

戸田格子ソリトン解の複素 t 平面上での振舞

日大理工 紺野 公明 (Kimiaki Konno)

§ 1 はじめに

完全可積分な偏微分方程式の独立変数の 1 つを複素化し、その複素平面上でのソリトン解の振舞いからソリトン間に働く非線形相互作用を調べる試みが、KdV 方程式、Boussinesq 方程式、更に 1 次元の方程式で共鳴現象を示す Hirota-Ito 方程式についてなされてきた。複素平面上での 1 ソリトン解は虚軸に沿った極の等間隔の列状の分布によりあらわされる。衝突時において特異点の極は、非線形相互作用のためその属するソリトンを変えるなど分布の再配列が行われる。このように衝突時におけるソリトンの運動が、複素平面上での特異点の振舞いより調べられてきた。

この報告では、同じ方法を用いて完全可積分系の 1 つである戸田格子方程式の独立変数を複素化し、その複素平面上でのソリトン解の振舞いよりソリトン間に働く非線形相互作用を調べる。そのとき補助関数を導入する。この関数を用いるとソリトン解を表す極は、複素平面上の同じ位置のゼロ点として与えられ、解析が容易になる。多ソリトン解の補助関数のゼロ点は一般に解析的に求められず、Newton 法を用いて数値計算をし、衝突時を含めその全体の振舞いが調べられる。そこでこの Newton 法による数値解析を複素平面上での一つの力学系と考える。ゼロ点は吸引力的な不動点

として捉える。複素平面上のどの領域からあるゼロ点に収束してくるのか、その収束領域を求める Cayley の問題を考え、Julia 集合の補集合としての Fatou 集合を調べた。この Fatou 集合を調べる理由は次の通りである。1ソリトン解は単純な極の和として与えられる。しかし、1つの極を取り除くと全体の極に影響を与える。そのことは各々の極は独立した存在でないことを意味している。そのことを反映して1つのゼロ点に収束する領域も、単に複素平面全体をゼロ点の数で割った単純な領域からなるとは思われなく興味がある。その領域を調べることもそれ自身重要な問題である。

§ 2 では戸田格子方程式の1ソリトン解と2ソリトン解を与える補助関数のゼロ点の振舞いを、追越しによる衝突と正面衝突の場合について議論する。また § 3 ではこれらのゼロ点に収束する複素平面上の力学について議論する。最後の章ではまとめを行う。

§ 2 ソリトン解を与える補助関数のゼロ点の振舞

(1) 1ソリトン解のゼロ点の振舞

戸田格子方程式を

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = 2 e^{-r_n} - e^{-r_{n+1}} - e^{-r_{n-1}}$$

で与える。ここでいま

$$V_n(t) = e^{-r_n} - 1$$

とおくと、方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2} \log(1 + V_n) = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n$$

と書き換えられる。ここで補助関数 ϕ_n を導入する：

$$V_n = \frac{d^2}{dt^2} \log \phi_n(t)$$

1ソリトン解を与える ϕ_n は

$$\phi_n = 1 + A e^{kn - \beta t}$$

で与えられる。但し

$$\beta^2 = 4 \sinh^2 \frac{k}{2}$$

ここで、我々は変数 t を複素化し、補助関数のゼロ点について考える。この複素 t 平面上で $\phi_n = 0$ の m 番目のゼロ点の位置を

$$t_m(n, k) = t_{Rm}(n, k) + i t_{Im}(n, k),$$

と書くと、 t_{Rm} 、 t_{Im} は

$$t_{Rm} = \frac{kn + \delta}{\beta}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$t_{Im} = \frac{(2m+1)\pi}{\beta}$$

で与えられる。但し $\delta = \log A$ 。これらのゼロ点を用いるとソリトン解 V_n は

$$V_n \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-t_m)^2}$$

で与えられる。

図 1 a、b に $k=3$ のときの虚 t ($\text{Im } t$) と n 、及び実 t ($\text{Re } t$) と n に対するゼロ点の振舞いを示す。1ソリトン解を与えるゼロ点は、虚軸に沿って等間隔に列状に無限遠方まで分布し、実軸に沿っては n に比例して変わってゆく。実 t と n とのグラフは、ソリトンの軌道を与えている。そのとき振幅には、実 t 軸に近いゼロ点が大きな寄与を与える。しかし、非線形効果のためにゼロ点は独立して存在しえなくソリトンの運動を決めるのは、ゼロ点全体の振舞いである。2ソリトン解の衝突時に、これら各々のソリトンに属するゼロ点がどのように振舞うかを次に取り扱う。

(2) 2ソリトン解のゼロ点の振舞

2ソリトン解を与える ϕ_n は

$$\phi_n = 1 + A_1 e^{\eta_1} + A_2 e^{\eta_2} + A_3 e^{\eta_1 + \eta_2}$$

で与えられる。但し

$$\eta_i = k_i n - \beta_i t, \quad (i = 1, 2)$$

$$\beta_i^2 = 4 \sinh^2 \frac{k_i}{2},$$

$$A_3 = - \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2 - 4 \sinh^2((k_1 - k_2)/2)}{(\beta_1 + \beta_2)^2 - 4 \sinh^2((k_1 + k_2)/2)} A_1 A_2.$$

戸田ソリトンでは β_i が正と負の両符号をとれること、即ち追越し

による衝突と正面衝突が考えられることと、 A_3 の値が

$$0 < A_3/A_1A_2 < 1$$

の範囲のものであることが特徴である。

まず振幅の違う2つのソリトンの追越しによる衝突を考える。第2図に $k_1=3$, $k_2=1.8$ の場合を示す。図2aにはソリトンの衝突の波形を示す。図2bより n を変えてゆくとゼロ点にはそれが属していたソリトンから他のソリトンへ移り変わるものと、そうでなくそのゼロ点の複素平面での位置の虚数部分が衝突時に大きく変わるがまた同じソリトンへ戻ってくるものと2種類あることが分かる。これを詳しく見てみると、大きなソリトンに属するゼロ点の一部は、小さなソリトンに属するゼロ点へ変わって小さなソリトンを形成する。残った大きなソリトンに属していたゼロ点は、衝突時に β_1 が $\beta_1 - \beta_2$ と変わり、中間状態のソリトンを形成する。その複素平面上の位置の虚数部分は

$$t_{1m} = \frac{(2m+1)\pi}{(\beta_1 - \beta_2)},$$

で与えられる。更に中間状態のソリトンは、始めに存在していた小さなソリトンと結びつき複素平面上でゼロ点の分布の再配列が行われ、大きなソリトンを与えるゼロ点の列状の分布に移行して行く。そのときのゼロ点を基にした軌道の様子が図2cに示されている。

