数理解析研究所講究録
第 649 巻 1988 年 106-121

関数空間の線形位相的性質について

横浜国大　寺田敏司 (Toshiji Terada)

ここで考える位相空間は、すべて $T_{3\frac{1}{2}}$ を仮定し、線形空間のスカラーは実数とする。位相空間 X に対して、X 上の実数値連続関数全体を $C(X)$ で表し、$C(X)$ のメンバーで有界な関数全体を $C^*(X)$ と表す。$C(X)$ および $C^*(X)$ は、普通に線形空間とみなす。さらに、$C(X)$, $C^*(X)$ 上に pointwise convergence の位相を考えて得られる位相線形空間を $C_p(X)$, $C_p^*(X)$ と表すことにする。これらの関数空間 $C_p(X)$, $C_p^*(X)$ に関する主要な興味は、X 上の純粋に位相的な性質が、$C_p(X)$ または、$C_p^*(X)$ 上の適当な線形位相的性質で特徴付けられるか、という問題である。

ここでは、compact 性および $\aleph_0$-bounded 性とよばれている位相的性質が、$C_p(X)$ の線形位相的性質で一応特徴付けられることを示す。さらに、これらの結果は、ほとんど General Topology 的な方法で得られることも示す。

§1. 準備

1.1. 定義. Aを線形空間Eの部分集合とする。

(1) $|t|\leqq 1$ をみたす任意のスカラー t に対して $tA\subset A$ となるとき，Aは *circled* とよばれる。

(2) Eの任意のベクトル x に対して，正のスカラー ρ_x が定まり，$0\leqq t\leqq \rho_x$ ならば $tx\in A$ となるとき，Aは *absorbent* とよばれる。

これらの定義および基本的な結果は [2], [3], [5] などを，参照して下さい。

1.2. 補助定理. 任意の位相線形空間は，次の2条件をみたす 0の近傍基底$\mathfrak{U}$をもつ。

NB1) $\mathfrak{U}$の任意のメンバーは，*circled* かつ *absorbent*.

NB2) $\mathfrak{U}$の任意のメンバー U に対し，$\mathfrak{U}$のメンバー Vで，$V+V\subset U$ をみたすものがとれる。

逆に，線形空間E上に，NB1) と NB2) をみたす *filter basis* $\mathfrak{U}$ が与えられれば，$\mathfrak{U}$を0の近傍基底とする線形位相がただ1つ定まる。

この事実から，$C(X)$ および $C^*(X)$ 上に各種の位相を考えることができる。実際，X を位相空間とし，υX を X の real compactification とする。良く知られているように，$C(X)$ と $C(\upsilon X)$ は，代数的には，同一視できる。ここでも，$C(X) = C(\upsilon X)$ と考える。B を υX の任意の部分集合とし，ε を任意の実数 (>0) とする。

$$\langle B, \varepsilon \rangle = \{ f \in C(X) \mid f(B) \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \}$$

と定める。今，$\mathcal{B}$ を υX の compact 部分集合の族で，次の条件をみたすものとする。

i) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \exists B_3 \in \mathcal{B}$ s.t. $B_1 \cup B_2 \subset B_3$,

ii) $\cup \{ B \mid B \in \mathcal{B} \}$ は，υX で dense。

そこで，

$$\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \{ \langle B, \varepsilon \rangle \mid B \in \mathcal{B}, \ \varepsilon > 0 \}$$

と定めると，$\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ は 1.2. の NB1)，NB2) をみたす $C(X)$ の filter basis となる。$\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ が定める線形位相を $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ で表し，この位相の与えられた $C(X)$ を $C_{\mathcal{B}}(X)$ で表すことにする。$C^*_{\mathcal{B}}(X)$ も同様に考えられる。

例 1. $\mathcal{B} = \{ F \mid F$ は X の有限集合$\}$ とすれば，$C_{\mathcal{B}}(X) = C_p(X)$.

