

異なるバネで結ばれた非線形格子中の孤立波

横浜国大 工 岡田 佳子 (Yoshiko Okada)

渡辺 慎介 (Shinsuke Watanabe)

§ 1. はじめに

可変容量ダイオードを非線形キャパシターとした LC 梯子形回路と戸田格子との対応はよく知られている。実際に電圧パルスがその回路を安定に伝播し、戸田格子のソリトン解によって実験がよく説明できることが確かめられている。我々は、以前この LC 梯子形回路の非線形容量を一段おきに変化させた回路を電圧パルスが比較的安定に伝播することを実験的に確かめた。非線形容量は格子の非線形バネと等価であるので、この回路はバネ定数が周期的に変化する格子に相当する。また質量に対応するインダクターを周期的に変えた回路では孤立波は励起できなかった。

本報告では、バネ定数、または質量が周期的に、あるいはランダムに変化する格子において十分に局在する孤立波が伝播し得るかどうかを確かめる事を目的として計算機解析を行った結果を述べる。

数値計算では、100ケの質点からなる格子を考え、隣接格子間の相互作用には戸田ポテンシャル

$$\phi(r) = a \exp(-br)/b + ar - a/b \quad (1)$$

を採用する。ここで係数 a , b はバネ定数である。積 ab を一定に保ったまま $b \rightarrow 0$ の極限をとると、(1)式は調和ポテンシャル $ab r^2 / 2$ に一致する。従って積 ab は線形バネ定数を、係数 b の大きさは非線形性の強さを表している。ここでは(1)積 ab を一定とし、2種類の a を周期的及びランダムに配列した格子、(2) b を一定とし、2種類の a を周期的及びランダムに配列した格子、(3) 2種類の m を周期的及びランダムに配列した格子の6種類の格子を取り上げる。

数値計算では、格子の左端から戸田格子の1ソリトン解

$$f_n = A \operatorname{sech}^2(kn - \omega t) \quad (2)$$

$$A = a \sinh^2 k$$

を加えて孤立波を励起し、その伝播に関する様子を解析した。

§ 2. 数値計算結果

(1) バネ定数を変化させた格子 ($ab = \text{const.}$)

積 ab を一定 ($= 1$) に保ちながら2種類の a ($a_1, a_2 = a_1 + \Delta a$) を分布させた格子を考える。入力ソリトンの振

幅 A 及び Δa をパラメータとし、 $A = 0.1 \sim 10.0$, $\Delta a = 0.2, 0.4, 0.6$, について数値計算を行った。質量はすべて 1.0 としている。係数 a を一定に保っているから、この格子は非線形性を周期的に変化させていることになる。図1に $a_1 = 1.0$, $a_2 = 1.6$ を交互に配列した格子中を伝わる孤立波の振幅 A を $0.2, 1.0, 10.0$ とした場合の計算結果を示す。縦軸はバネの力の大きさを、横軸は時間を表している。N は格子の番号を示し、20段おきに隣接2格子の波形をプロットした。なお $N = 1$ の波形は入力した孤立波形である。孤立波の振幅が小さい範囲 ($A < 0.5$) では、振幅の減衰は非常に小さく、安定に伝播しているが、振幅が増加するに従い孤立波の後に小さな振動が残り振幅の減衰が大きくなる。

$ab = 1$ の条件下で、係数 a の異なる2種類のバネをランダムに分布させた格子における数値計算を図2に示す。図1と比較すると、ランダム格子では、周期格子に比べて若干振動の振幅が小さくなり、振幅の減衰も小さい。2つの格子を比較するために孤立波が50段進む間の振幅の減衰を図3にプロットした。●は周期格子、○はランダム格子の結果を表す。横軸に励起した孤立波の振幅 A を、縦軸に25段目と75段目の振幅比を取っている。両格子ともに、振幅の減衰は励起した孤立波の振幅及び Δa と共に増大している。入力波

の振幅が十分小さい場合には、どちらの格子でも、格子間隔の数倍程度の十分に幅の狭い孤立波が比較的安定に伝播し、特にランダム格子における振幅の減衰は周期格子より小さく、 $A \leq 2$ 程度の振幅まではほとんど減衰が見られない。したがってランダム格子では周期格子に比べて孤立波は、安定に伝播すると考えられる。

(2) バネ定数を変化させた格子 ($a, b \neq \text{const.}$)

係数 b を一定 ($= 1$) に保ちながら、2種類の係数 a ($a_1, a_2 = a_1 + \Delta a$) をもつバネを分布させた格子を考える。ここで b を一定にしたまま a を変化させているために積 a, b はもはや一定ではなく線形のパネ定数も変化していることになる。図4は $a_1 = b = 1.0$ とし、 $a_2 = 1.6$ を交互に周期的に配列した格子の計算結果を示す。振幅 $A = 0.2, 1.0, 10.0$ であり、孤立波の振幅が小さい $A = 0.2$ では(1)の格子と同様に比較的安定に伝播するが $A = 1.0$ になると、孤立波に肩が現れて、あとの振動も大きくなる。ところが、 $A = 10.0$ の大振幅になると振動は \sin 波形からクノイダル波に近い形に変わり、その振幅は逆に小さくなる。つまり伝播の安定性が回復してくることが興味深い現象と言えるだろう。

