha_s^p, \quad \bar{r}_s = r(\theta) = r(k\alpha_s)$$

を得る。ここで f_i の部分列をとり α_m が単調非増加列となる様にすると、$\bar{r}_s$ は単調非増加となることから

$$H^\gamma_{\bar{r}_m}(A^c_{s,k}) \leq H^\gamma_{\bar{r}_s}(A^c_{s,k}) \leq C k^p \alpha_s^p, \quad s \geq m$$

を得る。従って Hausdorff premeasure の劣加法性から

(4.27) $$H^\gamma_{\bar{r}_m}\left(\bigcup_{s \geq m} A^c_{s,k}\right) \leq C k^p \sum_{s \geq m} \alpha_s^p$$

となる。更に f_i の部分列を選んで

$$\sum \alpha_s^p < \infty$$

となる様にし、$m(k)$ をうまく選んで (4.27) の右辺が総和可能、例えば

$$k^p \sum_{s \geq m(k)} \alpha_s^p \leq 1/k^2$$

にする。($m(k)$ は増大列になる様選ぶ。) このとき

$$H^\gamma_{r_j}(F_k) \leq H^\gamma_{r_k}(F_k) \leq c/k^2 \quad (j \leq k)$$

ただし $r_k = r(k\alpha_{m(k)})$ である。j を固定し k について加えあわせると

$$H^{\delta}_{r_j}\Big(\bigcup_{k\geqq j} F_k\Big) \leqq c\sum_{k\geqq j}\frac{1}{k^2} \leqq \frac{c}{j}$$

となる。従って

$$P_j^{c} = \bigcup_{k\geqq j} F_k$$

として P_j をとればよい。

以上により $\mathbb{R}^2$ 上の Total mass が一様有界な Borel 測度の列 $\{\omega_i\}$ に対し、適当な部分列 $\{\omega_k\}$ をとれば 十分大なる K に対し $\bigcap_k \{x\,;\ \omega_k(s, x) \leqq Ks^{\delta},\ 0\leqq s\leqq 1\}$ は十分大きな集合であることがわかった。次に流速場の L^p 評価を与える。

$\delta > 0$、$p = 2 + \delta/(1-\delta)$、

$$\sigma_F(\lambda) = H^2(\{x\in F\,;|v|\geqq \lambda\})$$

とする。

<u>定理4.4</u> ω を $\operatorname{supp}\omega \subset B_1(0)$, $TM\omega \leqq 1$ なる $\mathbb{R}^2$ 上の Borel 測度とする。もしすべての $x\in F$ に対し

(4.28) $$\omega(s, x) \leqq Ks^{\delta},\quad 0\leqq s\leqq 1$$

ならば

(4.29) $$\lambda\,\sigma_F(\lambda)^{1/p} \leqq c\delta^{-1} + cK$$

である。ただし v は渦度 ω を与える流速場である。即ち、

(4.30) $$v = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{|x-y|}\begin{pmatrix}-(x_2-y_2)\\ x_1-y_1\end{pmatrix}d\omega(y)$$

<u>注意</u> (4.29) は v が Marcinkiewicz 空間 M^p_F に属している事を示す。また $M^p_F \subset L^q(F)$ $(p>q)$ は容易にわかる。

証明. $A_k=\{x\,;\,\omega(s,x)\leqq ks^{1+\delta},\ 0\leqq s\leqq 1/k\}$ とおく。

このとき部分積分により、$x\in A_k$ に対し

$$
\begin{aligned}
|v(x)| &\leqq c\int|x-y|^{-1}d\omega(y)=c\int_0^1 s^{-1}d\omega(s,x)\\
&=c\omega(1,x)+c\int_0^1 s^{-2}\omega(s,x)\,ds\\
&\leqq c+ck\int_0^{1/k}s^{-1+\delta}ds+c\int_{1/k}Ks^{-2+\delta}ds\\
&\leqq c+dk^{1-\delta}
\end{aligned}
$$