例2. $\mathcal{B} = \{K \mid K$ は X の compact 部分集合$\}$ とするとき，$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ は compact-open 位相で，このとき $C_k(X)$ で表すことにする。

1.3. 補助定理. $\mathcal{B}$ を υX の compact 部分集合の族で，1.2 の条件 i), ii) をみたすものとする。μ を $C_{\mathcal{B}}(X)$ から $\mathbb{R}$ への 0 でない連続かつ線形な写像とする。このとき，υX の compact 部分集合 A（これを $supp(\mu)$ と表す）で，次の条件をみたすものがある。

a) $\mathcal{B}$ のあるメンバー B を $A \subset B$ となるようにとれる。

b) $f|A = 0$ $(f \in C(X))$ ならば，$\mu(f) = 0$ である。

c) $A \cap G \neq \phi$ となる υX の任意の開集合 G に対して，$f|_{\upsilon X - G} = 0$ かつ $\mu(f) = 1$ をみたす $f \in C(X)$ がある。

証明.（位相的な証明）. $\mathbb{R}$ の開区間 $(-1, 1)$ の逆像 $U = \mu^{-1}((-1,1))$ は，$C_{\mathcal{B}}(X)$ の 0 の凸近傍である。今，υX の compact 部分集合 K で，

(*) $\forall f \in C(X)$ $(f|K = 0 \Rightarrow f \in U)$

をみたす K の集合を $\mathcal{K}_U$ と表すことにする。このとき，U は 0 の近傍であるから，$\mathcal{B}$ のメンバー K_0 と $\varepsilon_0 > 0$ を

$\langle K_0, \varepsilon_0\rangle \subset \mathcal{U}$ をみたすように選べる。明らかに，$K_0 \in \mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ となるから，$\mathcal{K}_{\mathcal{U}} \neq \phi$ である。

(1) $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ である必要十分条件は，Kのある近傍Vにおいて $f|V=0$ をみたす $f \in C(X)$ が，つねに $f \in \mathcal{U}$ となることである。

実際，後半の条件は明らかに前半の条件の必要条件である。逆に，後半の条件がみたされたとする。$f \in C(X)$ が，$f|K=0$ をみたしたとすれば，$g=(f \vee (\frac{\varepsilon_0}{2}))+(f \wedge (-\frac{\varepsilon_0}{2}))$ を考えると，$2g$は Kの近傍 $V=\{x \in X \mid |f(x)|<\frac{\varepsilon_0}{2}\}$ の各点で 0 となるから，$2g \in \mathcal{U}$ である。一方，$|2(f-g)|<\varepsilon_0$ であるから，$2(f-g) \in \langle K_0, \varepsilon_0\rangle \subset \mathcal{U}$ でもある。$\mathcal{U}$ は凸集合であるから，$f=\frac{1}{2}(2(f-g))+\frac{1}{2}(2g) \in \mathcal{U}$ となる。よって，$K \in \mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ がいえる。

(2) $\mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ は有限交叉性をもつ。

これを示すには，$K_1, K_2 \in \mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ ならば $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ となることを示せばよい。そこで，$f \in C(X)$ が，$K_1 \cap K_2$ のある近傍 V において，$f|V=0$ であるとする。

$$g(x)=\begin{cases} 2f(x) & (x \in K_1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in K_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

をみたす $g \in C(X)$ の存在は明らか。$g|K_2=0$ より，$g \in \mathcal{U}$ が導け，$(2f-g)|K_1=0$ より，$2f-g \in \mathcal{U}$ が導け

る。よって，$f=\frac{1}{2}(2f-g)+\frac{1}{2}g\in\mathcal{U}$ となる。

(3) $A=\cap\{K\mid K\in\mathcal{K}_{\mathcal{U}}\}\in\mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ である。

まず，$\mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ のメンバーはコンパクトであるから，$A\neq\phi$ は明らか。今，$f\in C(X)$ は A のある近傍 V において，$f|V=0$ をみたすものとする。このとき，$K\subset V$ となる K が，$\mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ のメンバーとして存在する。$f|K=0$ ゆえ，$f\in\mathcal{U}$ となる。このことは，$A\in\mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ を導く。