さらに、この条件下で、 a_1, a_2 をランダムに配列した格子での結果を図5に示す。図4と比較すると、後に不規則な

振動が残るが、孤立波の振幅の減衰は(1)の格子と同様にランダム格子の方が小さい。また周期格子と同様に、振幅が大きい $A = 10.0$ では、非常に安定に伝播しているのが明かである。図6は図3と同様に50段進む間の孤立波の振幅の減衰をプロットしたものである。 $A \leq 1$ では周期格子が、 $A \geq 1$ ではランダム格子の方が減衰は小さく、 $A \geq 3$ になると減衰が回復しているのが特徴である。

(3) 質量を変化させた格子 ($ab = \text{const.}$)

バネ定数の積 ab は一定に保ったまま、2種類の m ($m_1, m_2 = m_1 + \Delta m$) を分布させた格子を考える。図7に $ab = 1, m_1 = 1.0$ で $m_2 = 1.6$ を交互に分布した格子の計算結果を示す。振幅が小さい $A = 0.2$ においても、すでに後ろに振動が現れ、 $A = 1.0$ では孤立波が変形し、 $A = 10.0$ においては波形の変形及び振幅の減衰が著しく、孤立波はもはや存在し得ない。図8は質量をランダムに配列した格子での計算結果で、周期格子と同様に著しい振幅の減衰と波形の変形がみられる。また図9により振幅の小さい範囲 ($A \leq 1.0$) では周期格子の方が、振幅が増大すると逆にランダム格子の方が減衰は小さい。孤立波の減衰はバネ定数を変化させた格子に比べると非常に顕著に現れている。

§ 3. まとめ

以上6種類の格子における孤立波の伝播を計算機により解析した結果は、次のようにまとめられる。積 ab を一定に保ちバネ定数を変化させた格子では周期格子よりもランダム格子の方が孤立波は安定である。積 ab の一定でない格子では、振幅が小さい場合 ($A \leq 1.0$) には周期格子、振幅が 1.0 以上になるとランダム格子の方が孤立波は安定に伝播する。この格子では振幅が増大するに従って減衰は減少し、逆に安定性が回復するという特徴がみられた。また質量を変化させた格子では、振幅が小さい場合 ($A \leq 1.0$) では周期格子、振幅が 1.0 以上になるとランダム格子の方が孤立波は安定である事が分かった。またバネ定数の変化する格子では、質量の変化する格子に比べ、孤立波は安定に伝播するという結果を得、動機となった電気回路の実験結果と一致した。