通常この場合のソリトンの衝突は、小さなソリトンを大きなソリトンが吸収し、それを後方に再放出すると言われている。しかし、このゼロ点による振舞いから見られることは、ソリトンの衝突は、大きなソリトンが小さなソリトンを放出し、自らは中間状態のソリトンになり、そして他の小さなソリトンを吸収して元の大きなソリトンに再構築されると言うことである。

他方、波数が $k_1 \sim k_2$ の振幅が同じぐらいのソリトン間の衝

突の場合は、実 t 軸に近いゼロ点が交換されるゼロ点からなるので、中間状態を与えるソリトンの複素平面での位置は、実 t 軸から離れている。そこで、ソリトンの波形は衝突時に2つのソリトン間に深い谷が出来る。

正面衝突による $k_1 = 3, k_2 = 2.5$ 場合のゼロ点の振舞いを第3図に示す。図3aにソリトンの衝突の波形を示す。衝突時の振幅は大きなソリトンのそれより大きくなっていることに注目したい。図3bより実 t 軸に近い2つのソリトンに属するゼロ点の位置の虚数部分は、ほぼ同じ値を持つので衝突時にその値を大きく実 t 軸の近くと遠くに変化させることが特徴である。その結果、大きなソリトンに属するゼロ点の実 t 軸に近い位置の虚数部分の値は小さくなる。そのためそのゼロ点は振幅に大きく寄与し、正面衝突時にその振幅を大きくする。ゼロ点の振舞いを見ると、それが属しているソリトンを変えることはない。これが正面衝突と追越しによる衝突の大きな違いである。又衝突時におけるゼロ点の位置の変化の特色は、小さなソリトンに属するゼロ点はその位置の虚数部分の値をあまり変えず、大きなソリトンに属するゼロ点がある位置を変えるように衝突が行われる。ゼロ点を基にしたソリトンの衝突の軌道を第3cに示す。

このように t を複素化してそこでのゼロ点の振舞いから、ソリトンの衝突を見るとその詳しい機構が見え、衝突時の振舞いが十分に理解できることが分かった。

§ 3 戸田格子の複素力学

補助関数 $\phi_n(t)$ のゼロ点を Newton 法を用いて計算することは、複素平面上で一つの力学系を与えていることになる。ここでのゼロ点は吸引的不動点である。この Newton 法については、あるゼロ点にどのような複素平面上の領域から収束してくるのかという収束領域を求める Cayley の問題がある。その領域を J

u l i a 集合の補集合として F a t o u 集合とここでは呼ぶ。

今までは多項式、有理関数についての J u l i a 集合と F a t o u 集合が調べられてきた。ここでは戸田格子に対する補助関数の F a t o u 集合を見て行く。この補助関数は、指数関数を含むので、いままで調べられてきた関数とは t を大きな値に持って行ったところでの振舞いが著しく異なる。そのため F a t o u 集合においても、今までの解析では得られなかった結果が期待される。

補助関数のゼロ点はソリトンの個数に関係なく可付番無限個存在する。その各々のゼロ点に、どのような領域から収束してくるかは、ソリトンの振舞いを決める極のダイナミクスと関連して興味もてる。

複素力学系としての N e w t o n 法を

$$t_{n+1} = t_n - \frac{\phi_n(t_n)}{\phi_n'(t_n)}$$

で与える。ここで $'$ は t についての微分を表す。ここで $t_n = t_{n+1} = t$ と置くと $\phi_n(t) = 0$ がこの力学系の不動点を与えることが分かる。今回の数値計算では、1ソリトン解と2ソリトン解の場合を調べた。

第4図に1ソリトンを与える補助関数

$$\phi_n = 1 + A e^{kn - \beta t},$$

の F a t o u 集合を示す。ここで $k=3$, $n=0$, $A=1$ である。但し $|\operatorname{Im} t| < 600$ の範囲約800個のゼロ点を考えた。ここで、N e w t o n 法での繰り返す回数は300回とし $|\operatorname{Re} t| > 30$ の時は $|\operatorname{Re} t| = \infty$ となったと見なして計算をそこで打ち切った。

第4 a 図に、 $-10 \leq \text{Re } t \leq 5, -6 \leq \text{Im } t \leq 6$ の範囲について、また第4 b 図に、第4 a 図を拡大した $-2.5 \leq \text{Re } t \leq 2.5, -3 \leq \text{Im } t \leq 0$ の範囲に初期値を取ったときの上記に示された範囲のゼロ点に収束する点が黒で示されている。黒の大きな帯状の領域はその領域内にあるゼロ点に収束し、その周りにある1つ1つの領域は初期値をそこの黒の位置にとれば他のゼロ点へ収束する領域を表す。これらの図より1つのゼロ点に収束する大きな領域の周りに、他のゼロ点に収束する黒の領域が規則的に、またその小さな領域の周りにおなじ構造を持つ領域が自己相似の構造を持って分布している。どのゼロ点に属するかは白黒の図では判断できないが、上で述べた約800個のゼロ点に収束する領域がここに集約されている。このことは1つのゼロ点は独立して存在するのではなく、互いに影響し合っていることを如実に示している。白の領域は無限遠方に、詳しくは $\text{Re } t = +\infty$ に収束するものとみなせる。