(4) A は a)，b)，c) の条件をみたす。

a) は $A\subset K_0$ より明らか。b) $f\in C(X)$ が $f|A=0$ をみたすとする。任意のスカラー α に対し，$\alpha f|A=0$ ゆえ，$\alpha f\in\mathcal{U}$，すなわち，$|\mu(\alpha f)|\leqq 1$。これより，$\mu(f)=0$ が得られる。c) νX の開集合 G が，$G\cap A\neq\phi$ をみたすとする。$A-G\notin\mathcal{K}_{\mathcal{U}}$ ゆえ，$A-G$ のある近傍 V と $g\in C(X)$ で $g|V=0$，$\mu(g)=1$ をみたすものがとれる。ところで，$G\cup V$ は A の近傍であるから，$h\in C(X)$ を $h(A)=\{1\}$，$h(\nu X-(G\cup V))=\{0\}$ をみたすようにとれる。そこで，$f=h\cdot g$（積）を考えれば，$f|\nu X-G=0$ であり，$f|A=g|A$ ゆえ，$\mu(f)=\mu(g)=1$ が成り立つ。

$supp(\mu)$ が μ に対して一意的に定まることも明らかである。

§2. 関数空間の線形位相的性質

2.1. 定義. Aを位相線形空間Eの部分集合とする。

1) Aが absorbent, circled, convex かつ closed であるとき, Aは barrel とよばれる。

2) Aが barrel で, 0の barrel である近傍の列$\{A_i\}$によって$A=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$と表せるとき, Aは$\aleph_0$-barrel とよばれる。

局所凸線形位相空間Eにおいて, すべての barrel が, 0の近傍となるとき, Eは barrelled であるとよばれる。また, すべての$\aleph_0$-barrel が0の近傍となる場合には, Eを$\aleph_0$-barrelled であるとよぶ。

2.2. 補助定理 (Nachbin-Shirota [4],[6]). 位相空間Xに対して, 次は同値である。

(1) $C_\kappa(X)$が barrelled である。

(2) Xの任意の relatively pseudocompact な閉集合は compact である。

この結果の位相的証明は, Asanov-Shamgnov [1] にある。

2.3. 定義([5]). $\mathcal{P}$ を局所凸位相線形空間における線形位相的性質とする。すなわち，E と F が局所凸位相線形空間で linearly homeomorphic とするとき，E が性質 $\mathcal{P}$ をもつならば F も性質 $\mathcal{P}$ をもつものとする。さらに，$\mathcal{P}$ は，inductive limits に関して閉じていて，finest 局所凸位相をもつ位相線形空間は性質 $\mathcal{P}$ をもつとする。いま，$(E, \mathcal{T})$ は局所凸位相線形空間，すなわち，局所凸線形位相 $\mathcal{T}$ をもつ線形空間 E，とする。このとき，E 上に $\mathcal{T}$ より弱くなく，性質 $\mathcal{P}$ をもつ局所凸線形位相のうちで，最も弱いもの $\mathcal{S}$ が存在する。この位相線形空間 $(E, \mathcal{S})$ を，$(E, \mathcal{T})$ に associate する $\mathcal{P}$-space という。

一般に，$\mathcal{S}$ は $\mathcal{T}$ より強くなる。

2.4. 定義([5]). 位相空間 X に対し，X' は次のように定められる υX の部分空間とする。

$$X' = \cup\{ cl_{\upsilon X} A \mid A \text{ は } X \text{ の relatively pseudocompact 部分集合} \}$$

超限帰納法により，$X_0 = X$，$X_{\alpha+1} = (X_\alpha)'$，また α が limit ordinal のとき，$X_\alpha = \cup\{ X_\beta \mid \beta < \alpha \}$ と定める。このとき，ある λ において，$X_\lambda = X_{\lambda+1}$ となる。この X_λ を