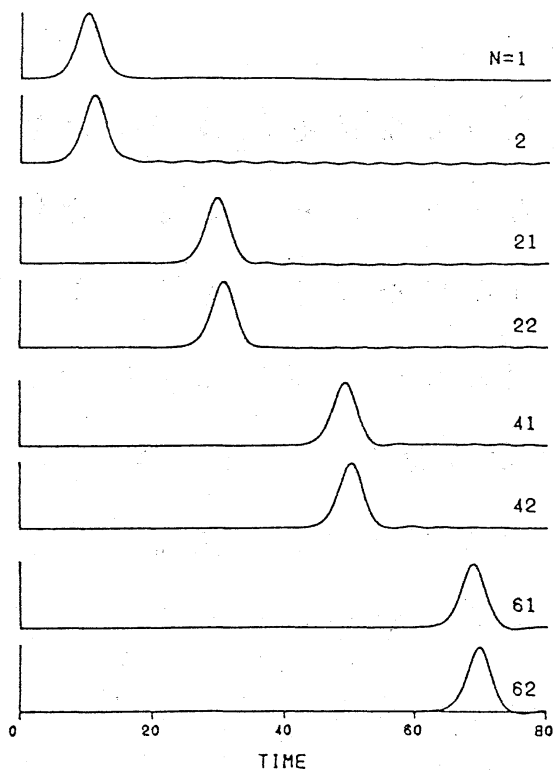


図 1.(a) バネ定数を周期的に変化させた格子 ($ab=1$)
振幅 $A=0.2$ 質量 $m=1.0$ $a_1=1.0$ $a_2=1.6$

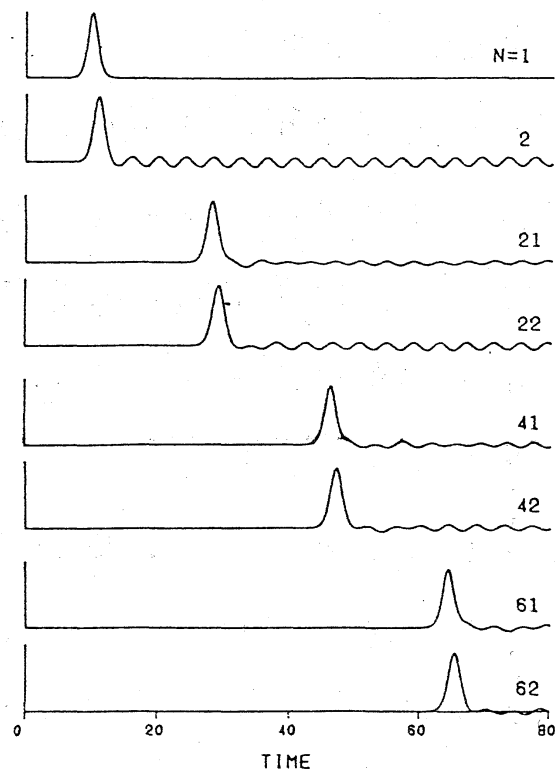


図 1.(b) バネ定数を周期的に変化させた格子 ($ab=1$)
振幅 $A=1.0$ 質量 $m=1.0$ $a_1=1.0$ $a_2=1.6$

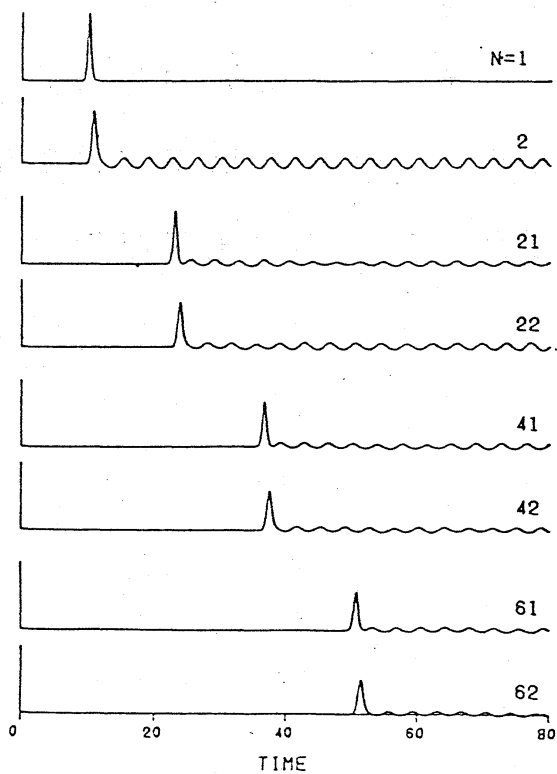


図 1.(c) バネ定数を周期的に変化させた格子 ($ab=1$)
振幅 $A=10.0$ 質量 $m=1.0$ $a_1=1.0$ $a_2=1.6$

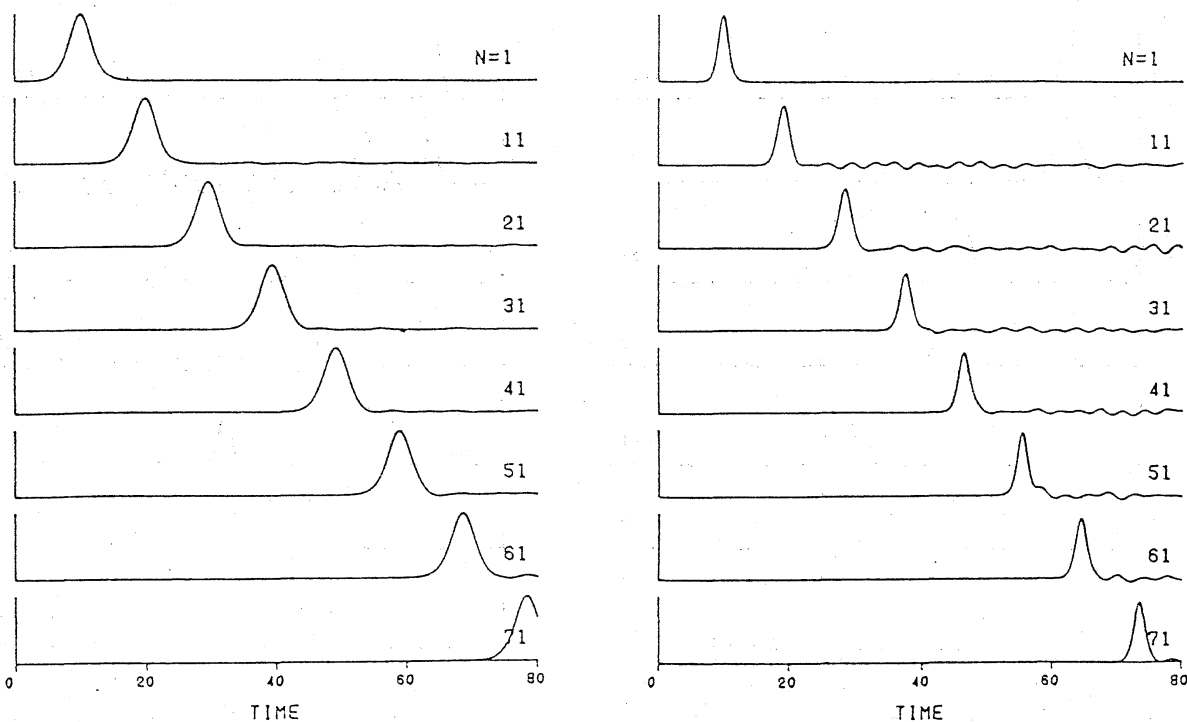


図 2 .(a)バネ定数をランダムに変化させた格子($ab=1$) 振幅 $A=0.2$ 質量 $m=1.0$ $a_1=1.0$ $a_2=1.6$
 図 2 .(b)バネ定数をランダムに変化させた格子($ab=1$) 振幅 $A=1.0$ 質量 $m=1.0$ $a_1=1.0$ $a_2=1.6$

