数理解析研究所講究録
第 650 巻 1988 年 161-178

統計力学における可解格子模型

京大数理研 神保 道夫 (Michio Jimbo)
三輪 哲二 (Tetsuji Miwa)
尾角 正人 (Masato Okado)

このノートでは，eight-vertex SOS model (Andrews-Baxter-Forrester, J. Stat. Phys. 35 (1984)) と呼ばれる統計力学の2次元格子模型を例にとり，Baxter's ball game を行なう。この game は，次の 3 step に分かれている.

(1) star-triangle relation の解を見つけよ.

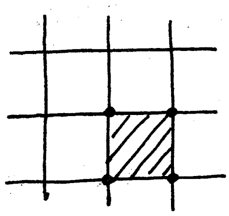
(2) corner transfer matrix 法を用いて，2D configuration sum を 1D configuration sum に書き直せ.

(3) 1D configuration sum を保型函数で表せ。

この game によって得られた結果が local state probability である。

§1. face model と local state probability

集合 $\mathcal{S}$ を用意する. さらに $\forall a, b, c, d \in \mathcal{S}$ に対して $u \in \mathbb{C}$ の関数 $W\left(\begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix} \middle| u\right)$ が与えられている時 "face model" が与えられたという. $\mathcal{S}$ の元は "local state", 関数 $W\left(\begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix} \middle| u\right)$ は "Boltzmann weight" と呼ばれる.



これは, 2次元格子上の各格子点上に fluctuation variable が存在し, 格子の最小単位(face)の周りの state が定まった時 face に相互作用が生じる統計模型を考えることに相当する.

格子 $\mathcal{L}$ 上の configuration $\mathcal{C} = \{a_i\}_{i \in \mathcal{L}}$ $(a_i \in \mathcal{S})$ が実現する確率は Boltzmann の原理により

$$p(\mathcal{C}) = Z^{-1} \prod_{\text{faces}} W\left(\begin{matrix} a_i & a_j \\ a_l & a_k \end{matrix} \middle| u\right)$$

$$Z = \sum_{\mathcal{C}} \prod_{\text{faces}} W\left(\begin{matrix} a_i & a_j \\ a_l & a_k \end{matrix} \middle| u\right)$$

で与えられる. ここで積 $\prod$ は $\mathcal{L}$ 上のすべての face にわたって和 $\sum$ はすべての configuration にわたってとられる.

site 1 の local state が a である "local state probability (LSP)" は次で定義される.

$$P(a) = \mathrm{Prob}\,(a_1 = a)$$
$$= \sum_{\ell} \delta_{a_1 a}\, P(\ell)$$

この LSP の結果は boundary condition に depend することを注意しておく。具体的には ground state configuration に fix して計算する。

§2　star-triangle relation

まず，eight-vertex SOS model（8V SOS model）を紹介しよう。8V SOS model は local state の集合 $\mathscr{A}$ と Boltzmann weight $W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix}\middle| u\right)$ で与えられる face model である。

$$\mathscr{A} = \mathbb{Z} + \zeta \qquad (\zeta \in \mathbb{C} \text{ はパラメタ})$$

$$W\left(\begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix}\middle| u\right) \equiv 0 \qquad \text{unless} \quad |a-b| = |b-c| = |c-d| = |d-a| = 1 \tag{2.1a}$$

$$W\left(\begin{matrix} a & a\pm1 \\ a\pm1 & a\pm2 \end{matrix}\middle| u\right) = \frac{[1+u]}{[1]} \tag{2.1b}$$

$$W\left(\begin{matrix} a & a\pm1 \\ a\pm1 & a \end{matrix}\middle| u\right) = \frac{[a\mp u]}{[a]} \tag{2.1c}$$

$$W\left(\begin{matrix} a & a\mp1 \\ a\pm1 & a \end{matrix}\middle| u\right) = \frac{[u]\sqrt{[a+1][a-1]}}{[1]\quad[a]} \qquad \text{以上複号同順} \tag{2.1d}$$

