数理解析研究所講究録
第649巻 1988年 23-37

On Essential Mappings

山口大・教育 服部 泰直 (Yasunao Hattori)

次元論において、essential mappings の概念は、基本的であり、重要である。ここでは、essential mappings に関する最近の結果をふまえながら、この分野の未解決問題を若干の説明を加えながら、述べていきたい。

我々は、主に、2つの話題を考える。その1つは、多様体の積への essential mappings についてであり、もう1つは、essential mappings と無限次元空間の関係についての話題である。前者は、J. Krasinkiewicz [6] に、そして、後者は、P. Borst [1] に、主に、依っている。この2つの話題を、節を分けて述べていく。このとき、§1 と §2 における essential mappings の定義は、その値域となる空間族が、異なるために、それぞれについて、与えられているので、注意されたい。(最も、代表的な値域である n-次元立方体 I^n については、両者は、等しい。)

我々が、考える空間は、すべて metrizable spaces であり、mappings は、すべて、continuous である。

§1. Essential mappings onto products of manifolds.

ここでいう manifolds とは、境界を持つ、そして、continuum である topological manifolds である。この節で使われる記号等について、説明する。

I は、unit closed interval $[0, 1]$ を、表わす。また、M, N（または M_j, N_j, $j \in J$）により、$1 \leq \dim < \infty$ なる manifolds を表わす。そして、manifold M について、∂M を、M の境界とする。

J は、高々可算な index set とする。

mapping $f : X \longrightarrow \prod_{j \in J} X_j$ に対して、f を j-th coordinate mappings f_j, $j \in J$ を用いて、$f = (f_j)$ と表わすことがある。

そして、$K (\neq \phi) \subset J$ に対して、

$$f_K = (f_j)_{j \in K} : X \longrightarrow \prod_{j \in K} X_j$$

とする。

1.1. 定義.　f を. space X から manifold M への mapping とする。 mapping $g: X \to M$ について. $H_0 = f$, $H_1 = g$ をみたす homotopy $H: (X, f^{-1}(\partial M)) \times I \to (M, \partial M)$ が. 存在するとき. g を f の <u>admissible deformation</u> という。

同様の概念が. manifolds の積への mappings についても. 定義できる。即ち. $f: X \to \prod_{j \in J} M_j$, $g: X \to \prod_{j \in J} M_j$ とするとき. 任意の $j \in J$ に対して. g_j が f_j の admissible deformation となっている時. g を f の admissible deformation という。

1.2. 定義.　mapping $f: X \to \prod_{j \in J} M_j$ について. f のすべての admissible deformation が surjective のとき. f を <u>essential mapping</u> という。

さて. essential mappings の基本的な性質に. 関わる問題として. 次の2つが. ある。

1.3. 問題 ([6, Problem 1]).　$|J| = \infty$, $f: X \to \prod_{j \in J} M_j$ を essential mapping とし. $h: \prod_{j \in J} M_j \to \prod_{k \in K} N_k$ を homeomorphism とする。このとき. $h \circ f$ は essential か?

1.4. 問題（[6, Problem 2]）. $f: X \to M$ を space X から manifold M への essential mapping とし、N を M の submanifold とする。このとき、$\bar{f} = f|_{f^{-1}(N)} : f^{-1}(N) \to N$ は essential か？

問題 1.4 に関して、もし N が $\dim N = \dim M$ をみたすならば、この問題は肯定的である。実際、より強く、次がわかる。

1.5. 定理（[6, Theorem 1.6]）. $f: X \to \prod_{j \in J} M_j$ を essential mapping とし、任意の $j \in J$ に対し、N_j を M_j の $\dim N_j = \dim M_j$ をみたす submanifold とする。このとき、$\bar{f} = f|_{f^{-1}(\prod_{j \in J} N_j)} : f^{-1}(\prod_{j \in J} N_j) \to \prod_{j \in J} N_j$ は essential である。

次に、essential mappings の積について考える。最も一般的な問題は「2つの essential mappings $f: X \to M$, $g: Y \to N$ について、$f \times g : X \times Y \to M \times N$ が essential mapping になるか？」であるが、これは成立しない。実際、次の例がある。