2ソリトン解を与える補助関数の F a t o u 集合は、もっと複雑である。追越しによる衝突と、正面衝突での衝突時での収束する領域の分布は、ソリトンの振舞いと対比してみると興味あるものであるが、ここでは残念ながら白と黒では示せない。ここでは $|\text{Im } t| < 600$ の範囲の約2000個のゼロ点を考えた。第5図には $n = -4$ に固定した追越しによる衝突を $k_1=3, k_2$ を $\beta_1/\beta_2=2$ から決めた場合について示した。大きなソリトンに属するゼロ点に収束する帯状の領域の間に割り込むように小さなソリトンに属するゼロ点に収束するやはり帯状の領域が見える。これら大きな収束領域の周りには、他のゼロ点に収束する領域が規則的な入れ子構造になっているのが見える。第6図に $n = -7$ に固定した正面衝突前の様子を $k_1=3, k_2$ を $\beta_1/\beta_2=-2$ から決めた場合について示した。小さなソリトンを与えるゼロ点に収束する領域は図の右側に主にある。大きな収束する領域の周りの構造は、追越しによる衝突の場合と違っている。即ちこの白黒の図からは判断できないが、左側の大きな帯状の収束領域の周りに、すでに右側の小さなゼロ点に収束する領域が表れている。逆に右側の大きな収束領域の周りに、大きなソリトンを与えるゼロ点に収束する領域が有る。この様な構造

を持つ $Fatou$ 集合がどのような理由で生ずるのかはこれからの問題であるが、2ソリトン解を与える特異点が、1ソリトン解の場合と同様に、各々のゼロ点ばかりでなくソリトンも独立したものでないことを示している。

§ 4 まとめ

戸田格子ソリトンの間に働く非線形相互作用を t を複素化し、その複素平面上での特異点の振舞いより調べた。ソリトンの衝突時には、特異点の複素平面上の位置、特にその虚数部分が著しく変化することが示された。追越しによる衝突では、特異点が属するソリトンを交換し、他のソリトンに属する特異点に移り変わる特異点と、属する特異点は変わらないが中間状態のソリトンを形成する特異点の2種類が見られた。又正面衝突では、小さなソリトンに属する特異点が大きなソリトンに属する特異点の間を通り抜けるとき、大きなソリトンに属する特異点はその位置を換えるように特異点の分布の変化が行われるように見える。これらは以前調べた $Boussinesq$ 方程式の場合と同じである。

t を複素化することにより、Newton法を複素平面上の一つの力学系と見なせ、ゼロ点は吸引力的不動点と考えられた。計算された $Fatou$ 集合の図を見ると、特異点の振舞いの中にも複雑なバックグラウンドが秘められていることが分かった。1つのゼロ点に収束してくる帯状の領域の周りに、他の無限個のゼロ点に収束する領域があり、その周りに又自己相似の構造が見られる。このことは、1ソリトンの解は特異点の単純な和として書くことができるが、実は非線形相互作用が存在することで1つの特異点には全ての特異点からの寄与が、複雑に折り重なってそこに及ぼされていることの証拠であると思われる。ここで調べられた戸田格子ソリトンについての $Fatou$ 集合には、いままで調べられている多項式、また有理関数では見られなかった様相を見いだすことが出来た。特に $t = \pm \infty$ での振舞いが異なる。多ソリトン解についての $Fatou$

u 集合は、より複雑で興味深いものがあり、これから詳しく調べて行かねばならない問題である。

この様に複素 t 平面上特異点の振舞いを基に、ソリトンの非線形相互作用を理解すると、ソリトンを単に波形の変化だけで見たいまままでの理解より、一歩中に踏み込んだ立場でソリトンの運動を理解できたものと思われる。

文献

- 1) K. Konno and H. Ito: Nonlinear Interactions between Solitons in Complex t -Plane. I, J. Phys. Soc. Japan 56 (1987) 897.
- 2) K. Konno: Nonlinear Interactions between Solitons in Complex t -Plane. II, J. Phys. Soc. Japan 56 (1987) 1334.
- 3) K. Konno: Soliton Solutions in Complex t -Plane for Hirota-Ito Equation, 1987年日本物理学会分科会報告

図の説明

図 1 a $k=3, A=1$ についての $\text{Im } t$ と n に対するゼロ点の振舞い。

図 1 b $k=3, A=1$ についての $\text{Re } t$ と n に対するゼロ点の振舞い。

図 2 a $k_1=3, k_2=1.8, A_1=1, A_2=1$ についての追越しによる衝突のソリトンの波形の振舞い。但し、離散的 n の間を直線で結んでいる。

図 2 b $k_1=3, k_2=1.8, A_1=1, A_2=1$ についての $\text{Im } t$ と n に対

する追越しによる衝突のゼロ点の振舞い。

図 2 c $k_1=3, k_2=1.8, A_1=1, A_2=1$ についての $\text{Re } t$ と n に対する追越しによる衝突のゼロ点の振舞い。

図 3 a $k_1=3, k_2=2.5, A_1=1, A_2=1$ についての正面衝突によるソリトンの波形の振舞い。但し、離散的 n の間を直線で結んでいる。