を得る。ここで $d=c\delta^{-1}+cK$。k を

$$2c+dk^{1-\delta}=\lambda$$

となる様に選ぶと $\{x\,;\,|v|\geqq\lambda\}\subset A_k^c$ となる。従って

$$\sigma_F(\lambda)=H^2(\{x\in F\,;\,|v|\geqq\lambda\})\leqq H^2(A_k^c)$$

となる。一方、A_k の定義と Covering lemma より

$$H^{1+\delta}_{5/k}(A_k^c)\leqq c/k$$

すなわち A_k^c の開球被覆 $\{B_j\}$ が存在して $\sum r_j^{1+\delta}\leqq c/k$, $r_j\leqq k/5$ となっている。従って、

$$
\begin{aligned}
\sigma_F(\lambda)&\leqq\sum H^2(B_j)=c\sum r_j^2=c\sum r_j^{1-\delta}r_j^{1+\delta}\\
&\leqq ck^{-2+\delta}\leqq c\lambda^{-p}
\end{aligned}
$$

を得る。

以上により、次のことが示された。

定理4.5 正数δ, γ を $\gamma>2\delta$ としよう。$2<p<2+\delta/(1-\delta)$ とする。$\{v^\varepsilon\}$ を 2-D Euler 方程式(3.1)の近似解列とするとき、次の性質を持つ部分列 $\{v_k\}$ が存在する。

すべての $t\in[0,T]$ と $r>0$ に対して Borel 集合の族 $\{F_r(t)\}$ が存在して

(4.31) $$H_r^\gamma(F_r^c(t))\leqq C$$

(4.32) $$\|v_k(\cdot,t)\|_{L^p(F_r(t))}\leqq C$$

となる。ここで C は t, r, v_k によらない定数である。

近似解列 $\{v^\varepsilon\}$ は負の Sobolev 空間 H^{-L} 上で Lipschitz 連続であるから、補間不等式により、ある $1<q<2$ と $0<\alpha<1$ に対して

(4.33) $$\|v_k(\cdot,t_1)-v_k(\cdot,t_2)\|_{L^q}\leqq C\,|t_1-t_2|^\alpha$$

$t_1, t_2\in[0,T]$ となることに注意しておく。

定理3.1 は次の定理から直ちに得られる。

定理4.6　2D-Euler 方程式 (3.1) の近似解列 $\{v_k\}$ が定理4.5 の性質 (4.31), (4.32) を満足しているとする。このとき $q<s<p$ に対して、時空領域 $\Omega=\{(x,t);|x|\leqq R, 0\leqq t\leqq T\}$ の Borel 集合 G_r $(r>0)$ が存在して、

(4.34) $$H_r^{\gamma'+1}(G_r^c)\leqq C\qquad(\gamma'>\gamma)$$

(4.35) $$\|v_k\|_{L^s(G_r)}\leqq C$$

となる。

証明. (4.32), (4.33) は v_k に無関係に成り立つので以下添字 k は省略する。G_r は後で選ぶものとして

(4.36) $$\sigma(\lambda)=m_3(\{(x,t)\in G_r\,;\,|v(x,t)|\geqq\lambda\})$$

$$(4.37)\qquad f(t,\lambda)=m_2(\{x\in G_r(t)\ ;\ |v(x,t)|\geqq\lambda\})$$

とおく。ここで、m_3, m_2 はそれぞれ3次元および2次元のLebesgue測度を、$G_r(t)$はG_rの時刻tにおける断面を表わす。このとき、$\Delta_n t=2^{-n-1}T$、$t_j^n=(2j-1)\Delta_n t$ $(1\leqq j\leqq 2^n)$、$I_j^n=\{t\ ;\ |t-t_j^n|\leqq\Delta_n t\}$とすると、

$$(4.38)\qquad \sigma(\lambda)=\int_0^T f(t,\lambda)dt\leqq\sum_j 2\sup\{|f(t,\lambda)|\ ;\ t\in I_j^n\}\cdot\Delta_n t$$