1.6. 例 ([7, Remark 4.5], [5]). compact space X, X から I^2 への essential mapping f, そして, I^2 からそれ自身への essential mapping g で, $f \times g : X \times I^2 \to I^2 \times I^2$ が essential でないものが存在する。

他方, W. Holsztyński は, 次を示した。

1.7. 定理([4]). $f : X \to I^n$ を space X から I^n への essential mapping とし, $\dim X = n$ とする。このとき, $f \times id : X \times I \to I^n \times I$ は essential mapping である。

そこで, 次の問題が提起される。

1.8. 問題 ([6, Problem 3]). $f : X \to I^2$ を essential mapping とするとき, $f \times id : X \times I \to I^2 \times I$ は essential か?

mappings の積については, 次の問題も未解決である。

1.9. 問題（[7, Problem 2]）. $f: X \to I^m$, $g: Y \to I^n$ を. $f \times g: X \times Y \to I^m \times I^n$ が. essential でないような. mappings とする。そして. $p_1: I^m \times I^n \to I^m$, $p_2: I^m \times I^n \to I^n$ を. projections とする。このとき.

$p_1 \circ \varphi$ が. f の admissible deformation,

$p_2 \circ \psi$ が. g の admissible deformation

であって. しかも. $\varphi(X) \cap \psi(Y) = \phi$ となる mappings $\varphi: X \to I^m \times I^n$, $\psi: Y \to I^m \times I^n$ が. 存在するか？

次に. membranes の概念を. 導入する.

1.10. 定義. A を space X の部分集合とし. $f: X \to \prod_{j \in J} M_j$ を mapping とする。このとき. A が. X の閉集合で. かつ. $f|_A: A \to \prod_{j \in J} M_j$ が. essential であるとき. A を f の <u>membrane</u> という。

1.11. 定義. X の部分集合 A が. mapping $f: X \to \prod_{j \in J} M_j$ の weak membrane であるとは. A の任意の近傍が. f の membrane を含むときをいう.

A が. X の閉集合のときは. membrane と weak membrane

の概念が，一致することは，知られている。membranes に関しては，次の問題が，提起されている。

1.12．問題（[6, Problem 4]）．$f: X \to M$ を space X から manifold M への essential mapping とし，A を f の weak membrane とする。このとき，$f|_A : A \to M$ は，essential か？

1.13．問題（[7, Problem 1]）．X を compact space とし，$(f_1, f_2): X \to I^2 \times I^2$ を，essential mapping とする。このとき，$A \cap B = \emptyset$ となる f_1 の compact membrane A と，f_2 の compact membrane B が，存在するか？

compact space X から $I^m \times I^n$ への mapping $(f_1, f_2): X \to I^m \times I^n$ について，交わらない f_1 と f_2 の compact membranes が，存在するか，という問題についての詳細は，[8] と [7] を，参照されたい。

この節では，[6] に挙げてある問題を，主に，とりあげた。[6] においては，essential mappings についての，この種の詳しい議論と，それの応用（特に，次元論への）が，

述べられている。それらを、知りたい読者は、[6]を、読まれたい。[6]では、無限次元空間に関する問題も、述べられているが、ここでは、それらは、省略した。この分野では、多くの未解決問題が、残されており、研究の余地も、多く残されているように、思われる。

§2. Essential mappings and infinite-dimensional spaces.

この節では、"essential mappings" による "次元" の特徴付けについて考える。有限次元の場合には、space X の次元が、$\dim X \geq n$ であることが、X から、I^n への essential mapping の存在によって、特徴付けられることは、よく知られている。D. W. Henderson は、large transfinite dimension Ind を、essential mappings の存在によって特徴付けることを、試みた。彼の結果を、述べるために、I^n の拡張である transfinite cubes H^α, $\alpha < \omega_1$, を定義する必要が、ある。