図 3 b $k_1=3, k_2=2.5, A_1=1, A_2=1$ についての $\text{Im } t$ と n に対する正面衝突でのゼロ点の振舞い。

図 3 c $k_1=3, k_2=2.5, A_1=1, A_2=1$ についての $\text{Re } t$ と n に対する正面衝突でのゼロ点の振舞い。

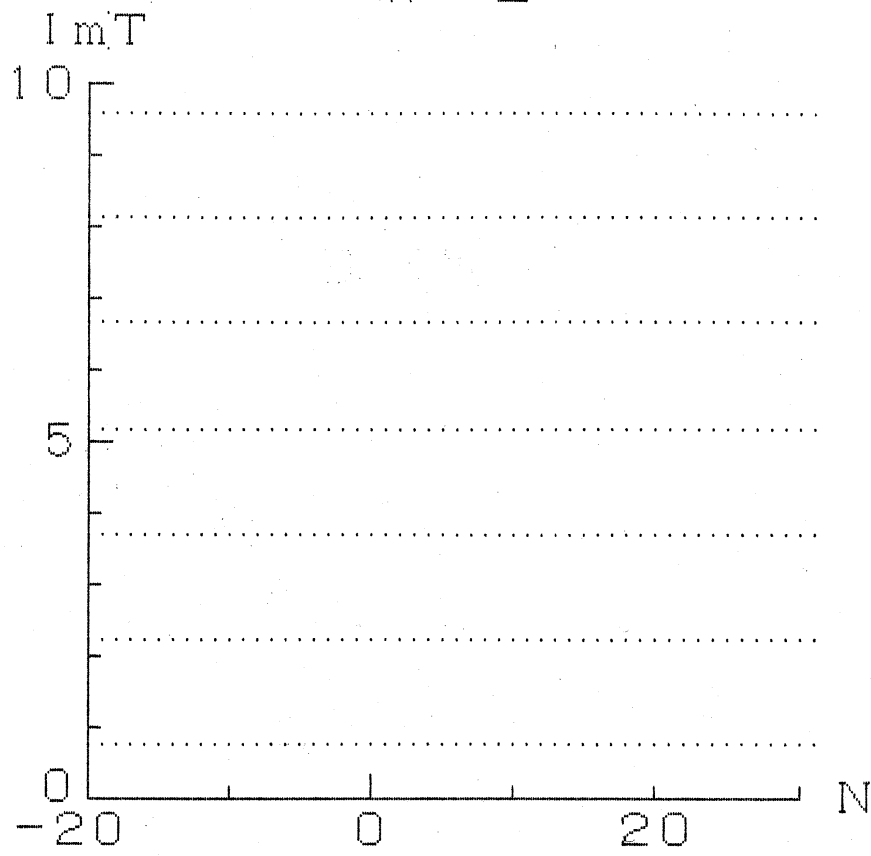
図 4 a $n=0$ に固定し、 $k=3, A=1$ について初期値を $-10 \leq \text{Re } t \leq 5, -6 \leq \text{Im } t \leq 6$ の範囲に取ったときゼロ点に収束する領域。

図 4 b $n=0$ に固定し、 $k=3, A=1$ について初期値を $-2.5 \leq \text{Re } t \leq 2.5, -3 \leq \text{Im } t \leq 0$ の範囲に取ったときゼロ点に収束する領域。

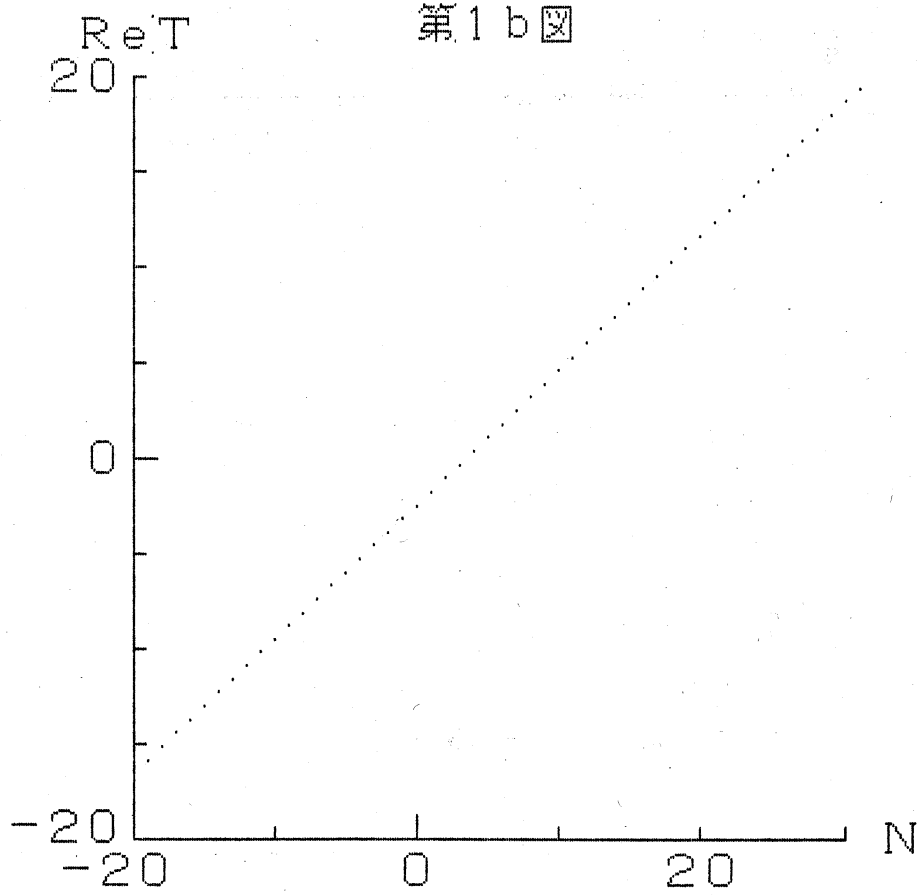
図 5 $n=-4$ に固定し、 $k_1=3, k_2$ を $\beta_1/\beta_2=2$ から決め $A_1=1, A_2=2$ としたときの初期値を $-9 \leq \text{Re } t \leq 1, 0 \leq \text{Im } t \leq 3$ の範囲に取ったときゼロ点に収束する領域。

図 6 $n=-7$ に固定し、 $k_1=3, k_2$ を $\beta_1/\beta_2=-2$ から決め $A_1=1, A_2=2$ としたときの初期値を $-12 \leq \text{Re } t \leq 14, 0 \leq \text{Im } t \leq 3$ の範囲に取ったときゼロ点に収束する領域。

