数理解析研究所講究録
第647巻 1988年 125-132

H^∞ functional calculus

姫路工業大学　八木厚志　(Atsushi Yagi)

Aを、Banach空間Xに作用する一つのω型($0 \leq \omega < \pi$)線型作用素とする。定義域$\mathcal{D}(A)$はXで稠密、有界な逆A^{-1}が存在すると仮定する。Aのスペクトル集合$\sigma(A)$を含むある角領域で正則有界な関数fに対して、Xの有界作用素$f(A)$が定義できるかどうかについて調べたい。

$0 < \mu \leq \pi$に対して、S_μは角領域

$$S_\mu = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; |\arg \lambda| < \mu \}$$

を表す。$H^\infty(S_\mu)$は、S_μ上で正則有界な関数が作るBanach algebra、$f \in H^\infty(S_\mu)$に対し$\|f\|_\infty = \sup\{|f(\lambda)|; \lambda \in S_\mu\}$とする。Aはω型であることより、$\sigma(A) \subset \overline{S}_\omega$である。$\omega < \mu \leq \pi$に対して考える。$H^\infty(S_\mu)$から$\mathcal{L}(X)$(Xに作用する有界作用素が作るBanach algebra)へのalgebraとしての準同型写像

$$m : H^\infty(S_\mu) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$

で、以下の2つの条件：

i) もし f が、ある Γ について

$$\int_\Gamma |f(\lambda)| \, \|(\lambda - A)^{-1}\| \, |d\lambda| < \infty$$

であるならば、$m(f)$ は

$$m(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} \, d\lambda$$

と一致する。ここで、Γ は S_μ に含まれ $\sigma(A)$ を囲むような積分路を表す。

ii) m は連続である。即ち、

$$\|m(f)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C \|f\|_\infty \qquad f \in H^\infty(S_\mu)。$$

をみたすものが存在するとき、この m のことを、A の S_μ 上における H^∞ *functional calculus* と呼ぶ。以後、f.c. と略記する。上の条件 i) より、このような f.c. は存在すれば、必らず一意的に定まってしまう。その意味で、この $m(f)$ のことを $f(A)$ とも書き表すことは自然なことである。

1．X が Hilbert 空間の場合。

X を Hilbert 空間、A を X の ω 型作用素とする。Hilbert 空間では、f.c. の存在と、様々な条件が同値であることが示される。

定理 A　次の条件は、すべて同値である。

(I) ある $\mu > \omega$ に対して $H^\infty(S_\mu)$ f.c. が存在する。

(II) $A^{iy} \in \mathcal{L}(X)$, $-\infty < y < \infty$ かつ $\sup_{-1<y<1} \|A^{iy}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$。

(III) ある $0 < \alpha, \beta < 1$ について

$$[\mathcal{D}(A), X]_{1-\alpha} \supset \mathcal{D}(A^{\alpha})$$

$$[\mathcal{D}(A^*), X]_{1-\beta} \supset \mathcal{D}(A^{*\beta})$$

ただし、$[Y, X]_{1-\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 1)$ はYとXの補間空間（複素の意味の）である。

(IV) ある $0 < \alpha, \beta < 1$ について

$$\left\{\int_0^\infty \|\lambda^{\alpha} A^{1-\alpha}(\lambda + A)^{-1} f\|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{1/2} \leq M_\alpha \|f\|, \quad f \in X$$

$$\left\{\int_0^\infty \|\lambda^{\beta} A^{*\,1-\beta}(\lambda + A^*)^{-1} g\|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{1/2} \leq M_\beta^* \|g\|, \quad g \in X。$$

証明の要点。(I) ⇒ (II) $-\infty < y < \infty$ について $z^{iy} \in H^\infty(S_\mu)$、$\|z^{iy}\|_{H^\infty(S_\mu)} \leq e^{\mu|y|}$ より明らか。(II) ⇒ (III) A^{iy} は y について強連続群となる。以下、Heinz－加藤の不等式と同様な議論を行なえばよい。(III) ⇒ (IV) Hilbert空間では、複素補間と実補間が同等であるという事実が、証明のポイントになる。(IV) ⇒ (I) $\varphi \in H^\infty(S_\mu)$ とする。形式的計算であるが

$$(\varphi(A)f, g) = (\varphi(A)A^{-(\alpha+\beta)} f, A^{*(\alpha+\beta)} g)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\lambda)\lambda^{-(\alpha+\beta)}((\lambda-A)^{-1}f,\ A^{*(\alpha+\beta)}g)\,d\lambda$$