ここで，symbol $[u]$ は

$$[u] = \theta_1\left(\frac{\pi u}{L}, p\right)$$

$$\theta_1(u, p) = 2p^{1/8} \sin u \prod_{n=1}^{\infty} (1-2p^n \cos 2u + p^{2n})(1-p^n)$$

で表される楕円テータ関数であり，$L \neq 0$ はパラメタである。

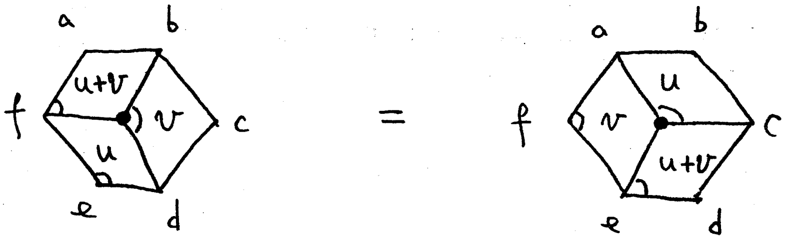
次に，star-triangle relation を説明しよう。star-triangle relation とは下の Boltzmann weight に関する3次同次代数方程式のことである．

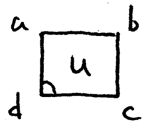
$$\sum_{g \in \mathcal{S}} W\left(\begin{matrix} a & b \\ f & g \end{matrix} \middle| u+v\right) W\left(\begin{matrix} b & c \\ g & d \end{matrix} \middle| v\right) W\left(\begin{matrix} f & g \\ e & d \end{matrix} \middle| u\right)$$

$$= \sum_{g \in \mathcal{S}} W\left(\begin{matrix} a & b \\ g & c \end{matrix} \middle| u\right) W\left(\begin{matrix} a & g \\ f & e \end{matrix} \middle| v\right) W\left(\begin{matrix} g & c \\ e & d \end{matrix} \middle| u+v\right) \qquad (2.2)$$

$$\forall a, b, c, d, e, f \in \mathcal{S}$$

これを graphical に次のように書くこともある。



つまり，

$= W\left(\begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix} \middle| u\right)$ で それを3つ書くと3つの積を意味し，真中の • はそこの local state での和をとっているのである．

8V SOS model で Baxter's ball game の (1) を実行したのは Baxter である。ここでは、それを check することにしよう。つまり 8V SOS model の Boltzmann weight (2.1) が star-triangle relation (2.2) を満たすことを証明するのである。

証明のために複素関数論の簡単な事実の復習から始めよう。

$[u]$ の quasi-periodicity は τ を

$$p = e^{2\pi i \tau} \quad (\operatorname{Im}\tau > 0)$$

で定めると、

$$[u+L] = -[u] \tag{2.3a}$$

$$[u+L\tau] = -\exp(-\pi i\tau - 2\pi i u/L)\,[u] \tag{2.3b}$$

また次の補題も容易である。

<u>Lemma</u> $f(u)$ は entire function で恒等的に 0 ではないとする。

$$f(u+L) = e^{-2\pi i B} f(u)$$

$$f(u+L\tau) = e^{-2\pi i (A_1 + A_2 u/L)} f(u)$$

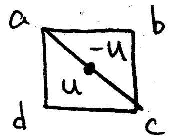
$\Rightarrow$ A_2 は非負整数であり、A_2 コの zero を $\bmod\ L\mathbb{Z} + L\tau\mathbb{Z}$ でもつ。

さらに、$\sum \text{zeros} \equiv L\left(B\tau + \frac{A_2}{2} - A_1\right) \bmod L\mathbb{Z}+L\tau\mathbb{Z}$.

