数理解析研究所講究録
第 649 巻 1988 年 82-91

P－dimensional spaces について

筑波大学 数学系 木村 孝（Takashi Kimura）

この小論では、P-dimension について、今までに知られている結果の簡単な概説と未解決問題について言及する。

P は、ある位相的性質をもつ空間全体からなるクラスとする。

1. P-dimension の定義

space X に対して、small inductive dimension、ind X、large inductive dimension、Ind X、covering dimension、dim X、の３つの次元が定義されるが P-dimension も、P-ind X、P-Ind X、P-dim X の３つが、それぞれの次元に対応して定義することができる。

Definition 1. regular space X に対して、small inductive P-dimension、P-ind X、を次で定義する。

$\text{P-ind}\ X = -1 \iff X \in P$

$\text{P-ind}\ X \leqq n\ (\geqq 0) \iff {}^{\forall}x \in X,\ {}^{\forall}U : \text{nbd of } x,\ {}^{\exists}V : \text{nbd of } x$ s.t. $V \subset U,\ \text{P-ind Bd}\ V \leqq n-1$

$\text{P-ind}\ X = n \iff \text{P-ind}\ X \leqq n \wedge \text{P-ind}\ X \nleqq n-1$

$\text{P-ind}\ X = \infty \iff \text{P-ind}\ X \nleqq n$ for ${}^{\forall}n \in \mathbf{N}$

これは、ind の定義の modification であり、実際、P ＝ {φ} とすれば、P-ind ＝ ind となる。P-Ind も次のように、Ind の modification として定義

する。

Definition 2. normal space X に対して、large inductive P-dimension、P-Ind X、を次で定義する。

$$\text{P-Ind } X = -1 \iff X \in P$$

$$\text{P-Ind } X \leqq n (\geqq 0) \iff {}^{\forall}F : \text{closed in } X,\ {}^{\forall}U : \text{open in } X \text{ with } F \subset U,\ {}^{\exists}V : \text{open in } X \text{ s.t. } \begin{cases} F \subset V \subset U \\ \text{P-Ind Bd } V \leqq n-1 \end{cases}$$

$$\text{P-Ind } X = n \iff \text{P-Ind } X \leqq n \ \wedge\ \text{P-Ind } X \nleqq n-1$$

$$\text{P-Ind } X = \infty \iff \text{P-Ind } X \nleqq n \text{ for } {}^{\forall}n \in \mathbb{N}$$

P-Ind に対しても、P = {ϕ} とすれば、P-Ind = Ind となる。covering P-dimension は、finite open cover の代わりに、次に定義する、finite P-border cover を考えることによって、covering dimension と同様な方法で定義する。

Definition 3. collection $\mathcal{U}$ of open subsets of a space X が、$X - \cup\mathcal{U} \in P$ をみたしているとき、$\mathcal{U}$ を P-border cover という。

Definition 4. normal space X に対して、covering P-dimension、P-dim X、を次で定義する。

$$\text{P-dim } X \leqq n \iff {}^{\forall}\mathcal{U} : \text{finite P-border cover of } X \quad {}^{\exists}\mathcal{V} : \text{finite P-border cover of } X \text{ s.t. } \mathcal{V} \text{ は } \mathcal{U} \text{ の refinement},\ \text{ord } \mathcal{V} \leqq n+1$$

$$\text{P-dim } X = n \iff \text{P-dim } X \leqq n \ \wedge\ \text{P-dim } X \nleqq n-1$$

$$\text{P-dim } X = \infty \iff \text{P-dim } X \nleqq n \text{ for } {}^{\forall}n \in \mathbb{N}$$

$P = \{\phi\}$ のとき、P-border cover は、open cover なので、P-dim X = dim X となる。

以上、3つの P-dimension を定義したが、これらのように、次元の定義の $\{\phi\}$ の部分を P で置き換えることによって定義される class function を、P-dimension と呼ぶことにする。次元が n であることと同値な命題はたくさんあるので、それらの命題の $\{\phi\}$ の部分を P で置き換えることによって、さらに色々な P-dimension を定義することができる。

2. P-dimension が考えられた動機

$X \notin P$ となる space X に対して、X と P がある程度の条件を満たしていれば、$Y \in P$ となる space Y に、X を拡張することができる。たとえば X が Tychonoff space で P が compact spaces をすべて含めば、X の compactification は P の元になるので、上のことが可能である。

Definition 5. spaces X、Y に対して、X が Y で dense で、$Y \in P$ となるとき、Y を P-extension of X という。

P-extension を考えるとき、space X に対して、どの程度 X をふくらませれば P-extension Y ができるのかが問題になる。つまり、Y-X の大きさが問題として考えられる。Y-X の大きさを表す量としては、色々なものが考えられるが、ここでは Y-X の次元によって大きさを考えることにする。