μX で表す。明らかに，$X \subset \mu X \subset \upsilon X$ であるから，$C(\mu X) = C(X)$ と考えてよい。

2.5. 補助定理（[5]），$C_p(X)$ に associate する barrelled space は $C_k(\mu X)$ である。

証明．2.2. により，$C_k(\mu X)$ は barrelled である。さらに，$C_k(\mu X)$ の位相が $C_p(X)$ の位相より弱くないことも，明らか。したがって，μX の任意の compact 部分集合 K と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\langle K, \varepsilon \rangle$ が $C_p(X)$ に associate する barrelled space において，0 の近傍になることを示せばよい。

まず，$C_p(X)$ に associate する barrelled space の位相は $C_p(\mu X)$ の位相より弱くないことは明らか。そこで，

$$H_K = \{ f \in C(\mu X) \mid |f(x)| \leq \varepsilon/2 \text{ for } \forall x \in K \}$$

と定めると，H_K は $C_p(\mu X)$ において，barrel である。したがって，H_K は $C_p(X)$ に associate する barrelled space においても，barrel で，よって，0 の近傍である。$H_K \subset \langle K, \varepsilon \rangle$ であるから，$\langle K, \varepsilon \rangle$ も $C_p(X)$ に associate する barrelled space において 0 の近傍となる。

2．6．系． 位相空間 X に対して，次は同値である．

(1) X は pseudocompact である。

(2) $C_p(X)$ に associate する barrelled space は normable である。

2．7．補助定理（[5]）． 位相空間 X に対して，

$$\mathcal{B}_{\aleph_0} = \{ cl_{\upsilon X} A \mid A \subset X,\ |A| \leqq \aleph_0,\ A \text{ は relatively pseudocompact} \}$$

と定める。$C_p(X)$ に associate する $\aleph_0$-barrelled space は $C_{\mathcal{B}_{\aleph_0}}(X)$ と同じである。

証明．まず，$C_{\mathcal{B}_{\aleph_0}}(X)$ が $\aleph_0$-barrelled であることを示す。今，$H = \cap\{W_n \mid n \in N\}$ を $C_{\mathcal{B}_{\aleph_0}}(X)$ の $\aleph_0$-barrel，ここで，W_n は barrel な 0 の近傍，とする。$C^*(X)$ 上に sup-norm を与えて得られる Banach space を $C^*_n(X)$ で表す。$C^*_n(X) \cap H$ は，$C^*_n(X)$ において barrel であるから，0 の近傍となる。よって，$\sigma > 0$ が存在して，$f \in C^*(X)$ が，$\|f\| \leqq \sigma$ ならば，$f \in H$ とできる。一方，各 n に対して，$K_n \in \mathcal{B}_{\aleph_0}$ および，$\varepsilon_n > 0$ が存在して，$\langle K_n, \varepsilon_n \rangle \subset W_n$ とできる。このとき，$\varepsilon = (\frac{1}{2})\sigma$ と定めると，各 n に対して

$$\langle K_n, \varepsilon \rangle \subset W_n$$

が成り立つ。実際，$f \in \langle K_n, \varepsilon \rangle$ とすれば，$|2f(x)| < \sigma$ が，K_n の任意の x について成り立つ。今，$g \in C^*(X)$ を $g|K_n = 2f|K_n$，$\|g\| < \sigma$ となるようにとる。$g \in H \subset W_n$。また $2f - g \in \langle K_n, \varepsilon \rangle \subset W_n$ も明らかであるから，

$f = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}(2f-g) \in W_n$ となる。

次に，$K = cl_{vX} \cup \{K_n \mid n \in N\}$ と定める。K が $\mathcal{B}_{\aleph_0}$ のメンバーであることは明らか。また

$$\langle K, \varepsilon \rangle \subset \cap \{\langle K_n, \varepsilon \rangle \mid n \in N\} \subset H$$

も成立する。よって，H は $C_{\mathcal{B}_{\aleph_0}}(X)$ において，0 の近傍である。以上によって，$C_{\mathcal{B}_{\aleph_0}}(X)$ が $\aleph_0$-*barrelled* であることが知られる。