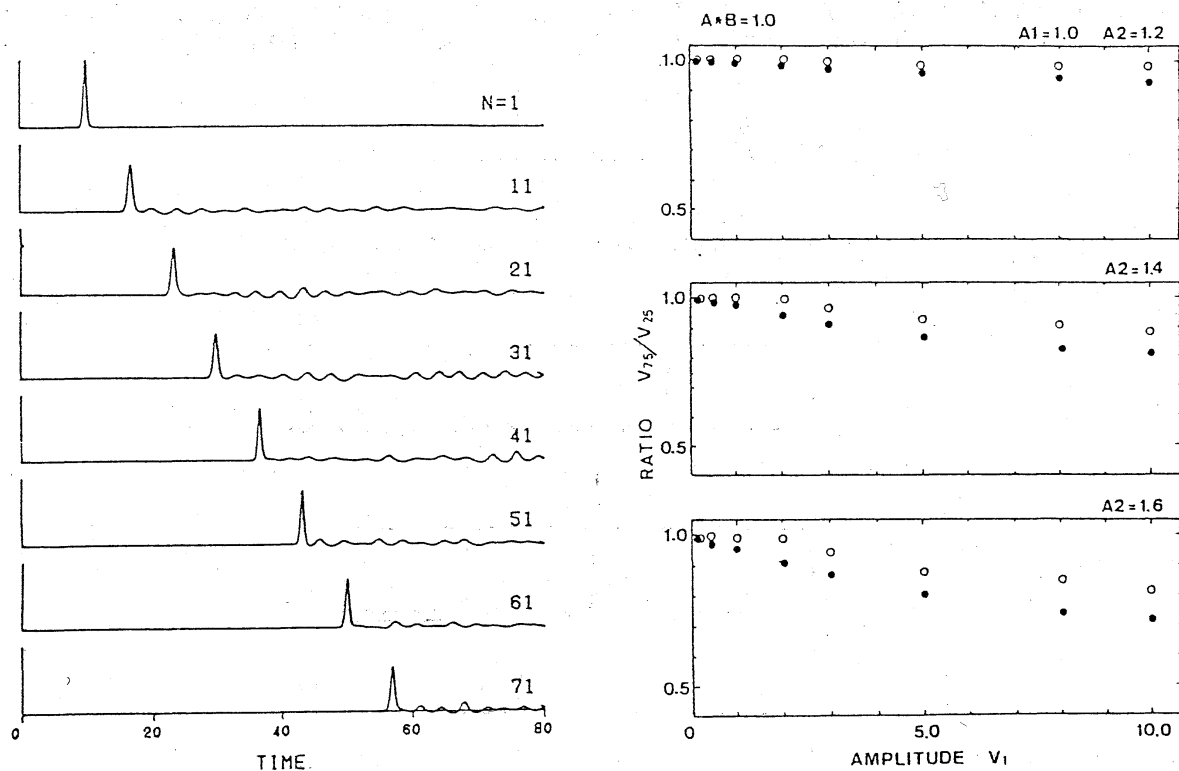


図 2 .(c)バネ定数をランダムに変化させた格子($ab=1$) 振幅 $A=10.0$ 質量 $m=1.0$ $a_1=1.0$ $a_2=1.6$

図 3 . バネ定数を変化させた格子($ab=1$) における振幅の減衰

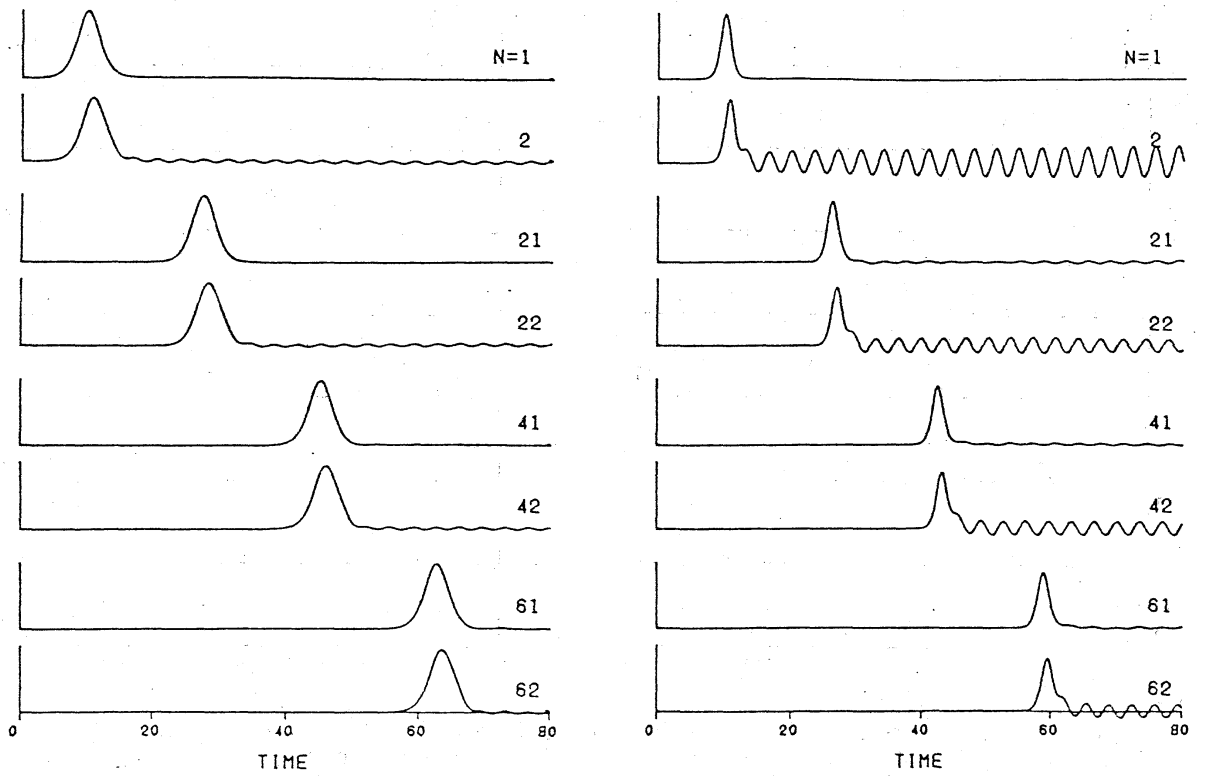


図 4.(a)バネ定数を周期的に変化させた格子($ab \neq 1$) 振幅 $A=0.2$ 質量 $m=1.0$ $a_1=b=1.0$ $a_2=1.6$
 図 4.(b)バネ定数を周期的に変化させた格子($ab \neq 1$) 振幅 $A=1.0$ 質量 $m=1.0$ $a_1=b=1.0$ $a_2=1.6$

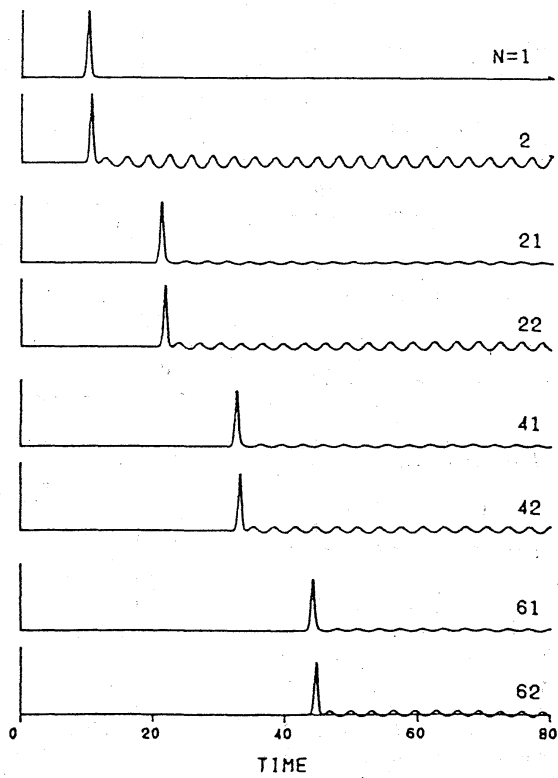


図 4.(c)バネ定数を周期的に変化させた格子($ab \neq 1$) 振幅 $A=10.0$ 質量 $m=1.0$ $a_1=b=1.0$ $a_2=1.6$