Definition 6. space X に対して、3つの P-deficiency、P-i-def X、P-I-def X、P-c-def X を、定義可能なとき、次で定義する。

P-i-def X = min{ind(Y-X) : Y は P-extension of X}

P-I-def X = min{Ind(Y-X) : Y は P-extension of X}

P-c-def X = min{dim(Y-X) : Y は P-extension of X}

P が separable metrizable spaces 全体から成るクラスのサブクラスのとき、上の３つは、一致するので、単に P-def と書くことにする。

先程の問題は、P-deficency の値を求めることである。P-deficency は、外延的に定義されたものであるが、これを内包的に特徴づけることを考えるのである。この問題を考えるとき、P-dimension という概念(これはもちろん内包的なものである)は、非常に自然である。

３．P-dimension に関して、今までに知られている結果および未解決問題について

P-dimension は、２節で述べたように、P-extension との関係から考え出されたものであるから、P-dimension に対しての今までの研究方向の一つとして、P-extension との関係がある。また、P-dimension は、次元の modification として定義されたものであるから、もう一つの研究方向として、P-dimension の次元論的な性質の研究があげられる。

３－１．P-extension との関係

P-dimension、P-deficiency が考えられるきっかけにもなった、一番最初の結果は、次の de Groot によるものである。

Theorem 1 (J. de Groot [5]、1942). separable metrizable space X に対して、次が成り立つ。

$\mathrm{KM}\text{-}\mathrm{ind}\ X \leqq 0 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{KM}\text{-}\mathrm{def}\ X \leqq 0$

但し、KM は compact metrizable spaces 全体から成るクラスとする。

この結果を、０だけではなく、一般の n に対しても拡張しようとして、

de Groot は次を予想した。

de Groot's conjecture. separable metrizable space X に対して、$KM\text{-ind}\ X = KM\text{-def}\ X$ が成り立つであろう。

この問題は、R. Pol [11] によって否定されるまで40年程未解決であったがこれが解かれる以前には、次のような結果が得られている。

Theorem 2 (J. M. Aarts [1]、1968). metrizable space X に対して、$CM\text{-Ind}\ X = CM\text{-dim}\ X = CM\text{-I-def}\ X = CM\text{-c-def}\ X$ が成り立つ。さらに、X が separable ならば、$CM\text{-ind}\ X$ も一致する。但し、CM は completely metrizable spaces 全体から成るクラスとする。

de Groot は、compactification を問題にしたのだが、上の結果は、completion に対しては、de Groot's conjecture と同様なことが成り立つことを示している。

Example 1 (J. M. Aarts and T. Nishiura [3]、1973). $\sigma\text{-}KM\text{-ind}\ X = 0$、$\sigma\text{-}KM\text{-def}\ X = 1$ となる separable metrizable space X が存在する。但し、$\sigma\text{-}KM$ は σ-compact metrizable spaces 全体から成るクラスとする。

これは、J. Nagata's problem [9] の否定解でもある。

Example 2 (J. van Mill [8]、1982). $C\text{-Ind}\ X = 1$、$C\text{-c-def}\ X = C\text{-I-def}\ X = \infty$ となる Lindelöf space X が存在する。但し、C は Čech-complete spaces 全体から成るクラスとする。

これは、先の Aarts の結果で metrizability の条件を除くことができないことを示している。

Example 3 (R. Pol [11], 1982). KM-ind $X = 1$、KM-def $X = 2$ となる separable metrizable space X が存在する。

以上が、P-deficiency と P-dimension の関係に関して、今までに得られている主な結果である。この方向での研究の基本的な問題は、

Problem 1. P-deficiency と一致する P-dimension を求めよ、もしくは定義せよ。

である。この問題は、P = CM に対しては、Aarts の結果、また、P = KM に対しては、著者 [6] の最近の結果によって、解決されている。

上の問題は、一般には難しすぎるので、もう少し簡単と思われる問題を次に紹介しよう。

space X に対して、最も簡単な P-extension Y は、one-point P-extension (i.e. $|Y - X| \leqq 1$) である。one-point P-extension に対しては、次の結果が知られている。

Theorem 3 (J. Mack, M. Reyburn and G. Woods [7], 1972). P は、次の条件を満たしているとする。

i) $X \in P$、Y : closed in X $\Rightarrow$ $Y \in P$

ii) $X_\alpha \in P$、X_α : compact $\Rightarrow$ $\Pi X_\alpha \in P$

iii) $^\forall X \in P$、$^\exists Y \in P$ s.t. $X \subset Y$、Y : compact

iv) $X \in P$、$Y \in P$、Y : compact $\Rightarrow$ $X \times Y \in P$

v) $^\exists x \in X$、$^\exists \mathcal{B}$: nbd base at x s.t. $X - B \in P$ for $^\forall B \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow$ $X \in P$

vi) $T \in P$、T : compact、Y、Z : closed G_δ in T、$X \subset T$ with

$$X \cup Y、X \cup Z \in P \Rightarrow X \cup (Y \cap Z) \in P$$

このとき、次が成り立つ。

X : locally P (i.e. ${}^\forall x \in X$、${}^\exists U$: nbd of x s.t. $\mathrm{Cl}\, U \in P$)

