16
数理解析研究所講究録
第 649 巻 1988 年 16-22

countable dimensional metric space の universal space について

埼玉大学　後藤 達生 (Tatsuo Goto)

space X は, $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, $\dim X_i \leq 0$, $i=1, 2, 3, \cdots$ の形にかけるとき, countable dimensional (= c.d.) とよばれる。c.d. metric space に対する universal space については, J. Nagata による一連の結果がある。

(a) (J. Nagata [5]) Hilbert cube $I^{\aleph_0}$ の点で高々有限個の座標が rational であるもの全体からなる subspace N_ω は c.d. separable metric space に対する universal space である。

(b) (J. Nagata [6]) star space $S(A)$ (= hedgehog space of spininess $|A|$) の可算積 $K(A)$ の点で高々有限個の座標が原点と異なる有理点であるもの全体からなる集合 $K_\infty(A)$ は weight が高々 $|A|$ の c.d. metric space に対する universal space である。

この他に J. Nagata [7] において，可算性を仮定しない一般の Hilbert space の subspace で，c.d. metric space あるいは strongly c.d. metric space に対する universal space が構成されているが少々複雑なのでここでは省略する。ここでいう一般の Hilbert space とは，real line R，集合 A に対し，

$$H(A)=\{x\in R^{A} : \sum_{\alpha\in A}(x(\alpha))^{2}<\infty\}$$

と定め，その norm を $\|x\|=(\sum(x(\alpha))^{2})^{1/2}$ で与えたものをいう。C.H. Dowker [1] において示されたようにすべての metric space は適当な H(A) に embed できる。また特に完備な metric space は閉集合として embed できる（cf. [2]）。

Q を有理数全体の集合とするとき

$$H_{\infty}(A)=\{x\in H(A) : |\{\alpha : x(\alpha)\in Q\setminus\{0\}\}|<\aleph_0\}$$

と定めれば，次の定理が成立する。

定理 1. $H_{\infty}(A)$ は weight が高々 $|A|\geq\aleph_0$ の c.d. metric space に対する universal space である。

$K_{\infty}(A)$ が自然に $H_{\infty}(A)$ に embed できることは容易

に示されるから，$H_\infty(A)$ 自身 c.d. であることを示せば十分である。 $n=0, 1, 2, \cdots$ に対し

$$H_n=\{x\in H(A):|\{\alpha\in A: x(\alpha)\in Q\setminus\{0\}\}|=n\}$$

とおく。E. Pol [8]により，$\dim H_0=1$ である（さらに，かってな cardinal $\mathfrak{m}$ に対して $\dim H_0^{\mathfrak{m}}=1$ が成立する）。今集合 A を $<$ なる順序で整列し，A の丁度 n 個の元からなる subset 全体の集合を A_n とする。さらに，

$$H(\rho,\xi)=\{x\in H_n: x(\alpha_i)=r_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

$$\rho=(r_1,\cdots,r_n)\in(Q\setminus\{0\})^n$$

$$\xi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\in A_n,\ \alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n$$

と定めれば，各 $H(\rho,\xi)$ は H_0 と同相であるから $\dim H(\rho,\xi)=1$. また，

$$H(\rho)=\cup\{H(\rho,\xi): \xi\in A_n\}$$

とおけば，$\{H(\rho,\xi): \xi\in A_n\}$ は $H(\rho)$ において discrete であることから $\dim H(\rho)=1$ となる。さらに，$H(\rho)$ は H_n において closed set であり，$H_n=\cup\{H(\rho): \rho\in(Q\setminus\{0\})^n\}$ であるから sum theorem より，$\dim H_n=1$ を得る。$H_\infty(A)=\cup_{n=0}^{\infty}H_n$ より，$H_\infty(A)$ は c.d. である。（詳しい証明は [3] を参照されたい）。

上の証明から次の系が得られる。

系． 任意の整数 $n \geqq 0$ と cardinal $\mathfrak{m}$ に対し，

$$\dim H_n^{\mathfrak{m}} = 1 .$$

何となら ば，任意の自然数 m に対し，$H_n^m = H_{mn}$ が成立するから，定理 1 より $\dim H_n^m = 1$ ．従って [8] より上の系が成立する。

完備な c.d. metric space の embedding については次の定理が成立する。ただし，R_ω は $R^{\aleph_0}$ の点で高々有限個の座標が rational であるもの全体からなる subspace とする。

定理 2． space X が完備な c.d. metric space で weight $= |A| \geqq \aleph_0$ ならば X は $H_\infty(A) \times R_\omega$ に閉集合として embed できる。

証明は K. Tsuda [9, theorem 1.1] と同様の手法による。次の定理の証明も [9, theorem 1.2] と同様である。

定理3，　Xが完備な metric space で weight $=|A|\geqq\aleph_0$ ならば Xは$Z_\infty(A)$に閉集合として embed できる。ただし，$S(A)$より任意の2つの端点を取り除いたものを$T(A)$とし，その可算積$Z(A)=S(A)^{\aleph_0}$の点で高々有限個の座標が原点と異なる有理点であるものの全体からなる subspace を$Z_\infty(A)$とする。

次の定理は有限次元の場合との事情の違いを示す。

定理4．完備な metric space で c.d. metric space に対する universal space は存在しない。

何故ならば Hilbert cube $I^{\aleph_0}$の点で高々有限個の座標が0と異なるもの全体からなる集合K_ωは c.d. であるが，その metric completion はすべて c.d. とはならないからである（cf. [4]）。

References

[1] C. H. Dowker, An imbedding theorem for paracompact metric spaces, Duke Math. J. 14 (1947), 639–645

[2] T. Goto, A note on the embeddings of metric spaces into generalized Hilbert spaces, J. Saitama Univ. Faculty of Education, 36 (1987), 1–3

[3] ——, Universal spaces for countable-dimensional spaces, to appear in Proc. A. M. S.

[4] K. Nagami and J. H. Roberts, A note on countable-dimensional metric spaces, Proc. Jap. Acad. 41 (1965), 155–158.

[5] J. Nagata, On the countable sum of zero-dimensional spaces, Fund. Math. 48 (1960), 1–14,

[6] ——, A remark on general imbedding theorems in dimension theory, Proc. Jap. Acad. 39 (1963), 197–199.

[7] ——, On a universal n-dimensional set for metric spaces, J. reine und angew. Math. 204 (1960), 132–138.

[8] E. Pol, On the dimension of the product of metrizable spaces, Bull. Acad. Polon. 26 (6) (1976),

525 – 534.

[9] K. Tsuda, Dimension theory of general spaces, thesis.