そこで，A を X の任意の *relatively pseudocompact* である可算集合とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\langle cl_{vX}A, \varepsilon \rangle$ の $C_p(X)$ における閉包は *barrel* であり，

$$\overline{\langle cl_{vX}A, \varepsilon \rangle} = \cap \{H_F \mid F \text{ は } A \text{ の有限集合}\}$$

ここで，$H_F = \{f \in C(X) \mid |f(x)| \leqq \varepsilon \text{ for } \forall x \in F\}$，と表せる。$\overline{\langle cl_{vX}A, \varepsilon \rangle}$ は $\aleph_0$-*barrel* であるから，$C_p(X)$ に *associate* する $\aleph_0$-*barrelled space* においても $\aleph_0$-*barrel* であり，したがって，0 の近傍となる。よって，$C_{\mathcal{B}_{\aleph_0}}(X)$ が，$C_p(X)$ に *associate* する $\aleph_0$-*barrelled space* に他ならないことがわかる。

§3. Compact 性 および $\aleph_0$-bounded 性 の特徴付け

3.1. 定義. $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ を線形空間 E 上の線形位相とし, $\mathcal{T}_1 \geqq \mathcal{T}_2$ とする。 u を $(E, \mathcal{T}_1)$ から実数空間 $\mathbb{R}$ への連続な線形写像とする。次の条件が成り立つとき, u は $(E, \mathcal{T}_2)$ に関して special outer functional であるという。

a) u は $(E, \mathcal{T}_2)$ 上では連続でない。

b) E の任意の点列 $\{f_n\}$ に対して, 連続な線形写像 $u_0 : (E, \mathcal{T}_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ があって, $u_0(f_n) = u(f_n)$ が各 n について, 成り立つようにできる。

3.2. 補助定理. 位相空間 X に対して, $\mathcal{B}$ は 1.2 の条件 i), ii) をみたす υX の compact 部分集合の族とする。$\mathcal{B}$ はさらに, $X \subset \cup \mathcal{B}$ もみたすものとする。 u を $C_{\mathcal{B}}(X)$ から $\mathbb{R}$ への連続な線形写像とするとき, 次は同値である。

(1) u は $C_p(X)$ に関して, special outer functional である。

(2) $\mathrm{supp}(u)$ は, υX の有限集合で, $\mathrm{supp}(u) \cap (\upsilon X - X) \neq \phi$ をみたす。

証明. (1) ⇒ (2). $\mathrm{supp}(u)$ が, υX の無限集合とする

と，υX の開集合の列 $\{U_n\}$ を，互いに交わりがなく，各 n について，$U_n \cap supp(u) \neq \phi$ となるようにとれる。1.3 により，各 n に対して，$f_n \in C(X)$ を $f_n|\upsilon X - U_n = 0$，$u(f_n) = 1$ となるようにとれる。このとき，$C_p(X)$ から $\mathbb{R}$ への任意の連続な線形写像 u_0 に対して，$supp(u_0)$ は有限集合であるから，十分大きい n に対して $u_0(f_n) = 0 \neq 1 = u(f_n)$ である。すなわち，u は 3.1 の b) をみたさないことになる。また，u が $C_p(X)$ 上の写像としては連続でないならば，当然 $supp(u) \cap (\upsilon X - X) \neq \phi$ となる。

(2) ⇒ (1)．u は (2) の条件をみたすものとする。今，$supp(u) = \{x_1, \cdots, x_k ; y_1, \cdots, y_j\}$ で，$supp(u) \cap (\upsilon X - X) = \{y_1, \cdots, y_j\}$ とする。u は

$$u = \alpha_1 \delta_{x_1} + \cdots + \alpha_k \delta_{x_k} + \beta \delta_{y_1} + \cdots + \beta_j \delta_{y_j}$$

と表せる。ここで，δ_z は $\delta_z(f) = f(z)$ で定義される写像 $\delta_z : C(\upsilon X) \longrightarrow \mathbb{R}$ である。u は明らかに $C_p(X)$ 上では連続でない。また，$\{f_n\}$ を $C(X)$ の任意の列とする。

$$Z_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ f_n^{-1}(f_n(y_i)) \} \qquad (i = 1, 2, \cdots, j)$$