ここで部分積分して

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \Phi(\lambda)((\lambda-A)^{-2}f,\ A^{*(\alpha+\beta)}g)\,d\lambda$$

$\Phi(\lambda)$ は $\varphi(\lambda)\lambda^{-(\alpha+\beta)}$ の原始関数である。さらに、Γ を負の実軸に近づけると結局

$$|(\varphi(A)f,g)| \leqq C\int_0^\infty \lambda^{1-(\alpha+\beta)}|(A^\alpha(\lambda+A)^{-1}f,\ A^{*\beta}(\lambda+A^*)^{-1}g)|d\lambda$$

$$\leqq C\int_0^\infty \lambda^{1-\alpha}\|A^\alpha(\lambda+A)^{-1}f\|\,\lambda^{1-\beta}\|A^{*\beta}(\lambda+A^*)^{-1}g\|\frac{d\lambda}{\lambda}\ 。$$

詳しい証明は、文献 [1] 及び [3] を参照。

さらに、上の結果は次のように強められる。

定理B　定理Aの条件がみたされれば、次の各条件が成立する。

(I)′ 任意の $\mu > \omega$ に対して、$H^\infty(S_\mu)$ f.c. が存在する。

(II)′ 任意の $\mu > \omega$ に対して

$$\|A^{iy}\| \leqq C_\mu e^{\mu|y|}\ 。$$

(III)′ すべての $0<\theta<1$ について

$$[\mathcal{D}(A), X]_{1-\theta} = \mathcal{D}(A^\theta)$$

$$[\mathcal{D}(A^*), X]_{1-\theta} = \mathcal{D}(A^{*\theta})\ 。$$

(IV)′ すべての $0<\theta<1$ について

$$\left\{\int_0^\infty \|\lambda^\theta A^{1-\theta}(\lambda+A)^{-1}f\|^2\frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{1/2} \leqq M_\theta\|f\|\ ,\quad f\in X$$

$$\left\{\int_0^\infty \|\lambda^\theta A^{*1-\theta}(\lambda+A^*)^{-1}g\|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{1/2} \leqq M_\theta^* \|g\| , \quad g \in X 。$$

実際に上の f.c. を含む条件 (I) ~ (IV) をみたす作用素の例として、次の様な、L^2 空間における偏微分作用素がある。

例1　Ω を $\mathbb{R}^n$ の領域として、Ω における楕円型微分作用素

$$A(x;D) = \sum_{|\alpha|\leqq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha \qquad x \in \Omega$$

と、$\partial\Omega$ 上の境界作用素

$$B_j(x;D) = \sum_{|\beta|\leqq m_j} b_{j\beta}(x) D^\beta \qquad x \in \partial\Omega$$

を考える。この微分作用素、境界作用素の $L^2(\Omega)$ における実現を A と表し、A は ω 型であるとする。係数 a_α , $b_{j\beta}$ が十分滑めらかならば、A は条件

$$[\mathcal{D}(A), L^2(\Omega)]_{1-\theta} = [\mathcal{D}(A^*), L^2(\Omega)]_{1-\theta} \quad , 0 < \theta < 1/4m$$

をみたし、一般に上の条件をみたす作用素は (I) ~ (IV) をみたす。([1] を参照)

係数がもう少し滑らかでない場合の例として、

例2　A は、2 階の楕円型微分作用素

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j \qquad x \in \Omega$$

の、$\partial\Omega$ 上の Dirichlet 境界条件の下での L^2 実現とする。係数

a_{ij} が C^1 級ならば、Aは極大単調作用素となり、極大単調作用素は(I)〜(IV)をみたす。

上の作用素で、a_{ij} の滑らかさがさらに悪くなった場合、例えば、a_{ij} が Hölder 連続ならばどうなるかという問題が残っている。空間の次元 が1の場合には、次のような例がある。