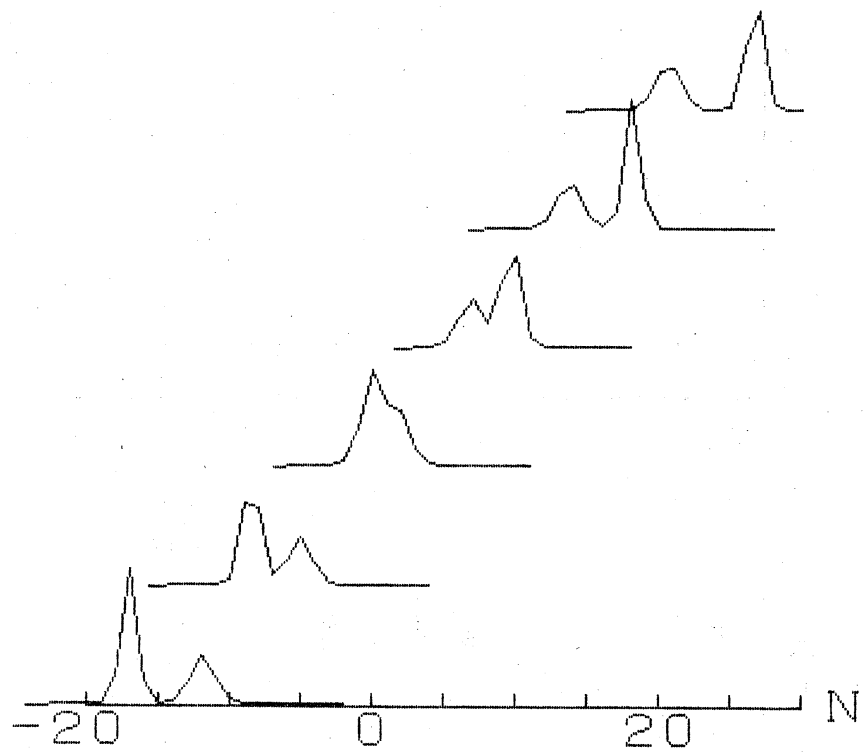
第1 a 圖



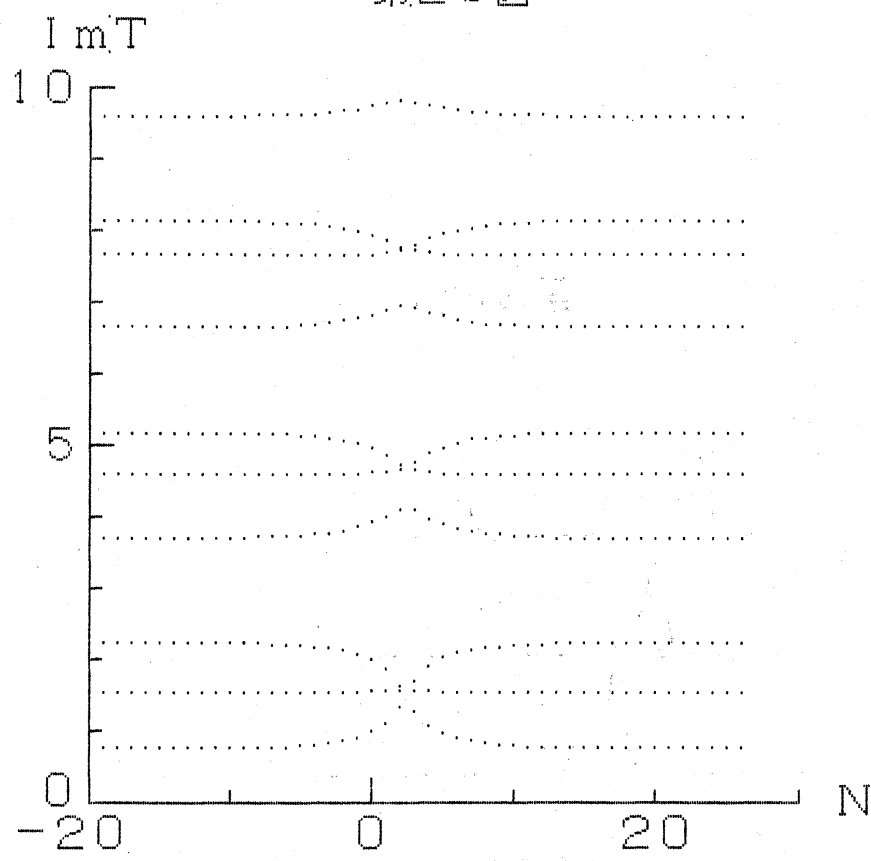
第1 b 圖



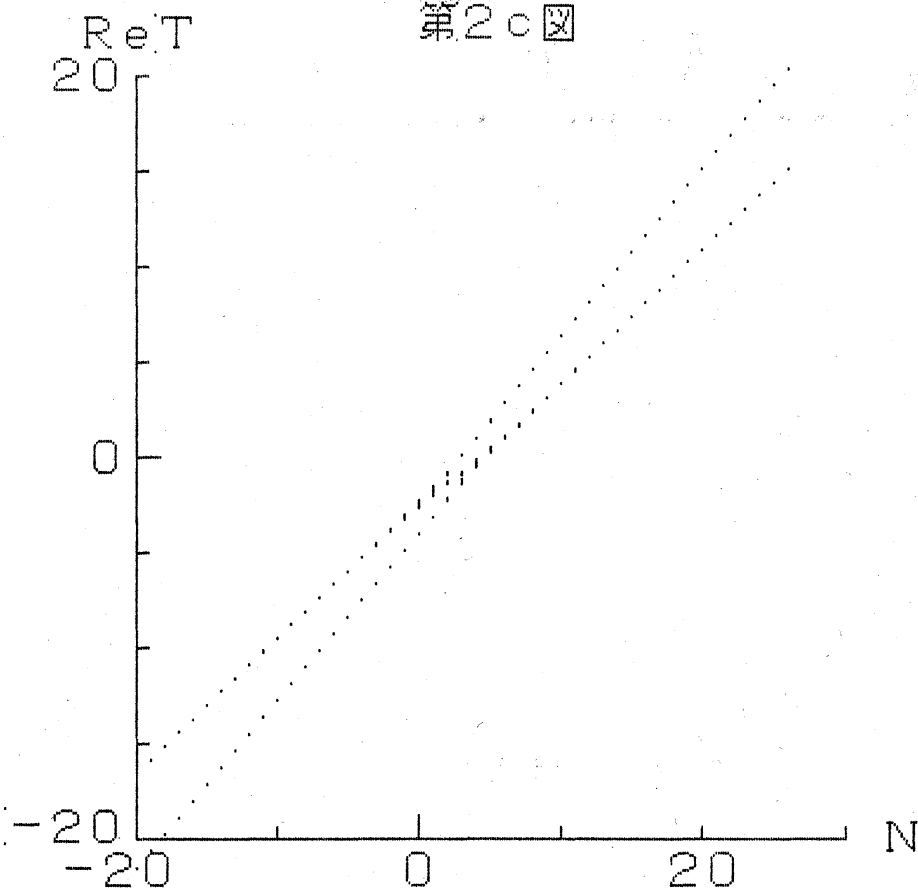