と定めると，Z_i は υX の zero-set であるから，$Z_i \cap X \neq \phi$ が各 $i = 1, 2, \cdots, j$ について成り立つ。各 $Z_i \cap X$ から1点 z_i をとる。そこで

$$u_0 = \alpha_1 \delta_{x_1} + \cdots + \alpha_k \delta_{x_k} + \beta_1 \delta_{z_1} + \cdots + \beta_j \delta_{z_j}$$

と定めると，$u_0 : C_p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続かつ線形であり，
各 n に対して，

$$
\begin{aligned}
u_0(f_n) &= \alpha_1 f_n(x_1) + \cdots + \alpha_k f_n(x_k) + \beta_1 f_n(z_1) + \cdots + \beta_j f(z_j) \\
&= \alpha_1 f_n(x_1) + \cdots + \alpha_k f_n(x_k) + \beta_1 f_n(y_1) + \cdots + \beta_j f(y_j) \\
&= u(f_n)
\end{aligned}
$$

となる。よって，u は $C_p(X)$ に関して，special outer functional である。

3.3. 定理．位相空間 X に対して，次は同値である。

(1) X は $\aleph_0$-bounded (i.e. 任意の可算部分集合の閉包は compact) である。

(2) $C_p(X)$ に associate する barrelled space が normable であって，$C_p(X)$ に associate する $\aleph_0$-barrelled space は $C_p(X)$ に関して special outer functional をもたない。

証明．(1) → (2)．$\aleph_0$-bounded ならば pseudocompact であるから，(2) の前半は 2.6 の結果から明らか。さらに，X が $\aleph_0$-bounded ならば，$\mathcal{B}_{\aleph_0}$ のメンバーはすべて，X の部分集合である。したがって，$C_{\mathcal{B}_{\aleph_0}}(X)$ から $\mathbb{R}$ への任意の連続な線形写像 u に対して $supp(u) \subset X$ となる。よって，$C_{\mathcal{B}_{\aleph_0}}(X)$ は $C_p(X)$ に関して，special outer functional を

もたない。

(2) → (1)．(2)の前半から，X は pseudocompact でなければならない。また，X が $\aleph_0$-bounded でないとすれば，ある可算集合 $A \subset X$ がとれて，$(cl_{\beta X} A) - X \neq \phi$ とできる。$y \in (cl_{\beta X} A) - X$ となる点 y をとり，$\delta_y : C_{B_{\aleph_0}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ を，$\delta_y(f) = f(y)$ で与えられる写像とすると，3.2 により，δ_y は $C_p(X)$ に関して special outer functional である。

3.4．定理．位相空間 X に対して，次は同値である。

(1)　X は compact である。

(2)　$C_p(X)$ に associate する barrelled space は normable であり，$C_p(X)$ に関して special outer functional をもたない。

証明．(1) → (2)．X が compact ならば，$X = \mu X = \beta X$ であるから，明らか。

(2) → (1)．(2)の前半から，X は pseudocompact となり，$\beta X = \mu X$ が得られる。また後半から，$\mu X = X$ が得られる。よって，$X = \beta X$ となる。

文 献

[1] Asanov, M.O. and Shamgunov, N.K.; The topological proof of the Nachbin-Shirota's theorem, Comment. Math. Univ. Carolinae 24, (1983), 693-699

[2] Jarchow, H.: Locally Convex Spaces, B.G. Teubner Stuttgart, 1981.

[3] Kelly, J.L. and Namioka, I.; Linear topological spaces, Princeton, 1963.

[4] Nachbin, L; Topological vector spaces of continuous functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 40, (1954), 471-474.

[5] Schmets, J.; Espaces de fonctions continues, Lecture notes in math. 519, Springer-Verlag, 1976.

[6] Shirota, T.; On locally convex vector spaces of continuous functions, Proc. Japan Acad. 30, (1954), 294-298