例3 $\mathbb{R}^1$ 上で微分作用素

$$a(x)D^2 \qquad\qquad -\infty < x < \infty$$

を考え、Aをこの作用素の $L^2(\mathbb{R}^1)$ 実現とする。$M \geqq a(x) \geqq \delta > 0$ かつ $a \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$ とすると、Aは(I)〜(IV)をみたす作用素となる。これの証明については、[3]を参照。

2. X が Banach 空間の場合。

Banach 空間では、定理Aはそのままの形では成立しない。実際、条件(II)はみたすが、条件(I)の f.c. が存在しないような例がある。また、条件(IV)に現われた2乗積分の評価式も、一般に、Banach 空間では(たとえ L^p $(p \neq 2)$ 空間であっても)期待できない。

そこで、ここでは、Xを L^p $(1 < p < \infty)$ 空間に限定し、さらに、Littlewood - Paley の理論に従って、いわゆる次のような g - function を考えることにする。Aを $L^p(\Sigma)$ の ω 型作

用素とする。$0<\theta<1$，$\mu>\omega$ に対し

$$g_{\theta,\mu}(\varphi)(x)=\left\{\int_{\Gamma_\mu}|\lambda^\theta A^{1-\theta}(\lambda-A)^{-1}\varphi(x)|^2\left|\frac{d\lambda}{\lambda}\right|\right\}^{1/2},$$

$$x\in\Sigma\ ,\ \varphi\in L^p(\Sigma)$$

$$g^*_{\theta,\mu}(\psi)(x)=\left\{\int_{\Gamma_\mu}|\lambda^\theta A^{*\,1-\theta}(\lambda-A^*)^{-1}\psi(x)|^2\left|\frac{d\lambda}{\lambda}\right|\right\}^{1/2},$$

$$x\in\Sigma\ ,\ \psi\in L^{p'}(\Sigma)$$

と定義する。ここで、Γ_μ は $\infty e^{-i\mu}$ から原点、原点から $\infty e^{i\mu}$ に向う２つの半直線からなる積分路を表す。また、$p'=p/(p-1)$ である。このとき、次のことが成立する。

定理C （I）ある $0<\alpha,\beta<1$，$\mu>\omega$ に対し g-function 評価式

$$\|g_{\alpha,\mu}(\varphi)\|_p\leq C\|\varphi\|_p\ ,\quad \varphi\in L^p(\Sigma)$$

$$\|g^*_{\beta,\mu}(\psi)\|_{p'}\leq C^*\|\psi\|_{p'}\ ,\quad \psi\in L^{p'}(\Sigma)$$

が成立するならば、任意の $\nu>\mu$ に対し $H^\infty(S_\nu)$ f.c. が存在する。一方、逆に

（II）$\mu>\omega$ に対し、$H^\infty(S_\mu)$ f.c. が存在すれば、任意の $\nu>\mu$ に対し上の形の g-function 評価式が成立する。

この定理と類似の結果は、もっと弱い形で［2］によって示

されていた。定理Cは Cowling, McIntosh との共同研究により得られたものである。(I) の証明は、Hilbert 空間の場合と類似の議論による。(II) の証明のポイントは、L^p 空間は次のような "Randamisation" と呼ばれる性質を持っていることである。

補題 T_n, $n=1,2,3,\cdots$, を $L^p(\Sigma)$ に作用する有界作用素の列とする。任意の $a=(a_1, a_2, a_3, \cdots) \in \ell^\infty$ に対し

$$\left\| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n \varphi \right\}(x) \right\|_p \leq C \|a\|_{\ell^\infty} \|\varphi\|_p \quad , \varphi \in L^p(\Sigma)$$

ならば、

$$\left\| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |(T_n \varphi)(x)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \leq C \|\varphi\|_p \quad , \varphi \in L^p(\Sigma)$$

が成り立つ。

参考文献

[1]A.Yagi: Coïncidence entre des espaces d'interpolation et des domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, C. R. Acad. Sc. Paris (Ser. I) 299 (1984), 173-176.

[2]M.Cowling: Square functions in Banach spaces, Proc. Centre Math. Anal. Australian National Univ. 9 (1985), 177-184.

[3]A.McIntosh: Operators which have an H_∞ functional calculus, Proc. Centre Math. Anal. Australian National Univ. 14 (1986), 210-231.