

## 標本数を漸増する補間型積分則の重みの正值性について

福井大工 長谷川武光 (Takemitsu Hasegawa)

名大工 杉浦 洋 (Hiroshi Sugiura)

鳥居 達生 (Tatsuo Torii)

### 1. はじめに

与えられた関数  $f(t)$  に対して, 区間  $[-1, 1]$  上でのチェビシェフ多項式  $T_k(t)$  による  $N$  次補間

$$P_N(t) = \sum_{k=0}^N \alpha_k T_k(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

は,  $f(t)$  が滑らかであればその収束は速い. ここで  $\Sigma''$  は初項と末項のみ  $1/2$  倍して和をとることを意味する. この補間多項式  $P_N(t)$  を用いると, 区間  $[-1, 1]$  上の不定積分  $\int_{-1}^x f(t) dt$ , ( $-1 \leq x \leq 1$ ), や特異関数  $K(t)$  とのいわゆる積型積分

$$Q(f) = \int_{-1}^1 K(t) f(t) dt, \quad (2)$$

に対する積分則  $Q_N(f)$  が容易にえられることが知られている [1], [2], [3]. すなわち (1) を (2) の  $f(t)$  に代入すると  $Q(f)$  に対する積分則

$$Q_N(f) = \sum_{k=0}^N a_k^N \mu_k, \quad (3)$$

がえられる。ここでモーメント  $\mu_k$  は

$$\mu_k = \int_{-1}^1 K(t) T_k(t) dt, \quad (4)$$

で定義され、多くの有用な特異関数  $K(t)$  に対して次数  $k$  に関する漸化式によって容易にその値が求められる [2], [4]。もし  $K(t) = 1$  なら  $Q_N(f)$  はクレンショー-カーチス則 [3] (以下 CC 則と略す) に一致する。

Gentleman [5], [6] は FFT (高速フーリエ変換) を用いてチェビシエフ展開係数  $a_k^N$  を効率的に計算する方法を示し、それを CC 則による自動積分法のプログラムに組込んだ。一般的に、CC 則では収束判定が満足されるまで標本点を再利用しながら、 $N$  を倍々と増し積分の近似値の列が作られる。しかし、このように  $N$  を 2 のべき、 $N = 2^n$  で増大させると標本数が急速に増大しすぎて、要求精度  $\epsilon$  に対して無駄な標本数が多くなり易い。

本論文では、 $N$  を

$$N = 3, 4, 5, \dots, 3 \times 2^n, 4 \times 2^n, 5 \times 2^n, \dots, \quad (n=1, 2, \dots), \quad (5)$$

と、2 のべきより緩く増大させながら補間式の列  $\{P_N(t)\}$  を再帰的に作る方法を示す。さらに、えられた  $P_N(t)$  を用いて

定積分  $\int_{-1}^1 f(t) dt$  に対する積分則 (CC 則の拡張)

$$I_N(f) = \int_{-1}^1 p_N(t) dt = \sum_j w_j^N f(t_j^N) \quad (6)$$

が, (5) の  $N$  に対して全て正の重み  $w_j^N$  を持つことを示す.

ここで  $t_j^N$  は標本点である. 重みが全て正である積分則は数値的に安定な方法である.

重み  $w_j^N$  は標本点の選択に依存する. このため数列  $\{\beta_j\}$  を次で定義する.  $\beta_{-1}=0, \beta_0=1/2$  とし, 初期値  $\beta_1=3/4$  とおいて

$$\beta_{2j} = \beta_j/2, \quad \beta_{2j+1} = \beta_{2j} + 1/2, \quad j=1, 2, \dots, \quad (7)$$

によって  $\beta_j$  ( $j=-1, 0, 1, \dots$ ) を作る. これを用いて標本点  $t_j$  を

$$t_j = \cos 2\pi\beta_j, \quad j=-1, 0, 1, \dots, \quad (8)$$

で定義する.  $\{t_j\}$  は区間  $[-1, 1]$  の両端点を含むので, 積分則  $I_N(f)$  は閉公式になる. 標本点  $\{t_j\}$ , (8) の初めの  $3 \times 2^n + 1$  点または  $4 \times 2^n + 1$  点または  $5 \times 2^n + 1$  点を用いて  $f(t)$  を補間する. ここで標本点  $\{t_j\}$  は補間多項式の次数  $N$  に依存しないことに注意する.  $m+1$  次の補助多項式

$$\omega_{m+1}(t) = 2^m \prod_{j=-1}^{m-1} (t - t_j) \quad (9)$$

を定義し, 第2節で次の定理 1.1 を証明する.