2.1. 定義([3]). α を、$\alpha < \omega_1$ なる順序数とする。このとき、H^α, T^α そして、p^α を次のように、定義

する。

(0) $H^0 = \{0\}$, $T^0 = H^0$ そして, $p^0 = 0$ とする。

(1) $\alpha = \beta + 1$ のとき。

$H^\alpha = H^\beta \times I$, $T^\alpha = (T^\beta \times I) \cup (H^\beta \times \{0,1\})$,

そして, $p^\alpha = (p^\beta, 0)$ とする。

(2) α が limit number のとき。

$\beta < \alpha$ なるすべての順序数に対し, A_β を $H^\beta \cap A_\beta = \{p^\beta\}$ で, p^β が A_β の end point であるような half-open arc とする。そして, H^α は discrete sum $\oplus\{H^\beta \cup A_\beta \mid \beta < \alpha\}$ の one-point compactification,

$T^\alpha = H^\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} (H^\beta - T^\beta)$, とし,

p^α を compactifying point とする。

H^α は, compact metric AR-space である。しかし, H^α は manifold ではない。そこで, H^α の上への essential mappings を, 次のように, 定義する。

2.2. 定義 ([3]). $f: X \to H^\alpha$ を space X から H^α への mapping とする。このとき, $f^{-1}(T^\alpha)$ 上では, f と一

致する任意の mapping $g: X \to H^\alpha$ が、surjective であるとき、f は、<u>essential mapping</u> と呼ばれる。

D. W. Henderson は、上の定義のもとで、次を示した。

2.3. 定理（[3]）．　任意の順序数 α（$\alpha < \omega_1$）に対して、次が、成り立つ。

(1)　$\mathrm{Ind}\, H^\alpha = \alpha$,

(2)　X から H^α への essential mapping が、存在するならば、$\mathrm{Ind}\, X \geq \alpha$．

そして、D. W. Henderson は、上の (2) の逆が、成立するか, i.e., large transfinite dimension Ind が、essential mappings で、特徴付けられるか、問うた。しかし、最近、この問題は、R. Pol [10] と、P. Borst & J. J. Dijkstra [2] により、独立に、否定的に、解決された。従って、次の問題を、考えることは、大変興味深い。

2.4. 問題（cf. [9, Question 1]，[10, §3]）．任意の $\alpha\,(< \omega_1)$ に対して、H^α の代わりに、新たに、compact metric AR-space B^α を定義し、space X が、$\mathrm{Ind}\, X \geq$

α であることを，X から B^α への "essential mapping" の存在で，特徴付けることが，できるか？　ここで，考える空間を compact spaces に，制限して考えても，興味深い。

ところで，space X が H^α への essential mapping を持つというのは，どのようなことであろうか。最近，P. Borst [1] は，covering dimension dim を，無限次元へ拡張することにより，そのことを，調べたので，それを，紹介する。

$\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^n$ を space X の disjoint closed sets の pair からなる有限列とする。このとき，$A_i \subset U_i \subset \overline{U}_i \subset X - B_i$ でかつ $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{bd}\, U_i = \phi$ をみたす X の開集合 U_i が存在するとき，$\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^n$ は <u>inessential family</u> と呼ばれる。そして，$\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^n$ は，inessential でないとき，<u>essential family</u> と呼ばれる。

集合 L に対して，L のすべての空ならざる有限部分集合全体からなる集合を，$\mathrm{Fin}\, L$ で，表わす。$M \subset \mathrm{Fin}\, L$，$\sigma \in \{\phi\} \cup \mathrm{Fin}\, L$ とするとき，

$$M^\sigma = \{\tau \mid \tau \in \mathrm{Fin}\, L, \ \ \sigma \cup \tau \in M \ \text{and}\ \sigma \cap \tau = \phi\}$$

とする。そして，次のように，$\mathrm{Ord}\, M$ を，inductive に，定義する：

$$\mathrm{Ord}\, M = 0 \quad \text{if} \quad M = \phi$$

$\alpha > 0$ に対し.

$$\mathrm{Ord}\, M \leq \alpha \iff \text{任意の } a \in L \text{ に対して.} \quad \mathrm{Ord}\, M^{\{a\}} < \alpha.$$

2.5. 定義（[1, Definition 3.1.2.]）. space X に対して. $L(X) = \{(A, B) \mid A, B$ は. X の disjoint closed sets$\}$ とし.

$$M_{L(X)} = \{\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Fin}\, L(X) \text{ and } \sigma \text{ は } X \text{ の essential family}\}$$

とする。そして. X の transfinite covering dimension $\dim X$ を.

$$\dim X = \mathrm{Ord}\, M_{L(X)}$$

により. 定義する。

（transfinite covering dimension $\dim X$ についての詳しい議論は. [1] を. 見られたい。）.

