

「先天性の頑固さ」と「筋金入りの頑固さ」との違いについて

防衛大学校 寺澤 順 (Jun Terasawa)

1. continuum は、その autohomeomorphism が 恒等写像に限るとき、頑固 (rigid) であると言われる。先天的に頑固 (hereditarily rigid) とは、その子供たち (subcontinua) がすべて頑固なことを言う。また、そのどの 2 人のまともな (non-degenerate) 子供たちも、互いに同相でないとき、この continuum を、筋金入りに頑固 (strongly rigid) と言う。筆者は、数か月前に用意した論文 [1] の中で、頑固な continuum が、かなりたくさん存在することを、Jordan-Brouwer Separation Theorem を用いて示した。そこでも述べたように、先天的ないし筋金入りに頑固な continuum についても同じことが言えるかどうかは興味深い問題である。

2. [1] で、つぎの単純な定理が成立することを、述べ

ておいた。

『頑固さは、筋金入りならば、先天性である。』

この定理の逆は、一般には成り立たない。

事実、筋金入りに頑固な continuum Z 及びそのなかの 2 点 a, b を任意に取る。この Z としては、例えば、[1] に引用した（引用しただけで使わなかったが）Anderson-Choquet や Cook、或いは、極く最近の Maćkowiak の論文で構成されているものでよい。そして、積空間 $Z \times \{0, 1\}$ において 2 点 $(a, 0)$ と $(b, 1)$ とを同一視して得られる商空間 X （当然、continuum である）を取ると、この X は、先天的に頑固であるが、筋金入りにはそうでない。

それを見るために、まず、 $\psi: Z \times \{0, 1\} \rightarrow X$ を商写像とし $p = \psi(a, 0) = \psi(b, 1)$ 、 $Z_i = \psi[Z \times \{i\}]$ とする。 X は互いに同相な 2 人の子供たち Z_0, Z_1 を含み、筋金入りには頑固でない。

X が先天的に頑固であることを見よう。

X の任意のまともな子供 K を取り、 $h: K \rightarrow K$ を同相写像とする。 $h =$ 恒等写像を示せばよい。

$K \subseteq Z_i$ for either i なら、明白である。

$K \cap Z_i \setminus \{p\} \neq \emptyset$ for both i とすると、 $p \in K$ でなければならぬ。 $K_i = K \cap Z_i$ が continuum であることを見るのは

それほど難しくない。

$h(p) \neq p$ とすると、例えば $h(p) \in K_0 \setminus \{p\}$ である。

$h^{-1}[K_0 \setminus \{p\}]$ を考えれば、Janiszewski の定理から、 K_0 の、 p を含む、まともな子供 C が、 $h[C] \subseteq K_0 \setminus \{p\}$ と取れる。 C 、 $h[C]$ は、それぞれ、 Z の子供に同相で、一方は a を含み、他方は含まないので、ここに、 Z の性質に反して不合理である。

よって、 $h(p) = p$ である。

$h[K_0] \not\subseteq K_0$ とすると、 $h[K_0] \cap K_1 = A$ はまともな continuum であり、 $h^{-1}[A] \subseteq K_0$ と同相である。ところが、 $A \subseteq K_1$ は、 Z の b を含む子供と同相であり、 $h^{-1}[A]$ は、 a を含む子供と同相である。しかも、 h は、この 2 人の子供たちの間で a を b に写す同相写像を導く。これは Z の性質に反する。

従って、 $h[K_0] \subseteq K_0$ であり、同様に、 $h[K_1] \subseteq K_1$ である。

Z の標記の性質から、 $h|_{K_0}$ も $h|_{K_1}$ も恒等写像であり、ここに、 h が恒等写像であることが導かれる。

そこで、問題。

すぐわかるように、ここで構成した X は decomposable である。同じ性質を持った indecomposable continuum X を作れるかどうか？

文献：

[1] " Rigid continua are everywhere" (by the author) , in preparation.