定理 1.1.  $N$  を 2 のべき,  $N = 2^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) とすると

$$\omega_{N+1}(t) = T_{N+1}(t) - T_{N-1}(t) = 2^N \prod_{j=0}^N \left(t - \cos \frac{\pi j}{N}\right), \quad (10)$$

$$\omega_{5N/4+1}(t) = 2 \omega_{N+1}(t) \left\{ T_{N/4}(t) - \cos 2\pi \beta_4 \right\}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \omega_{3N/2+1}(t) &= 2 \omega_{5N/4+1}(t) \left\{ T_{N/4}(t) - \cos 2\pi \beta_5 \right\} \\ &= 2 \omega_{N+1}(t) \left\{ T_{N/2}(t) - \cos 2\pi \beta_2 \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\omega_{2N+1}(t) = 2 \omega_{3N/2+1}(t) \left\{ T_{N/2}(t) - \cos 2\pi \beta_3 \right\} = 2 \omega_{N+1}(t) T_N(t), \quad (13)$$

式(10)より初めの $N+1$ 個の標本点の集合 $\{t_j\}$ , ( $0 \leq j \leq N$ ) は  
CC則で用いられた $\{\cos \zeta_j\}$ に一致することがわかる。こ  
こで $\zeta_j$ を

$$\zeta_j = \pi j / N, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (14)$$

とおく。したがって $N$ 次 $P_N(t)$ , (1), は補間条件

$$P_N(\cos \zeta_j) = f(\cos \zeta_j), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (15)$$

を満足するように決定され, 係数 $a_k^N$ は

$$a_k^N = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N f(\cos \zeta_j) \cos k \zeta_j, \quad (16)$$

となる。

$5N/4$ 次と $3N/2$ 次の補間多項式 $P_{5N/4}(t)$ と $P_{3N/2}(t)$

$$P_{5N/4}(t) = P_N(t) + \sum_{k=1}^{N/4} b_k \left\{ T_{N-k}(t) - T_{N+k}(t) \right\}, \quad (17)$$

$$P_{3N/2}(t) = P_N(t) + \sum_{k=1}^{N/2} B_k \left\{ T_{N-k}(t) - T_{N+k}(t) \right\}, \quad (18)$$

は, それぞれ (11), (12) の零点で  $f(t)$  を補間するように決定される. すなわち, いま  $\xi_j$  と  $\eta_j$  をそれぞれ

$$\xi_j = 8\pi(j + \beta_4)/N, \quad T_{N/4}(\cos \xi_j) - \cos 2\pi\beta_4 = 0, \quad (19)$$

$$\eta_j = 4\pi(j + \beta_2)/N, \quad T_{N/2}(\cos \eta_j) - \cos 2\pi\beta_2 = 0, \quad (20)$$

によって定義する. すると (17), (18) 式の  $b_k$  と  $B_k$  はそれぞれ

$$P_{5N/4}(\cos \xi_j) = f(\cos \xi_j), \quad (21)$$

$$P_{3N/2}(\cos \eta_j) = f(\cos \eta_j), \quad (22)$$

を満足するように決められる. (17) と (18) において  $b_k$  と  $B_k$  の  $N$  への依存性を省略した.

定理 1.2.  $N = 2^n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) とおき (19) と (20) の  $\xi_j$  と  $\eta_j$  を用いて  $\delta_k$  と  $\gamma_k$  をそれぞれ

$$\delta_k = \frac{4}{N} \sum_{j=0}^{N/4-1} f(\cos \xi_j) e^{-ik\xi_j}, \quad (23)$$

$$\gamma_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N/2-1} f(\cos \eta_j) e^{-ik\eta_j}, \quad (24)$$

によって定義すると,  $b_k$  と  $B_k$  は

$$b_{N/4-k} = 2 \cos \pi\beta_1 \cos \pi\beta_2 \left\{ 2 \operatorname{Re} \delta_k - a_k^N - \cos \pi\beta_2 (a_{N/4-k}^N + a_{N/4+k}^N) \right\} - \cos \pi\beta_2 (a_{N/2-k}^N + a_{N/2+k}^N) - (a_{3N/4-k}^N + a_{3N/4+k}^N) / 2, \\ 0 \leq k < N/4, \quad (25)$$

$$B_{N/2-k} = \cos \pi\beta_1 (2 \operatorname{Re} \gamma_k - a_k^N) - (a_{N/2-k}^N + a_{N/2+k}^N) / 2, \\ 0 \leq k < N/2, \quad (26)$$

で与えられる. ここで  $k=0$  のとき, (25), (26) の右辺を  $1/2$  倍する.

式 (11)~(13), (15), (21) と (22) より  $P_{5N/4}(t)$  は  $P_{3N/2}(t)$  に埋込まれ (embedded),  $P_{3N/2}(t)$  は  $P_{2N}(t)$  に埋込まれていることがわかる [7]. 実数型 FFT [8] によって能率的に  $\{\delta_k\}$ ,  $\{\gamma_k\}$ ,  $\{a_k^{2M}\}$  がこの順に計算される.