第2a图



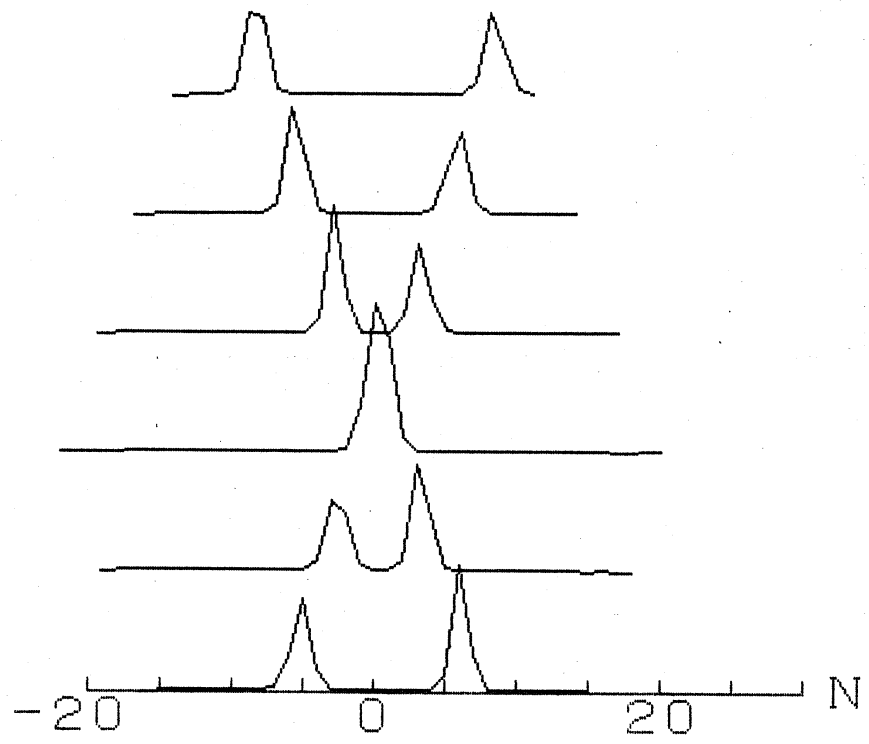
第2b图



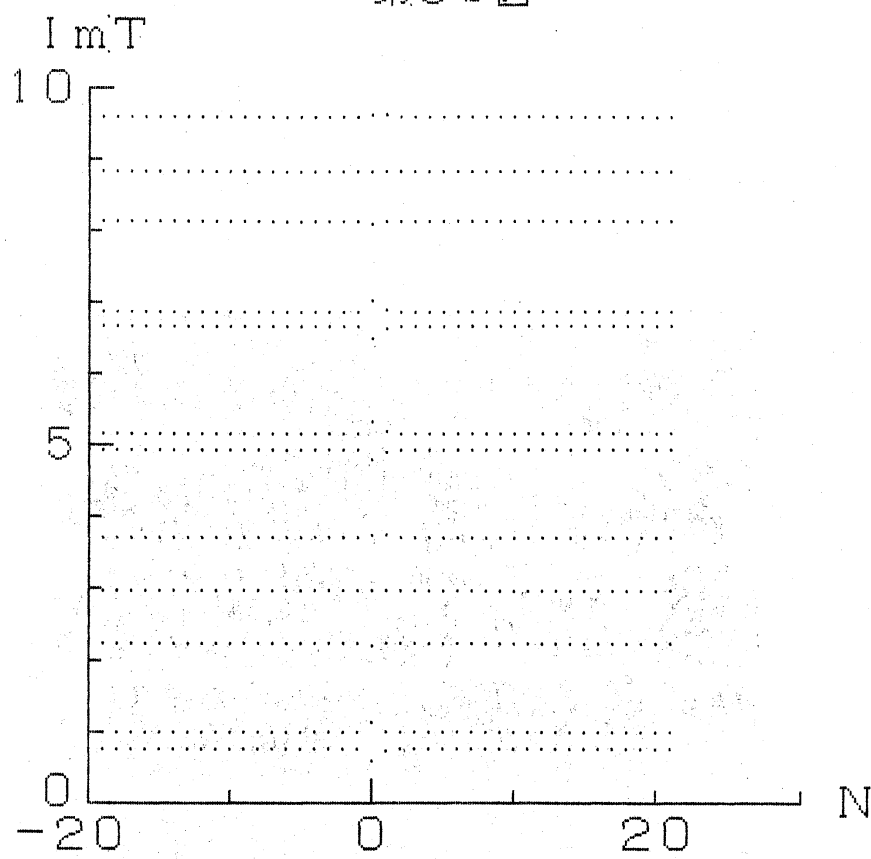
第2c图



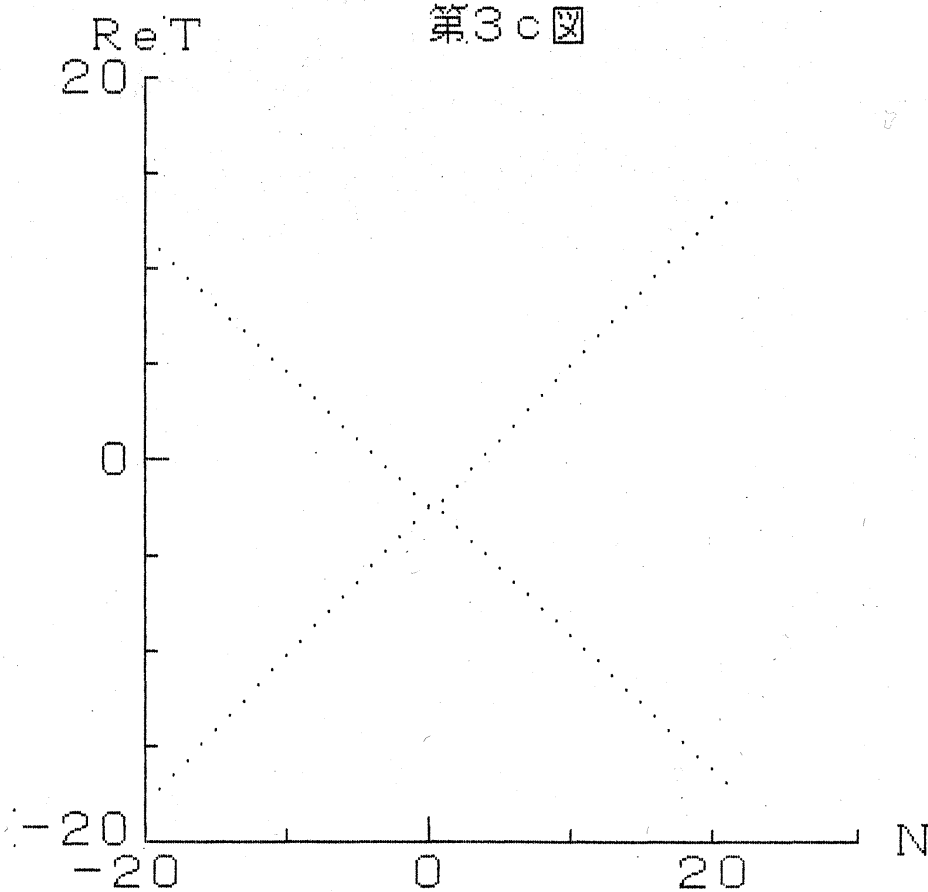