を得る。これを考慮してG_rを次の様に選ぶ。

$$(4.39)\qquad G_r^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^n}F_r^c(t_j^n)\times I_j^n\quad ,\text{すなわち}$$

$$(4.40)\qquad G_r(t)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{F_r(t_j^n)\ ;\ t\in I_j^n\}$$

まず$H_r^{\gamma'+1}(G_r^c)$を評価しよう。そのためにHausdorff premeasureと同値なcylindrical Hausdorff premeasure $H_r^{\tau,\pi}$を利用する。cylindrical Hausdorff premeasure $H_r^{\tau,\pi}$は任意の集合Eに対して

$$(4.41)\qquad H_r^{\tau,\pi}(E)=\inf\{\sum_j r_j^{\tau}h_j^{\pi}\ ;\ E\subset\bigcup B_{r_j}\times B_{h_j},\ r_j,h_j\leqq r\}$$

で定義される。このとき、ある普遍定数Cが存在して

$$(4.42)\qquad H_r^{\tau+\pi}(E)\leqq C H_r^{\tau,\pi}(E)$$

となる。$\gamma'=\gamma+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$とする。

$$H_r^{\gamma}(F_r^c(t_j^n))\leqq C$$
$$H_r^{1+\varepsilon}(I_j^n)\leqq(2^{-n})^{1+\varepsilon}$$

に注意すると、

(4.43) $\qquad H_r^{\gamma,1+\varepsilon}(G_r^c) \leqq C$

となることがわかる。(4.42),(4.43)より(4.34)が得られる。

次に $\sigma(\lambda)$ を評価しよう。(4.32),(4.33)と通常のChebyschevの不等式により、

$$
\begin{aligned}
f(t,\lambda) &\leqq m_2(\{x\in F_r(t_j^n)\,;\,|v(x,t)|\geqq\lambda,\ t\in I_j^n\}) \\
&\leqq m_2(\{x\in F_r(t_j^n)\,;\,|v(x,t_j^n)|\geqq \tfrac{\lambda}{2}\}) \\
&\quad + m_2(\{x\in F_r(t_j^n)\,;\,|v(x,t)-v(x,t_j^n)|\geqq \tfrac{\lambda}{2},\ t\in I_j^n\}) \\
&\leqq C\lambda^{-p} + C(\Delta_n t)^{\alpha\delta}\lambda^{-\delta}
\end{aligned}
$$

n に任意であるので(4.38)を考慮すると

(4.44) $\qquad \sigma(\lambda) \leqq C\lambda^{-p}$

の形の評価を得る。これは $v\in M_{G_r}^p$ を示している。従って任意の $s<p$ に対して $v\in L^s(G_r)$ を得る。

<u>注意</u> 原論文[4]ではこの定理の証明があいまいで、結論は $H_r^{\gamma+1}(G_r^c)\leqq C$ となっている。

§5 定理3.2の証明の概略

証明の方針は同じなので、定常問題

(5.1) $\qquad \operatorname{div} v^\varepsilon\otimes v^\varepsilon = f^\varepsilon$

を考えよう。ここで $f^\varepsilon \rightharpoonup f$ in $\quad$, $v^\varepsilon \rightharpoonup v$ in L^2 とする。さらに $\gamma<1$ が存在して次の様になっているものとする。

任意の $r>0$ に対して R^2 のBorel集合 F_r が存在して

(5.2) $\qquad H_r^{\gamma}(F_r^c) \leqq C$

(5.3) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{F_r}|v^\varepsilon - v|^2 dx = 0$$

となる。ここでCはrに無関係な定数である。問題は局所的なので v^εはある compact 集合上に台をもつとする。示すべきことは、任意の$\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{div}\,\phi=0$ に対して