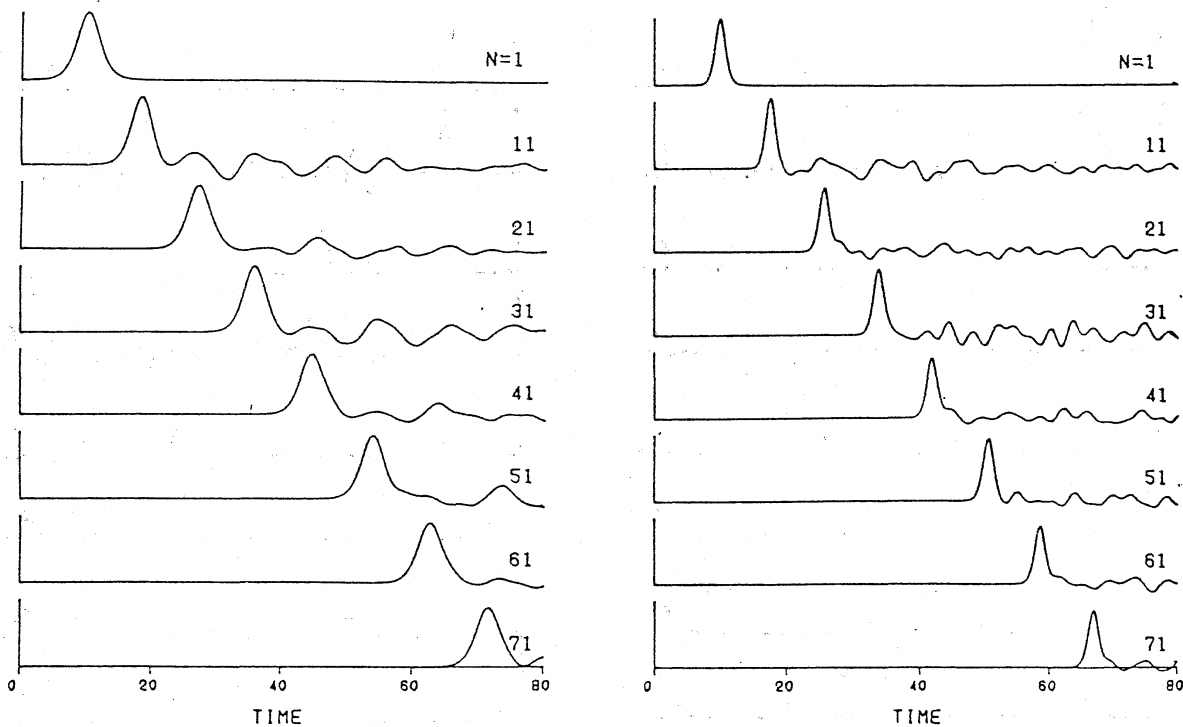


図5. (a)バネ定数をランダムに変化させた格子($ab \neq 1$) 振幅 $A=0.2$ 質量 $m=1.0$ $a_1=b=1.0$ $a_2=1.6$ 図5. (b)バネ定数をランダムに変化させた格子($ab \neq 1$) 振幅 $A=1.0$ 質量 $m=1.0$ $a_1=b=1.0$ $a_2=1.6$

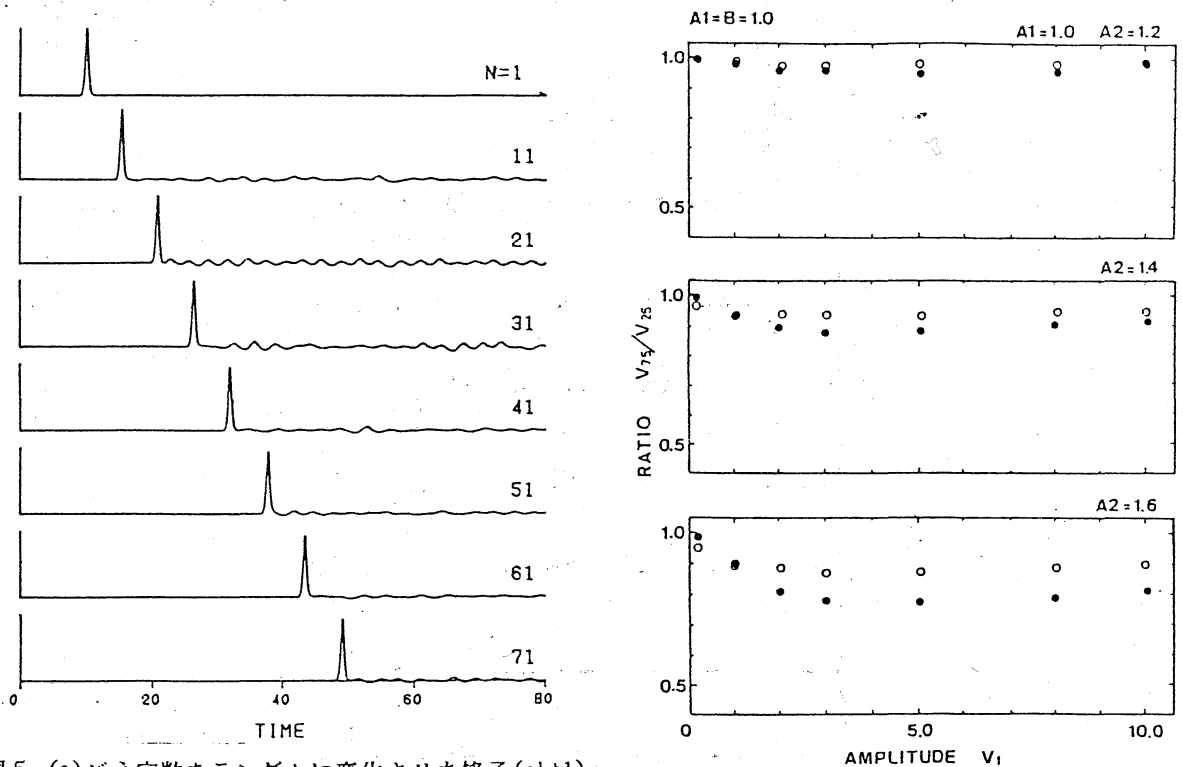


図5. (c)バネ定数をランダムに変化させた格子($ab \neq 1$) 振幅 $A=10.0$ 質量 $m=1.0$ $a_1=b=1.0$ $a_2=1.6$