第3節では, 定理 1.2 を証明する. 第4節では開区間  $(-1, 1)$  でのチェビシエフ補間を既にわれわれが示した標本点列  $\{\cos 2\pi\alpha_j\}$ , [9] に基づいて作る. 第5節でチェビシエフ補間列  $\{P_N(t)\}$ , ここで  $N$  は (5) で与えられる, に基づく積分則 (6) の重み  $w_j^N$  が正であることを閉公式と開公式について示す.

## 2. 標本点列

文献 [9] で与えられた一様分布列  $\{\alpha_l\}$  の性質を簡単に説明する. 正の整数  $l$  を 2 進展開する.

$$l = l_1 + l_2 \cdot 2 + \dots + l_m \cdot 2^{m-1}, \quad (27)$$

ここで  $m = \lceil \log_2 l \rceil + 1$ ,  $l_i = 0$  または  $1$  ( $1 \leq i \leq m-1$ ), そして  $l_m = 1$ .

補題 2.1.  $0$  と  $1$  の間的小数  $\alpha_l$  を

$$\alpha_l = l_1 \cdot 2^{-1} + \dots + l_{m-1} \cdot 2^{-m+1} + 0 \cdot 2^{-m} + l_m \cdot 2^{-m-1}, \quad l_m = 1, \quad (28)$$

で定義すると  $\{\alpha_\ell\}$  は  $(0, 1)$  上に一様分布する。

注意.  $\{\alpha_\ell\}$  は初期値を  $\alpha_1 = 3/4$  の代わりに  $1/4$  とおけば漸化式 (7) を満足する. 数列  $\{\alpha_\ell + 2^{-m-1}\}$  はいわゆる Van der Corput 列 [10] である. 数列  $\{\cos 2\pi\alpha_\ell\}$  は  $(-1, 1)$  上のチェビシエフ分布列である.

補題 2.2.  $N = 2^n$  とおくと, 任意の正の整数  $l$  に対して

$$2^{N-1} \prod_{j=1}^{N-1} (t - \cos 2\pi\alpha_j) = 2^{N-1} \prod_{j=1}^{N-1} (t - \cos \frac{\pi j}{N}) = U_{N-1}(t), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} 2^{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} (t - \cos 2\pi\alpha_{2N+j}) &= 2^{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} \left\{ t - \cos \frac{2\pi}{N} (j + \alpha_\ell) \right\} \\ &= T_N(t) - \cos 2\pi\alpha_\ell, \quad (30) \end{aligned}$$

ここで  $U_k(t)$  は第 2 種チェビシエフ多項式である.

定理 1.1 を証明する前に補題 2.1 のようにして次の補題をうる.

補題 2.3. (27) で表わされる  $l$  に対して小数  $\beta_\ell$  を

$$\beta_\ell = l_1 \cdot 2^{-1} + \dots + l_{m-1} \cdot 2^{-m+1} + l_m \cdot 2^{-m}, \quad l_m = 1, \quad (31)$$

で定義する. ただし  $\beta_{-1} = 0$ ,  $\beta_0 = 1/2$  とおく. すると  $\{\beta_\ell\}$  は  $[0, 1)$  上に一様分布する.

数列  $\{\beta_\ell\}$  は漸化式 (7) を満足することは容易に確かめられる.

系. 数列  $\{\cos 2\pi\beta_\ell\}$  は  $[-1, 1]$  上のチェビシエフ分布列である.

数列  $\{\cos 2\pi \beta_k\}$  は  $\{\cos 2\pi \alpha_k\}$  と密接な関係がある。ちなわ  
ち

補題 2.4.  $N=2^n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) とすると

$$\cos 2\pi \alpha_{N+k} = \cos 2\pi \beta_{2N-k-1}, \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (32)$$

が成立つ。

証明. 正の整数  $l$  に対して, 漸化式 (7) を繰り返し適用し  
て

$$\beta_{lN+k} = (\beta_l + k^*)/N, \quad (33)$$

をうる。ここで  $k^*$  は  $n$  ビット整数  $k$  のビット反転を表わす。  
したがって

$$\begin{aligned} \cos 2\pi \beta_{2N-k-1} &= \cos 2\pi \{\beta_1 + (N-k-1)^*\} / N \\ &= \cos 2\pi (\beta_1 + N-1-k^*) / N \\ &= \cos 2\pi (k^* + 1 - \beta_1) / N \end{aligned}$$

となる。さらに  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$  を用い, (33) 式が  $\{\alpha_k\}$  についても  
成立つことを考慮すると (32) が導かれる。□