H^α への essential mapping は. large transfinite dimension Ind より. むしろ. transfinite covering dimension dim に. 深く関係している。即ち. P. Borst は. 次を示した。

2.6. 定理（[1, Theorem 4.1.13]）. space X から H^α

への essential mapping が存在するならば、$\dim X \geqq \alpha$ である。

2.7. 定理（[1, Theorem 4.2.3]）. space X が $\dim X \geqq \alpha$ をみたすならば、$X \times C$ から H^α への essential mapping が存在する。ただし、ここで、C は Cantor set を表わすものとする。

逆に、

2.8. 定理（[1, Theorem 4.2.1]）. X を locally compact space とする。このとき、$X \times C$ から H^α への essential mapping が存在するならば、$\dim X \geqq \alpha$ である。

2.9. 問題. 定理 2.8 において、space X の条件 "local compactness" は本質的か？

$X \times C$ から H^α への essential mapping が存在するならば、定理 2.6 より $\dim X \times C \geqq \alpha$ はわかる。従って、問題 2.9 は、次に帰着される。

2.10. 問題（[1, Question 3.1.9]）．任意の space X に対して．$\dim X \times C = \dim X$ が．成立するか？

この問題に．関係して．次の問題も．提起されている。

2.11. 問題（[1, Question 3.1.10]）．compact space X と．有限次元空間 Y に対し．$\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$ が．成立するか？

特に．$\dim(X \times I^n) = \dim X + n$ であるか？

さて．定理 2.7 と 2.8 より．locally compact spaces に．おいては．$\dim X \geqq \alpha$ ということと．$X \times C$ から H^α への essential mapping が．存在するということとは．同値であることが．わかる。ここで．Cantor set C の積を考えることは．本質的である。実際．$\dim X = \omega_0 + 1$ であり．H^{ω_0+1} への essential mapping が．存在しない compact space X が．存在する。（[1, Example 5.2.1]）．従って．問題 2.4 と．同様に．次の問題も．提起される。

2.12. 問題．順序数 α（$\alpha < \omega_1$）に対して．H^α の代わりに．新たに compact metric AR-space C^α を定義し．

それへの "essential mapping" によって. (compact) space X の transfinite covering dimension dim X を. 特徴付けることが. できるか?

References

1. P. Borst, Transfinite classifications of weakly infinite-dimensional spaces, Free University Press, 1986.

2. P. Borst and J. J. Dijkstra, Essential mappings and transfinite dimension, Fund. Math. 125 (1985), 41-45.

3. D. W. Henderson, A lower bound for transfinite dimension, Fund. Math. 63 (1968), 167-173.

4. W. Holsztyński, Universality of the product mappings onto products of I^n and snake-like spaces, Fund. Math. 64 (1969), 147-155.

5. W. Holsztyński, On the composition and products of universal mappings, Fund. Math. 64 (1969), 181-188.

6. J. Krasinkiewicz, Essential mappings onto products of manifolds, preprint.

7. J. Krasinkiewicz and K. Lorentz, Disjoint membranes in cubes, preprint.

8. D. McCullough and L. R. Rubin, Intersections of separators and essential submanifolds of I^n, Fund. Math. 116 (1983), 131-142.

9. J. Nagata, Topics in dimension theory, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Fifth Prague Topology Symposium 1981), Heldermann Verlag, Berlin (1982), 497-506.

10. R. Pol, On classification of weakly infinite-dimensional compacta, Fund. Math. 116 (1983), 169-188.