次の等式は"inversion relation"と呼ばれている．

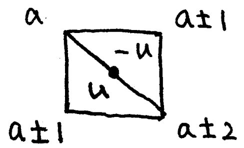
<u>Proposition</u> (inversion relation)

$|a-b| = |b-c| = |c-d| = |d-a| = 1$ の時，

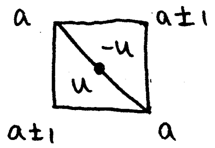


$$= \sum_{g \in \mathcal{S}} W\left(\begin{matrix} a & g \\ d & c \end{matrix}\middle| u\right) W\left(\begin{matrix} a & b \\ g & c \end{matrix}\middle| -u\right) = \frac{[1-u][1+u]}{[1]^2}\delta_{bd}$$

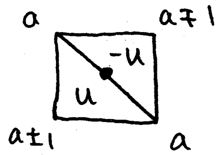
(proof) 次の3つのtypeの等式を証明すればよい．(複号同順)

(i)


$$= \frac{[1-u][1+u]}{[1]^2}$$

(ii)


$$= \frac{[1-u][1+u]}{[1]^2}$$

(iii)


$$= 0$$

ここで，和•は (i) $g = a\pm1$，(ii)(iii) $g = a\pm1,\ a\mp1$ (複号同順) でとっている(他の場合 Boltzmann weight は 0)．(i)(iii)は Boltzmann weight の表示，(2.1) より明白．(ii)は整理すると

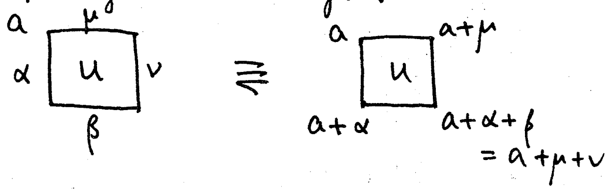
to show

$$\frac{[a\mp u][a\pm u]}{[a]^2} + \frac{[u][-u]\,[a+1][a-1]}{[1]^2[a]^2} - \frac{[1-u][1+u]}{[1]^2} = 0$$

左辺を u の関数とみて $f(u)$ とおくと，(2.3b) より

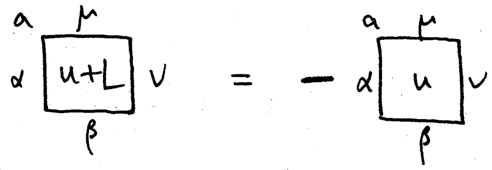
$f(u+L\tau) = \exp(-2\pi i\tau - 4\pi i u/L)\, f(u)$. よって, Lemma から, 3つ zero を探せば証明は終わる. $u=0,\pm 1$ は明らかに zero点である. //

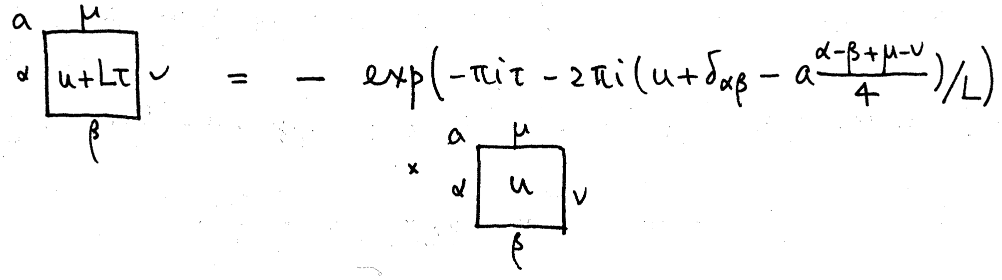
star-triangle relation の証明に移ろう. まず non-zero の Boltzmann weight を