系,  $N=2^n$  とすると

$$\{\cos 2\pi \beta_k\} = \{\cos 2\pi \alpha_k\}, \quad 1 \leq k < N. \quad (34)$$

関係 (32) によると  $N$  個の標本点  $\cos 2\pi \beta_{N+k}$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ ,  
は  $\cos 2\pi \alpha_{N+k}$ ,  $k=N-1, \dots, 1, 0$ , と  $k$  の逆順に一致する。

この違いが開公式と開公式の埋込みタイプ<sup>7)</sup>の補間型積分則の  
重みの正值性に重要な役割をもつ。図 1 に標本点  $\{\cos 2\pi \alpha_{N+k}\}$



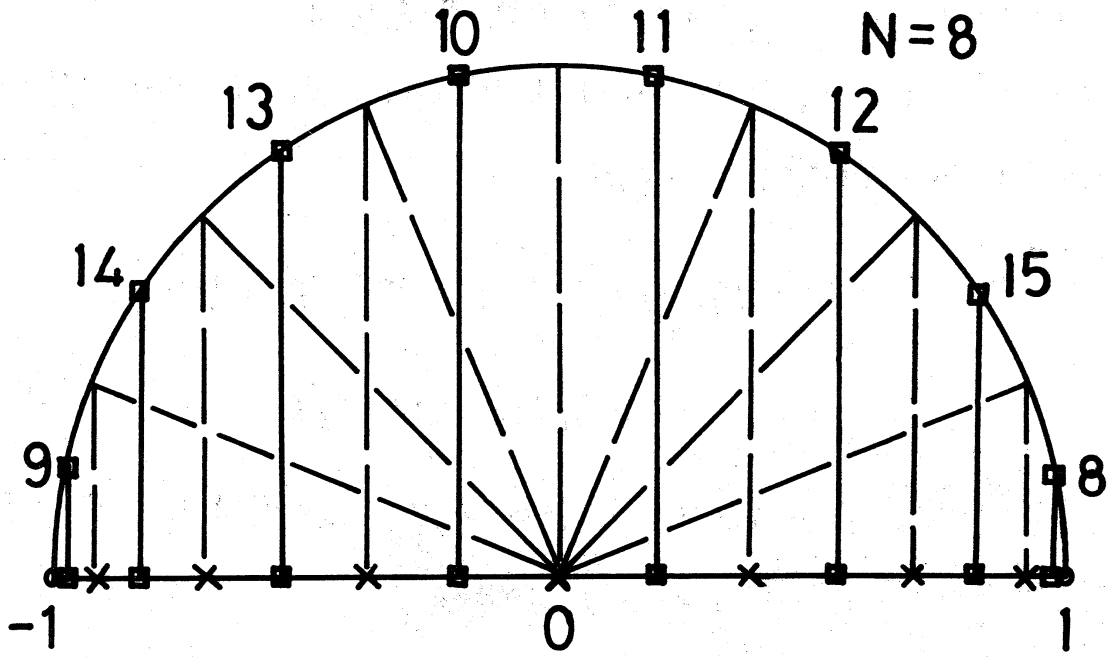


図1.A. 閉公式のための標本点  $\cos 2\pi\alpha_j, j=N, \dots, 2N-1$ , の配置

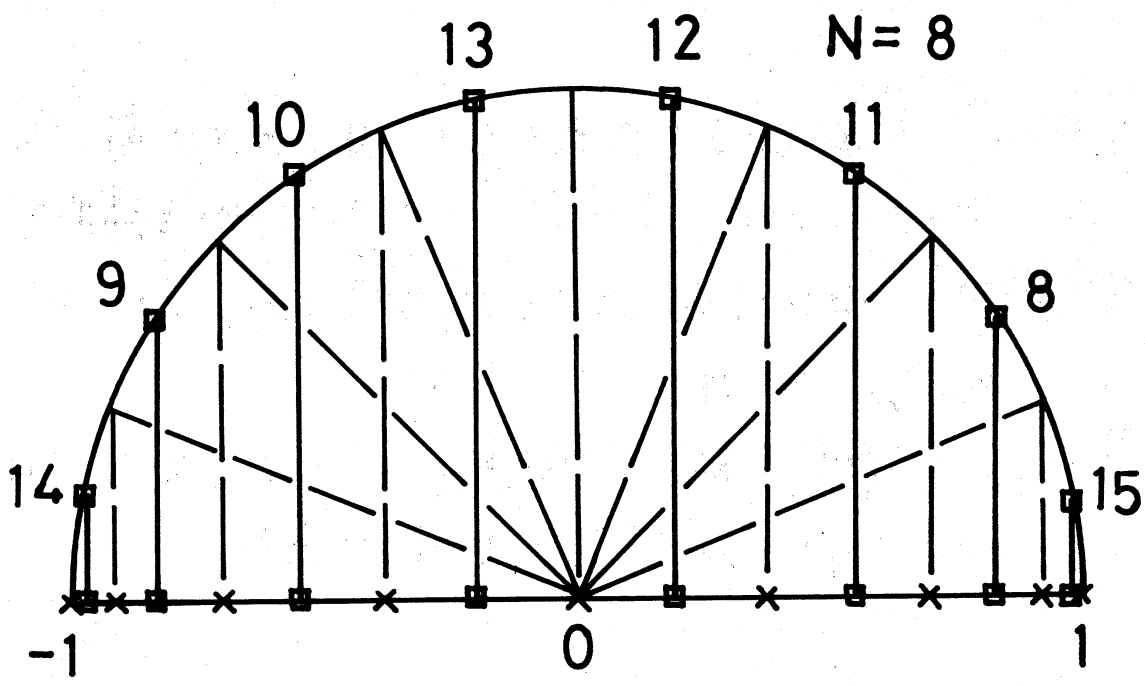


図1.B. 閉公式のための標本点  $\cos 2\pi\beta_j, j=N, \dots, 2N-1$ , の配置

と  $\{\cos 2\pi\beta_{N+k}\}$ , ( $0 \leq k < N$ ) の配置を示す.

定理 1.1 の (10) 式は (29), (34) および  $\cos 2\pi\beta_{-1} = 1$ ,  $\cos 2\pi\beta_0 = -1$  から導かれる. 補題 2.4 と (30) より

$$\begin{aligned} 2^{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} (t - \cos 2\pi\beta_{2N+j}) &= 2^{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} \{t - \cos 2\pi(\beta_2 + j)/N\} \\ &= T_N(t) - \cos 2\pi\beta_2. \end{aligned} \quad (35)$$

これは (11) および (12), (13) の初めの等号を証明する. 第 2 番目の等号は (35) からえられる次の関係

$$T_{2N}(t) - \cos 2\pi\beta_2 = 2 \{T_N(t) - \cos 2\pi\beta_2\} \{T_N(t) - \cos 2\pi\beta_{2N+1}\}, \quad (36)$$

を用いて成立が確かめられる. これで定理 1.1 が全て証明された.