$\Leftrightarrow$ X : one-point P-extension をもつ

one-point P-extension の次に簡単な P-extension Y として、$Y-X$ が0次元になるものがある。

Problem 2. P がどの程度の条件を満たせば、P-ind $X \leqq 0$ (i.e. X : rim P) のとき、P-def $X \leqq 0$ となるか? また、具体的な P (e.g. paracompact spaces 全体、realcompact spaces 全体等) に対して、P-ind $X \leqq 0 \Rightarrow P$-def $X \leqq 0$ が成り立つか調べよ。

以上は、実質的には、有限な n に対して考えてきたが、P-ind、P-Ind、P-i-def、P-I-def は、ordinal に対して定義を拡張することができる。このとき、Aarts の結果は、そのまま拡張されるのだろうか?

Problem 3. CM-Ind、CM-I-def の定義を ordinal にまで拡張したとき任意の metrizable space X に対して、CM-Ind X = CM-I-def X は成り立つか?

3−2. P-dimension の次元論的な性質について

P-dimension の有限次元論的な性質については、Aarts の論文 [2] が詳しい。ここでは、無限次元に対して、最近得られた結果について紹介する。

$K_\omega = \{(x_i) \in I^\omega : |\{i \in \omega : x_i \neq 0\}| < \omega\}$ とおく。これは

無限次元では、おなじみの example である(e.g. [4])。ind、P-ind 等は ordinal に対して定義されているとする。このとき、ind K_ω は定義できないことが知られていたが、最近、M. Wojcicka は次を示した。

Theorem 4 (M. Wojcicka [13]、1986). KM-ind K_ω は定義できない。

一般に、$P \subset Q$ ならば、Q-ind $\leqq$ P-ind なので、上の結果は、拡張になっている。

E. Pol [10] は、K_ω の closed image となる non-degenerate metrizable space X に対し ind X が定義できないことを示しているので、そのような space X に対して cmp X が定義可能か否か興味をもたれるが著者はまだ確かめていない。 また、R. Pol は次を示した。

Theorem 5 (R. Pol [12]、1987). 任意の $\alpha < \omega_1$ 対して、$\alpha \leqq$ KM-ind $X < \omega_1$ となる separable metrizable space X が存在する。

次元論的な性質のうち、どの程度までそれが P-dimension に対しても成り立つのかを調べるのがこの分野の研究である。無限次元に対しては、まだ研究が始められたばかりで、trivial にわかるものを除けば、上の2つの結果以外、ほとんど何も知られていないと思われる。

次元の場合は、metrizable space X で、ind $X \neq$ Ind X となる例が知られているが、先程の Aarts の結果との関連で、CM-ind X、CM-Ind X に対しても、metizable space の範囲で一致しない例があるのかどうか面白いと思うのだが、著者はその存在を知らない。KM等に対しては、P-ind と P-Ind が一致しない簡単な例があるのだが。

References

[1] J. M. Aarts, Complteness degree. A generarization of dimension, Fund. Math. 63(1968), 27-41.

[2] J. M. Aarts, Dimension modulo a class of spaces, Nieuw Arch. Wisk. (3) 20(1972), 191-215.

[3] J. M. Aarts and T. Nishiura, Kernels in dimension theory, Trans. Amer. Math. Soc. 178(1973), 227-240.

[4] R. Engelking, Transfinite dimension, in : Surveys in General Topology, M. Reed (editor), New York 1980, 131-161.

[5] J. de Groot, Topologisch Studien, Thesis, Groningen, 1942.

[6] T. Kimura, Solution to a compactification problem of Sklyarenko, to appear in Fund. Math.

[7] J. Mack, M. Reyburn and G. Woods, Local topological properties and one-point extension, Canad. J. Math. 24(1972), 338-348.

[8] J. van Mill, Inductive Cech-completeness and dimension, Comp. Math. 45(1982), 145-153.

[9] J. Nagata, Some aspects of extension theory in general topology, Internat. Sympos. on Extension Theory, Berlin, 1962, 157-161.

[10] E. Pol, Remark on perfect images of the space K_ω, Bull. Acad. Polon. Sci. 28(1980), 495-501.

[11] R. Pol, A counterexample to J. de Groot's conjecture cmp = def, Bull. Acad. Polon. Sci. 30(1982), 461-464.

[12] R. Pol, On transfinite inductive compactness degree, Colloq. Math. 53(1987), 57-71.

[13] M. Wojcicka, On the separation properties of K_ω, Colloq. Math. 50(1986), 213-217.