第3a图



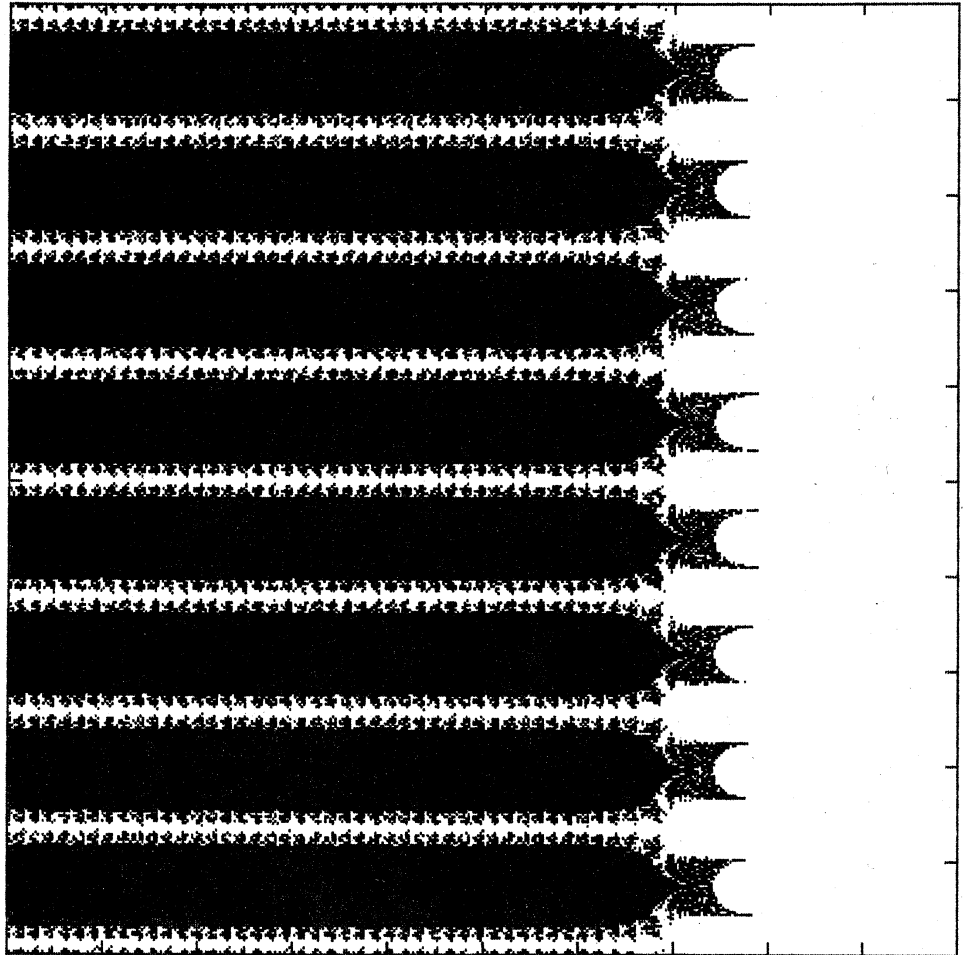
第3b图



第3c图

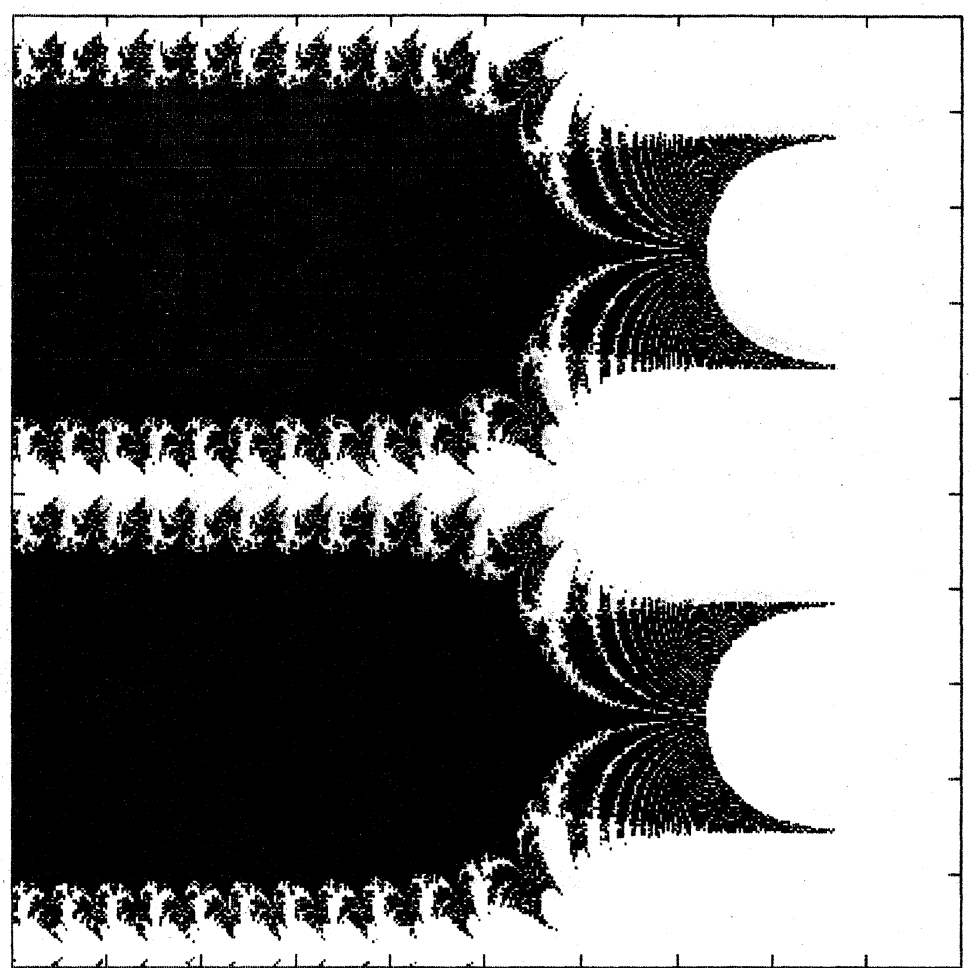


第4a图

 $\text{Re}T$