第 5 節で, Filippi 則 [11] の拡張である, 重みが正の開公式の積分則が標本点  $\cos 2\pi\alpha_j$ ,  $j=1, 2, \dots, N-1$ , 上で  $f(t)$  を補間する有限チェビシェフ級数列  $\{P_{N-2}(t)\}$ ,  $N=3 \times 2^n, 4 \times 2^n, 5 \times 2^n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) に基づいて作られることを示す.

標本点  $\{\cos 2\pi\beta_j\}$  を漸化的に計算するアルゴリズムは [9] で示した  $\{\cos 2\pi\alpha_j\}$  に対するものと同じである.

### 3. チェビシェフ係数の計算

偶関数あるいは奇関数のような対称性を有する実数型デー

タに対するFFT [8] を用いると  $\{a_j^N\}$ , (16),  $\{\delta_k\}$ , (23) および  $\{y_n\}$ , (24) すなわちチェビシェフ係数  $\{b_j\}$ ,  $\{B_j\}$  が能率的に計算される。

### 3.1. 定理2.1の証明

初めに(26)を示す。式(1)と(18)において  $t = \cos \theta$  とおくと

(18) から

$$P_{3N/2}(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{N/2} a_k^N \cos k\theta + 2 \sin N\theta \sum_{k=1}^{N/2} B_k \sin k\theta. \quad (37)$$

係数  $B_k$  は補間条件(22)を満足するように決定される。(22)

の右辺を形式的に sine 関数で展開すると

$$f(\cos \eta_j) = \sum_{k=0}^{N/2} C_k \sin k\eta_j. \quad (38)$$

文献[9]から

$$C_k = 2 \operatorname{Re} \gamma_{N/2-k} / \sin 2\pi\beta_2, \quad 1 \leq k \leq N/2, \quad (39)$$

$$C_0 = 0$$

であることが示される。式(22), (37)と(38)より

$$\sum_{k=0}^{N/2} C_k \sin k\eta_j = \sum_{k=0}^{N/2} a_k^N \cos k\eta_j + 2 \sin 2\pi\beta_1 \sum_{k=1}^{N/2} B_k \sin k\eta_j, \quad (40)$$

をうる。関係  $\cos(N-k)\eta_j = \sin 2\pi\beta_1 \sin k\eta_j$  と

$$\cos k\eta_j = \{ \cos 2\pi\beta_2 \sin k\eta_j + \sin(N/2-k)\eta_j \} / \sin 2\pi\beta_2, \quad (41)$$