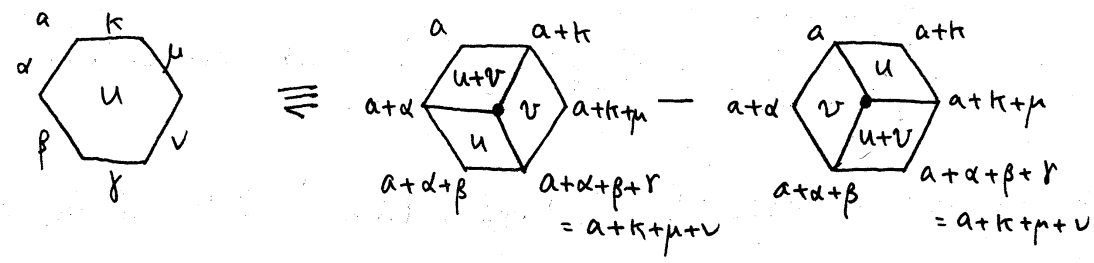
$\alpha, \beta, \mu, \nu = \pm 1$

と表示することにすると, Boltzmann weight の quasi-periodicity は,

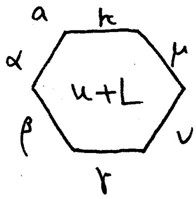




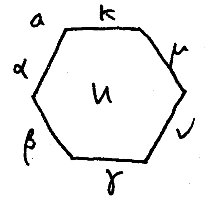
次に, trivial に 0 にならない star-triangle relation の (左辺)−(右辺) を, u の関数とみて (v はパラメタとみる)

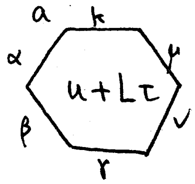


と書くと, quasi-periodicity は



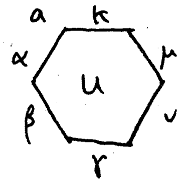
=

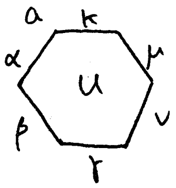




$$= \exp\left(-2\pi i\tau - 2\pi i\left(2u+v+\delta_{\alpha\gamma}+\delta_{\beta\gamma}-a\tfrac{\alpha+\beta-\mu-\nu}{2}\right)/L\right)$$

×





$= f(u)$ とおき $f(u) \not\equiv 0$ と仮定して Lemma を適用すると，

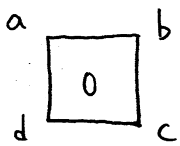
$B = 0$ ， $A_1 = \tau + \left(v+\delta_{\alpha\gamma}+\delta_{\beta\gamma}-a\frac{\alpha+\beta-\mu-\nu}{2}\right)/L$

$A_2 = 2$ より，$f(u)$ は 2つの zero 点を持ち，

$$\sum \text{zeros} \equiv L\left(1-\tau-\left(v+\delta_{\alpha\gamma}+\delta_{\beta\gamma}-a\frac{\alpha+\beta-\mu-\nu}{2}\right)/L\right)$$

$$\equiv -v-\delta_{\alpha\gamma}-\delta_{\beta\gamma}+a\frac{\alpha+\beta-\mu-\nu}{2} \mod L\mathbb{Z}+L\tau\mathbb{Z}$$

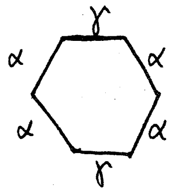
ところが，$f(0)=0$ ，$f(-v)=0$ は，



$= \delta_{bd}$ (initial condition)

と inversion relation (Proposition) より容易に check できる．よって $\delta_{\alpha\gamma}+\delta_{\beta\gamma}-a\frac{\alpha+\beta-\mu-\nu}{2} \not\equiv 0 \mod L\mathbb{Z}+L\tau\mathbb{Z}$ ならば

$f(u) \equiv 0$ が証明されたことになる。しかし、そのような場合は、L, ζ が generic なパラメタであることを考えれば $\alpha = \beta \neq \gamma$, $\mu = \nu = \alpha$ つまり star-triangle relation が



$(\alpha \neq \gamma)$

の type のものに限られる。ところが、これは v についての関数と思うことによって同様の方法で証明することができる。よって、次の定理が得られた。

<u>Th.</u> 8V SOS model の Boltzmann weight は star-triangle relation を満たす。

§3. restricted model

前セクションの初めに紹介した 8V SOS model には、パラメタが2つ (ζ, L) あった。これを "restrict" して "有限的な" (local state の集合が有限な) model を作ることを考えよう。

8V SOS model で parameter を

$$\zeta = 0 \quad , \quad L \in \mathbb{Z} \; (L \geq 4)$$

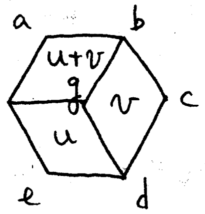
とし、さらに local state の集合を

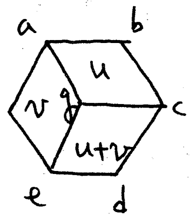
$$\mathcal{S}_L = \{1, 2, \cdots, L-1\}$$