図6. バネ定数を変化させた格子($ab \neq 1$) における振幅の減衰

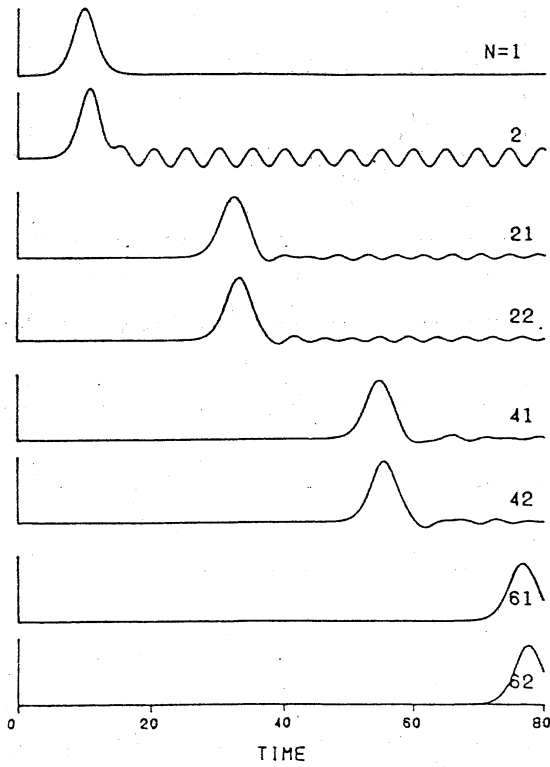


図7.(a)質量を周期的に変化させた格子($ab=1$)
 振幅 $A=0.2$ 質量 $m_1=1.0$ $m_2=1.6$ $a=b=1.0$

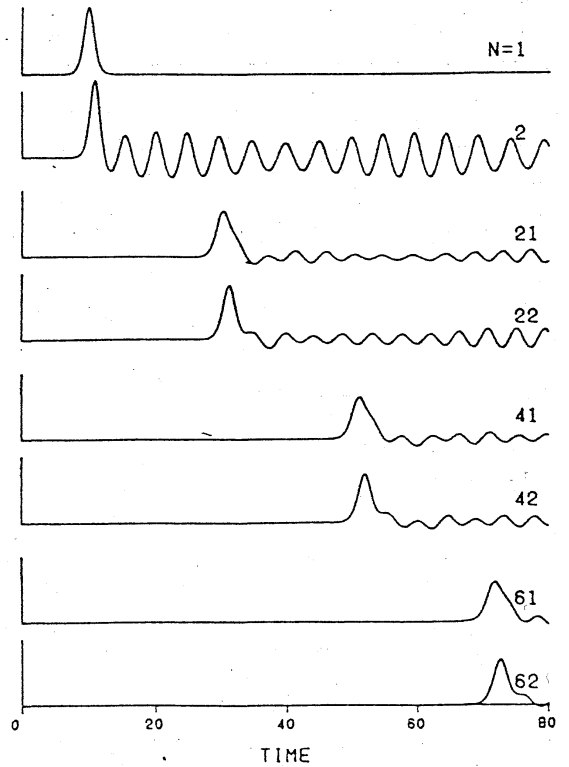


図7.(b)質量を周期的に変化させた格子($ab=1$)
 振幅 $A=1.0$ 質量 $m_1=1.0$ $m_2=1.6$ $a=b=1.0$

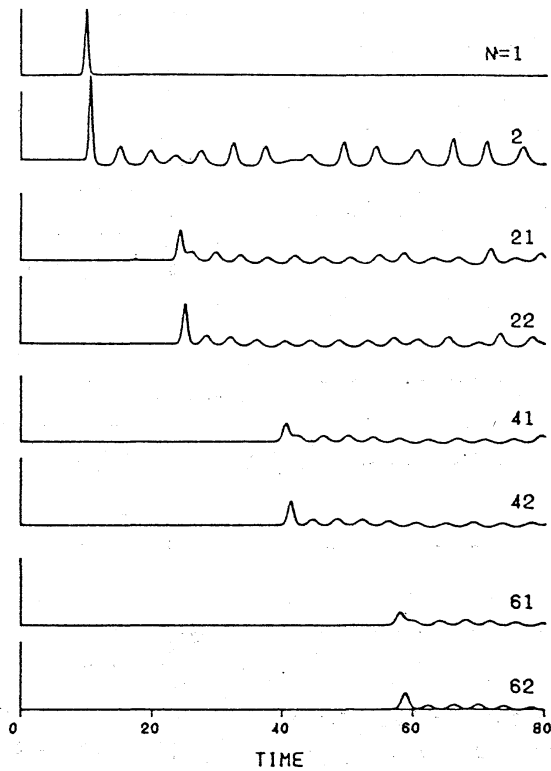


図7.(c)質量を周期的に変化させた格子($ab=1$)
 振幅 $A=10.0$ 質量 $m_1=1.0$ $m_2=1.6$ $a=b=1.0$