を(40)に代入し sine 関数の直交性と(39)を用いると(26)の

$B_k$ の表式が導かれる。式(25)の  $b_k$ の導出はもっと複雑になる

が同様に行われる。詳細は省略する。

#### 4. 開区間上の補間

$N=2^n$  と仮定し,  $P_{N-2}(t)$  を標本点  $\{\cos 2\pi\alpha_j\} = \{\cos \pi j/N\}$ ,  $j=1, 2, \dots, N-1$ , で  $f(t)$  を補間する多項式とする。すなわち第 2 種チェビシェフ多項式  $U_k(t)$  を用いて

$$P_{N-2}(t) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k^N U_{k-1}(t), \quad (42)$$

とおくと, 係数  $a_k^N$  は [9] によって

$$a_k^N = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f(\cos \frac{\pi j}{N}) \sin \frac{\pi j}{N} \sin \frac{\pi k j}{N}, \quad (43)$$

となる。  $5N/4-2$  次と  $3N/2-2$  次の補間多項式  $P_{5N/4-2}(t)$  と  $P_{3N/2-2}(t)$  は (17), (18) と同様にして

$$P_{5N/4-2}(t) = P_{N-2}(t) + \sum_{k=0}^{N/4-1} b_k \{U_{N+k-1}(t) + U_{N-k-1}(t)\}, \quad (44)$$

$$P_{3N/2-2}(t) = P_{N-2}(t) + \sum_{k=0}^{N/2-1} B_k \{U_{N+k-1}(t) + U_{N-k-1}(t)\}. \quad (45)$$

定理 4.1.  $N=2^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) とおき  $\gamma_k$  を

$$\gamma_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N/2-1} f(\cos \eta_j) \sin \eta_j e^{-ik\eta_j}, \quad 0 \leq k \leq N/2, \quad (46)$$

で定義する。ここで

$$\eta_j = 4\pi(j+\alpha_2)/N, \quad 0 \leq j \leq N/2-1, \quad (47)$$

すると

$$B_{N/2-k} = (2 \operatorname{Im} \bar{\delta}_k - a_k^N) \cos \pi d_1 + (a_{N/2-k}^N - a_{N/2+k}^N) / 2, \quad 1 \leq k \leq N/2 \quad (48)$$

証明. 3.1節で示した定理 2.1 の (26) の証明と同様である. 詳細は省略する.

定理 4.2.  $N=2^n$  ( $n=3, 4, \dots$ ) とおき  $\delta_k$  を

$$\delta_k = \frac{4}{N} \sum_{j=0}^{N/4-1} f(\cos \xi_j) \sin \xi_j e^{-ik\xi_j}, \quad 0 \leq k \leq N/4, \quad (49)$$

とおく. ここで

$$\xi_j = 8\pi(j + \alpha_4) / N, \quad 0 \leq j \leq N/4 - 1, \quad (50)$$

すると

$$b_{N/4-k} = 2 \cos \pi d_1 \cos \pi d_2 \{ 2 \operatorname{Im} \bar{\delta}_k - a_k^N + \cos \pi d_2 (a_{N/4-k}^N - a_{N/4+k}^N) \} + \cos \pi d_2 (a_{N/2-k}^N - a_{N/2+k}^N) + (a_{3N/4-k}^N - a_{3N/4+k}^N) / 2, \quad 1 \leq k \leq N/4. \quad (51)$$

証明. 省略する.

## 5. 重みが正の補間型積分則

標本点  $\{\cos 2\pi\beta_j\}$  上の補間多項式列  $\{P_N(t)\}$  によって積分  $\int_1^1 f(t) dt$  に対する閉公式の積分則  $\{I_N(f)\}$ , (6) がえられることを第 1 節で述べた. 同様に, 前節の標本点列  $\{\cos 2\pi\alpha_j\}$  上の補間多項式  $P_{N-2}(t)$  によって閉公式の積分則

$$J_{N-2}(f) = \int_{-1}^1 p_{N-2}(t) dt = \sum_{j=1}^{N-1} v_j^N f(u_j), \quad (52)$$

がえられる。

この節では (6) または (52) の中の重み  $w_j^N$ ,  $v_j^N$  が  $N=3 \times 2^n$ ,  $4 \times 2^n$  および  $5 \times 2^n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) に対して全て正となることを示す。  $N=2^{n+2}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) のとき  $I_N(f)$  は CC 則に一致し,  $w_j^N > 0$  であることがわかっている。一方,  $J_{N-2}(f)$  は Filippi 則に一致するのでやはり  $v_j^N > 0$  である。

## 5.1. 閉公式の積分則

### 5.1.1. 標本数が $3 \times 2^n + 1$ の場合

$N=2^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) とおく。式 (1) と (18) に (16) と (26) を代入して  $[-1, 1]$  上で積分すると  $p_{3N/2}(t)$  に基づく積分則  $I_{3N/2}(f)$  は

$$I_{3N/2}(f) = \sum_{j=0}^N w^{3N/2}(\zeta_j) f(\cos \zeta_j) + \sum_{j=0}^{N/2-1} w^{3N/2}(\eta_j) f(\cos \eta_j), \quad (53)$$