(5.4) $$\int \nabla\phi : v\otimes v\, dx = -\int \phi\cdot f\, dx$$

が成り立つことである。ポテンシャル関数ηを用いて

(5.5) $$\phi = \left(\frac{-\partial\eta}{\partial x_2}, \frac{\partial\eta}{\partial x_1}\right)$$

と表わすと (5.4) の左辺は

(5.6) $$\iint\left\{\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial x_2}(v_2^2 - v_1^2) + \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}\right)v_1 v_2\right\}dx_1 dx_2$$

となる。Fourier 分解

$$\eta = \int e^{ix\cdot\xi}\hat\eta(\xi)\,d\xi$$

を考慮すると ηは一変数関数hを使って

(5.7) $$\eta = h(x\cdot\xi)$$

の形であると仮定できる。さらに (5.6)式が回転に関して不変であることに注意すると $\xi=(1.0)$ として

(5.8) $$\iint h''(x_1)v_1 v_2\, dx_1 dx_2 = \iint h'(x_1) f_2\, dx_1 dx_2$$

を示せばよい。

$F_r^c \subset \bigcup_{j=1}^\infty B_{r_j}$, $\sum_{j=1}^\infty r_j^\gamma \leqq C$, $r_j \leqq r$ とする。I_j を B_{r_j} の x_1軸への射影とすると、区間I_jの長さの総和は

(5.9) $$\sum_{j=1}^\infty |I_j| = \sum_{j=1}^\infty 2r_j = \sum_{j=1}^\infty 2r_j^\gamma r_j^{1-\gamma} \leqq Cr^{1-\gamma}$$

(5.10) $$I_r = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

とおく。χ_rをI_r^cの特性関数(characteristic function)とし

(5.11) $$\tilde{h}(x) = \int^x \int^z \chi_r(s) h''(s)\, ds\, dz$$

とおく。このとき

(5.12) $$\tilde{h}'' = \chi_r h'' \in L^\infty$$

となる。$\tilde{h}(x_1)$をポテンシャルとすると任意の$\varepsilon > 0$に対して(5.8)と類似の式

(5.13) $$\iint \chi_r(x_1) h''(x_1) V_1^\varepsilon V_2^\varepsilon\, dx_1 dx_2 = \iint \tilde{h}'(x_1) f_2^\varepsilon\, dx_1 dx_2$$

を得る。$\{(x_1, x_2); x_1 \in I_r^c\}(\subset F_r)$上で$V^\varepsilon$は$V$に$L^2$-強収束することと、$f^\varepsilon$は$f$に弱収束することに注意すれば

(5.14) $$\iint \chi_r(x_1) h''(x_1) V_1 V_2\, dx_1 dx_2 = \iint \tilde{h}'(x_1) f_2\, dx_1 dx_2$$

を得る。一方(5.9)(5.10)より

(5.15) $$m_1(I_r) \to 0 \quad (r \to 0)$$

従って

(5.16) $$\chi_r \to 1 \quad a.e.$$

を得る。(5.14)と(5.16) Lebesgueの収束定理により(5.8)を得る。以上により、

$$\mathrm{div}\, V \otimes V = f$$

が示された。同様の方針により、非定常問題の場合も証明される。

最後に、一般の近似解列$\{V^\varepsilon\}$の弱極限Vが、2-D Euler

方程式の弱解になるであろうということが予想されていることを付記しておく。

参考文献

[1] Lions, P. L., The concentration-compactness principle in the calculus of variations : the locally compact case. Parts I and II, Ann. Inst. H. Poincaré (1984), 109-145, 223-283.

[2] Lions, P. L., The concentration-compactness principle in the calculus of variations : the limit case, Part I and II, Riv. Mat. Iberoamericana I (1984), 145-201, I (1985), 45-121.

[3] DiPerna, R. and Majda, A., Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow, preprint.

[4] DiPerna, R. and Majda, A., Reduced Hausdorff dimension and concentration-cancellation for two-dimensional incompressible flow, preprint.