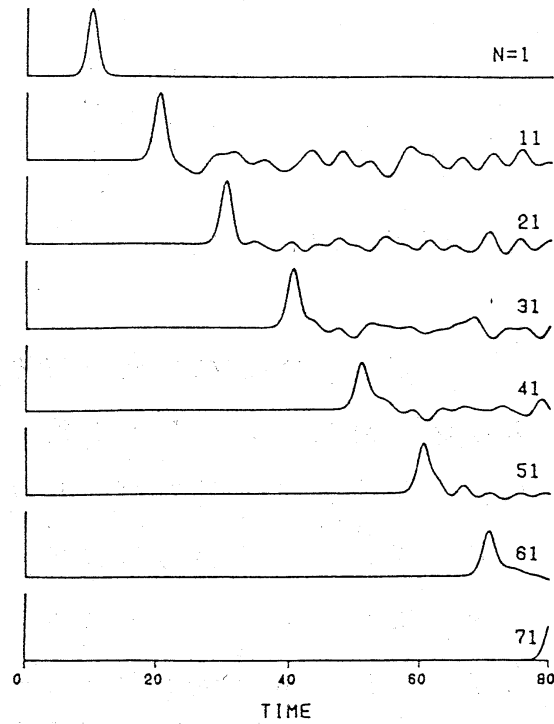
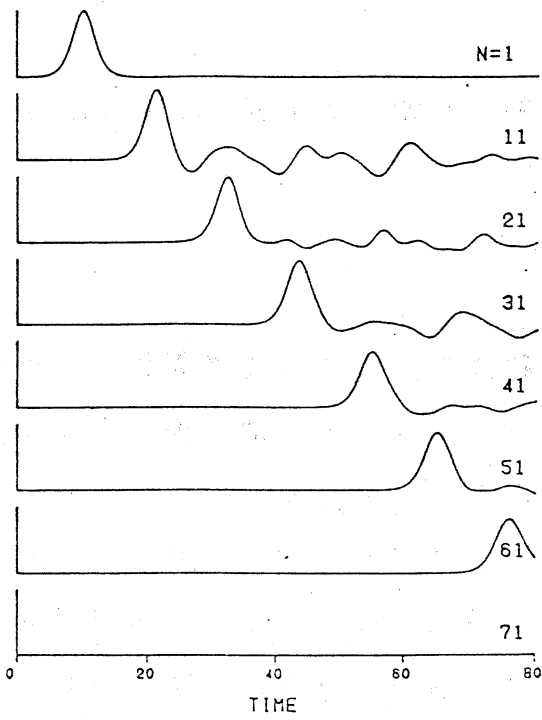


図 8.(a)質量をランダムに変化させた格子($ab=1$) 振幅 $A=0.2$ 質量 $m_1=1.0$ $m_2=1.6$ $a=b=1.0$ 図 8.(b)質量をランダムに変化させた格子($ab=1$) 振幅 $A=1.0$ 質量 $m_1=1.0$ $m_2=1.6$ $a=b=1.0$

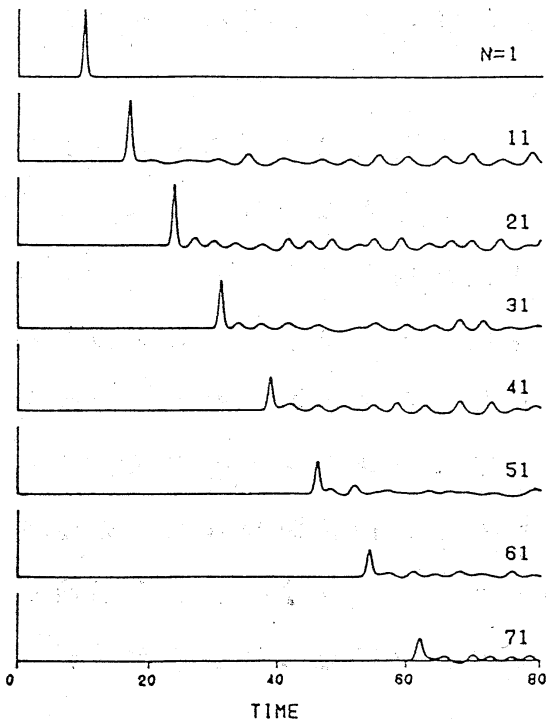


図 8.(c)質量をランダムに変化させた格子($ab=1$) 振幅 $A=10.0$ 質量 $m_1=1.0$ $m_2=1.6$ $a=b=1.0$

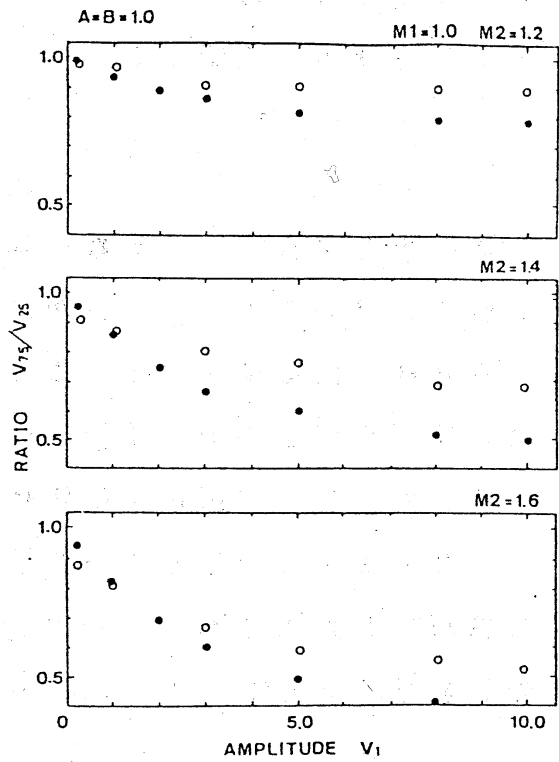


図 9. 質量を変化させた格子($ab=1$) における振幅の減衰