と表わされる。ここで  $\zeta_j = \pi j/N$  で,  $\eta_j$  は (20) で定義され,

$$N w^{3N/2}(\zeta_j) = \sum_{k=0}^{N/2} \cos k \zeta_j \{ 2\mu(k) - 2\cos \pi \beta_1 \{ \mu(\frac{N}{2}+k) - \mu(\frac{3N}{2}-k) \} + \mu(N+k) - \mu(N-k) \} + \sum_{k=0}^{N/2} \cos(\frac{N}{2}+k)\zeta_j \{ \mu(\frac{N}{2}+k) + \mu(\frac{3N}{2}-k) \}, \quad (54)$$

$$N w^{3N/2}(\eta_j) = 4\cos \pi \beta_1 \sum_{k=0}^{N/2} \cos k \eta_j \{ \mu(\frac{N}{2}+k) - \mu(\frac{3N}{2}-k) \}. \quad (55)$$

式 (54), (55) の中のエ-メント  $\mu(k)$  は  $k$  が偶数のとき

$$\mu(k) = \int_{-1}^1 T_k(t) dt = 2/(1-k^2), \quad (56)$$

で定義され,  $k$  が奇数のとき  $\mu(k)=0$  である。  $\mu(0)=2 > 0$

で,  $k \geq 2$  に対して  $\mu(k) < 0$  であつて単調増加である. 式(4)

で  $K(t) = 1$  なら  $\mu_k = \mu(k)$  である.

定理 6.1. 全ての重み  $W^{3N/2}(\zeta_j)$ ,  $W^{3N/2}(\eta_j)$  は正である.

証明. 式(54)の右辺の  $\cos k\zeta_j$  と  $\cos(\frac{N}{2} + k)\zeta_j$  の係数が負で

あり,  $\mu(N+k) - \mu(N-k) > 0$  ( $0 \leq k \leq N/2$ ),  $\sum_{k=0}^N \mu(k) = 1/(N+1) +$

$1/(N-1)$  を用いると

$$NW^{3N/2}(\zeta_j) \geq NW^{3N/2}(\zeta_j=0) = 2 \sum_{k=0}^N \mu(k) + \sum_{k=0}^{N/2} 2(1 + \cos \pi k) \\ \times \{ \mu(N+k) - \mu(N-k) \} > 0.$$

次に  $W^{3N/2}(\eta_j) > 0$  を示すためポアソンの総和公式を用いる.

補題 5.2 ポアソンの和公式 [12], [13, p270]

$\phi(t)$  を実軸で定義される可積分関数とし,  $\Phi(\omega)$  を  $\phi(t)$  の

フーリエ cosine 変換とする,

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\infty} \phi(t) \cos \omega t dt. \quad (57)$$

すると, 任意の正の整数  $\alpha$  と実数  $\beta$  に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ \Phi(k\alpha + \beta) + \Phi(k\alpha - \beta) \} = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \phi\left(\frac{2\pi k}{\alpha}\right) \cos\left(\frac{2\pi k\beta}{\alpha}\right). \quad (58)$$

いま,  $0 \leq t \leq N/4$  に対して

$$\phi(t) = \mu\left(\frac{N}{2} + 2t\right) - \mu\left(\frac{3N}{2} - 2t\right), \quad (59)$$

その他の区間で  $\phi(t) = 0$  として  $\phi(t)$  を定義し, (58) を (59)

に適用すると

$$\begin{aligned}
 N W^{3N/2}(\eta_j) &= 4 \cos \pi \beta_1 \sum_{k=0}^{N/4} \cos 2k \eta_j \phi(k) \\
 &= 4 \cos \pi \beta_1 \sum_{k=0}^{N/4} \left\{ \Phi(2\pi k + 2\eta_j) + \Phi(2\pi k - 2\eta_j) \right\}, \quad (60)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\Phi(\omega) = \int_0^{N/4} \phi(t) \cos \omega t \, dt. \quad (61)$$

さて  $W^{3N/2}(\eta_j) > 0$  であるためには,  $\cos \pi \beta_1 < 0$  であるから任意の  $\omega$  に対して  $\Phi(\omega) < 0$  であればよい. 定義 (56) と (59) より  $\phi(N/4 - t)$  は  $t$  の奇関数であることがわかるので次のように展開できる.

