数理解析研究所講究録
第 650 巻 1988 年 87-92

The 3+1 Dimensional Toda Equation and its Exact Solutions

Akira NAKAMURA (中村 明)

Physics Lab., Osaka University of Foreign Studies

We consider the 3+1 dimensional Toda equation of the following form, $\Delta \log V_n - V_{n+1} + 2V_n - V_{n-1} = 0$, where $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 = \partial^2/\partial r^2 + (2/r)(\partial/\partial r) + r^{-2}\{\partial^2/\partial\theta^2 + \cot\theta\,(\partial/\partial\theta) + (1/\sin^2\theta)\,\partial^2/\phi^2\}$. It is shown that if we confine the form of V_n to the special form $V_n = V_n(r, \theta, \phi) = r^{-2}V_n(\theta)$ then the system reduces to the integrable one and exact solutions can be obtained explicity.

ソリトン方程式とか，integrableな方程式とか，いわれているものは，非線形にもかかわらず，たいへんよい性質をもっていて，あつかいよい。しかしたかい次元になるとはなしが，そうきれいにゆくとは，かぎらない。いっぽう物理的現実からは，時間1次元tと，空間3次元x, y, zの3+1次元でじゅうぶんに，かんたんかつ応用性のひろい非線形システムがintegrableになれば，ひじょうに，やくにたつ。

そのような見方から，1+1次元で有名なソリトン方程式 KdV, Toda, Boussinesq, sine-Gordon, Nonlinear Schroedinger 方程式（以下eq.とかく）について，その高次元化について，みてみよう。KdV eq.は，それを2+1次元化した有名なKP eq.がintegrableである。Toda eq.も2+1次元化したものがintegrableであることが，しられている。Boussinesq eq.については，3+1次元化したものがsimilarity variable reductionによって1変数の式にreduceして，こたえをもち，それはもとの3+1次元の方程式でのspherical solitonに対応する。sine-GordonやNonlinear Schroedinger eqs.については，きれいなかたちの高次元化（x, y symmetricやx, y, z symmetricなかたちでの高次元化）をして，うまくいくという，はなしは

きかない。

さてここでは，Toda eq. の3+1次元化したものを，かんがえたい。

$$\Delta u_n - \exp(-u_n + u_{n-1}) + \exp(-u_{n+1} + u_n) = 0, \qquad (1)$$

$$\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2, \qquad (2)$$

$$= \partial^2/\partial r^2 + (2/r)\partial/\partial r + r^{-2}\{\partial^2/\partial \theta^2 + \cot\theta\, \partial/\partial\theta$$

$$+ (1/\sin^2\theta)\, \partial^2/\partial\phi^2\}. \qquad (3)$$

式(1)は，変数をかきなおして $\exp(-u_n + u_{n-1}) \equiv V_n$ とおくと，つぎになる．

$$\Delta \log V_n - V_{n+1} + 2V_n - V_{n-1} = 0. \qquad (4)$$

式(1) or (4)は，いままでのToda eq. のLaplacian operatorを1→2→3次元と，すなおに，ひろげたもので，方程式のかたち自身は，じゅうぶんに，かんたんで，きれいである。さてこの式(4)のこたえ $V_n = V_n(x, y, z)$ を x, y, z にfullに

dependするような，もっとも一般的なかたちで，もとめることは，いまは，むずかしすぎる．それでもうすこし，かんたんな，わくぐみで物理的に，おもしろいこたえをさがしたい。(3)のように，ふつうのいみの球座標をかんがえてV_nをつぎのかたちに制限する．

$$V_n = V_n(x, y, z) = V_n(r, \theta, \varphi) = r^{-2} V_n(\theta). \tag{5}$$

そうすると式(4)は，つぎになる。

$$(\partial^2/\partial\theta^2 + \cot\theta\,\partial/\partial\theta)\log V_n(\theta) - V_{n+1}(\theta) + 2V_n(\theta) - V_{n-1}(\theta) - 2 = 0. \tag{6}$$

今回わかったことは，まとめると，つぎのようなことである．

(i) 3+1次元Toda eq.をreduceした式(6)は，球関数＝ルジャンドル関数＝$P_N^n(\cos\theta)$でかかれる一連のこたえをもつ。

(ii) これらのこたえが，みたすboundary conditionは"molecule" boundary condition ($V_N = V_{-N} = 0$ or

$V_N = V_{-N-1} = 0$）である。

(iii) それらのこたえのあいだに Bäcklund transformationが存在して，それから(6)にたいするLax Pairをつくれる。そのようないみで，(6)式は integrable である。

(iv) $N \to \infty$, $\theta \to 0$, $N\theta = \mathrm{constant}$ というlimitで，うえのこたえは，2+1次元Toda eq. の cylindrical soliton にreduceする。

(v) えられた1-soliton solutionは，$0 \leq \theta \leq \pi$ のすべてでregularである。また V_n は(5)からも，わかるように x, y, z, n のすべての方向についてlocalizeしたなみ（solitary wave）といえる。

1+1次元で，よくつかわれるソリトン方程式の，まれいなかたちの3+1次元化で，全方向にlocalizeしているsolitary waveをみつけた例としては，Boussinesq eq. につぎ，2番めである．よくしられた1+1次元のほかに，2+1次元のcylindrical solitonと3+1次元の"deformed"（pureなspherical symmetryをもつこたえ $V_n = V_n(r)$ ではないから）spherical solitonと各次元すべてにわたってsolitary wave solutionが，わかった例としては，このToda eq.が，はじめての例であろう．

くわしくは，つぎの reference をみていただきたい。

Ref. Akira NAKAMURA, J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) pp. 3491.