-10~5 $\text{Im}T$
-6~6

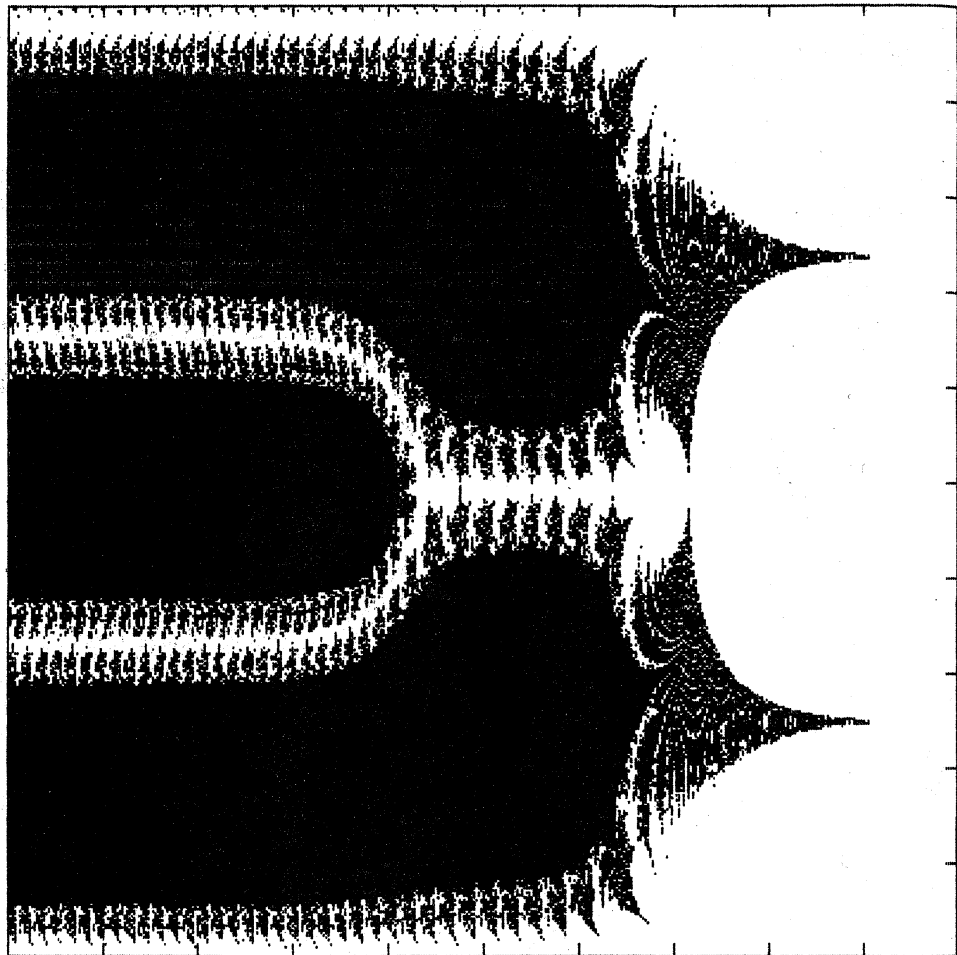
第4b图

ReT
-2.5~2.5
ImT
-3 ~0



第5図

ReT
-9~1
ImT
0~3



第6圖

ReT
-12~14
ImT
0~3