$$\begin{aligned}
 \phi\left(\frac{N}{4} - t\right) &= 2 / \{1 - (N - 2t)^2\} - 2 / \{1 - (N + 2t)^2\} \\
 &= 4t / \{(1 + N)^2 - 4t^2\} - 4t / \{(1 - N)^2 - 4t^2\} \\
 &= \sum_{l=1}^{\infty} C_l t^l, \quad 0 \leq t \leq N/4, \quad (62)
 \end{aligned}$$

ここで  $l$  が奇数のとき

$$C_l = \left\{ 2 / (1 + N) \right\}^{l+1} - \left\{ 2 / (1 - N) \right\}^{l+1} < 0, \quad (63)$$

$l$  が偶数のとき  $C_l = 0$  である. 式 (62) を (61) に代入すれば

$$\Phi(\omega) = \sum_{l=1}^{\infty} C_l \Omega_l(\omega), \quad (64)$$

$$\Omega_l(\omega) = \int_0^{N/4} \left(\frac{N}{4} - t\right)^l \cos \omega t \, dt, \quad l \geq 1. \quad (65)$$

もし  $\Omega_l(\omega) \geq 0$  なら,  $C_l < 0$  だから  $\Phi(\omega) < 0$  となる. (65)

より  $\Omega_l(\omega) > 0$  は自明である. いま



$$f_l(\omega) = \omega^{l+1} \Omega_l(\omega)$$

よって  $f_l(\omega)$  を定義すれば, (65)より

$$df_l(\omega)/d\omega = (lN/4) f_{l-1}(\omega), \quad l \geq 2$$

したがって

$$f_l(\omega) = \frac{lN}{4} \int_0^\omega f_{l-1}(\omega) d\omega, \quad f_l(0) = 0, \quad l \geq 2$$

が成立つ.  $\omega^2 \Omega_1(\omega) = f_1(\omega) = 1 - \cos(\omega N/4) \geq 0$  だから

帰納法により  $\omega > 0, l \geq 2$  に対して  $f_l(\omega) > 0$  がいえる.

したがって  $\Omega_l(\omega) > 0$  となる. ところで  $\Omega_l(\omega)$  は偶関数であるから任意の実数  $\omega$  に対して  $\Omega_l(\omega) > 0$  となる.  $\square$

標本数が  $5 \times 2^n + 1$  の場合は計算が複雑になるが同様に証明される. 閉公式に対しては標本点列として  $\{\cos 2\pi \alpha_j\}$  を取ると標本数が  $3 \times 2^n + 1$  と  $5 \times 2^n + 1$  の場合, 積分則の重みが正であることはここで述べた閉公式と同様に証明される.

## 参考文献

- [1] P.J.Davis and P.Rabinowitz, Method of Numerical Integration, Academic Press, Orland, 1984.
- [2] R.Pissens and M.Branders, Numerical solution of integral equations of mathematical physics, using Chebyshev polynomials, J.Comp.Phys., Vol.21, 1976, pp.178-196.
- [3] C.W.Clenshaw and A.R.Curtis, A method for numerical integration on an automatic computer, Numer. Math., Vol.2, 1960, pp.197-205.

- [4] R.Piessens, E.deDoncker-Kapenga, C.Überhuber and D.k.Kahaner, QUADPACK A Subroutine Package for Automatic Integration, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [5] W.M.Gentleman, Implementing Clenshaw-Curtis quadrature, I Methodology and experience, Comm.ACM, Vol,15, 1972, pp.337-342.
- [6] W.M.Gentleman, Implementing Clenshaw-Curtis quadrature, II Computing the cosine transformation, Comm.ACM, Vol.15, 1972, pp.343-346.
- [7] P.Rabinowitz, J.kautsky, S.Elhay and J.C.Butcher, On sequences of imbedded integration rules in Numerical Integration Recent Development, Software and Applications (P.Keast and G.Fairweather eds.), Reidel, Dordrecht, 1987, pp.113-139.
- [8] P.N.Swarztrauber, Symmetric FFTs, Math. Comp., Vol.47, 1986, pp.323-346.
- [9] T.Hasegawa, T.Torii and I.Ninomiya, Generalized Chebyshev interpolation and its application to automatic quadrature, Math. Comp., Vol.41, 1983, pp.537-553.
- [10] L.Kuipers and H.Niederreiter, Uniform Distribution of Sequences, Wiley, New York, 1974.
- [11] S.Filippi, Angenäherte Tschebyscheff-Approximation einer Stammfunktion-eine Modifikation des Verfahrens von Clenshaw und Curtis, Numer. Math., Vol.6, 1964, pp.320-328.
- [12] J.N.Lyness, The calculation of Fourier coefficients by the Möbius inversion of the Poisson summation formula Part I Functions whose early derivatives are continuous, Math.

Comp., Vol.24, 1970, pp.101-135.

[13] P.Henrici, Applied and Computational Complex Analysis,  
Vol 2, Wiley, New York, 1977.