としたものを "restricted model" と呼ぶ。この時、次の定理が成立する。

<u>Th.</u> restricted model の Boltzmann weight は finite で、star-triangle relation を満たす。

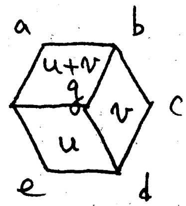
(proof) finiteness は明白。
restricted model の star-triangle relation を graphical に書くと次のようになる。

$\sum_{g \in \mathcal{S}_L}$ f 

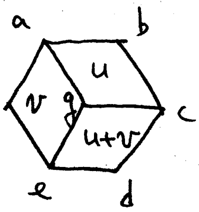
$=$ $\sum_{g \in \mathcal{S}_L}$ f 

if $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{S}_L$

よって、"generic" な 8V SOS model の star-triangle relation より、$a, b, c, d, e, f \in \mathcal{S}_L$ のとき

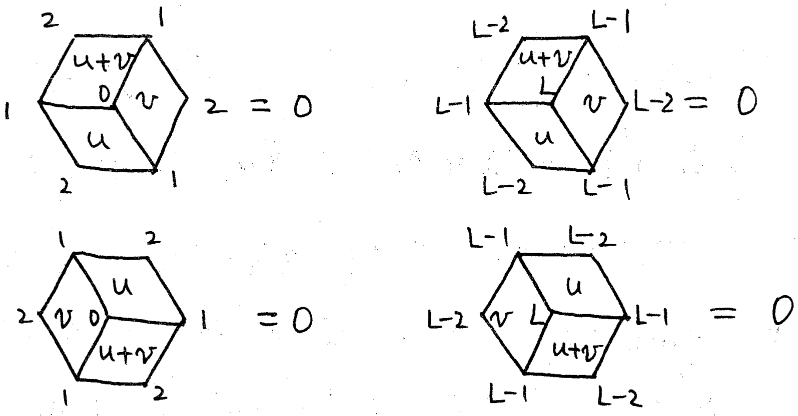
$\sum_{g \in \mathbb{Z} - \mathcal{S}_L}$ f 

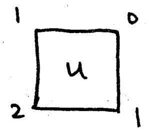
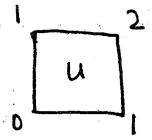
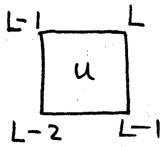
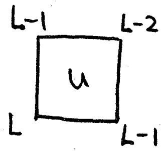
$= 0$

$\sum_{g \in \mathbb{Z} - \mathcal{S}_L}$ f 

$= 0$

を示せば O.K. これは non-trivial な場合は次の4通りしかない。



ところが，これは  =  $\equiv 0$ ，  =  $\equiv 0$ （$[L]=0$ に注意）より明白. //

上述の定理によって，star-triangle relation を満たす local state の集合が有限の model が得られた。

Baxter's ball game の次の step は (2) であるが，これに関しては，R.J. Baxter『Exactly solved models in statistical mechanics』Academic, London, 1982 あるいは最初に挙げた ABF による論文の appendix に譲る。

step (2) の output は LSP の次の表示である。

$$P(a|b,c) = \lim_{m\ \mathrm{even} \to \infty} P_m(a|b,c) \qquad (3.1a)$$

ただし，

$$P_m(a|b,c) = \frac{E(x^a, x^L)\, X_m(a,b,c;x^2)}{\sum_{0<\alpha<L} E(x^\alpha, x^L)\, X_m(\alpha,b,c;x^2)} \qquad (3.1b)$$

$$X_m(a,b,c;q) = \sum_{a} q^{\sum_{j=1}^{m} j|a_j - a_{j+2}|/4} \qquad (3.1c)$$

ここで、 $E(z,q)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-zq^{n-1})(1-z^{-1}q^{n})(1-q^{n})$ であり、(3.1c) における一次元系 $a=\{a_1,a_2,\cdots,a_{m+2}\}$ については和は、$a_i\in\{1,2,\cdots,L-1\}$, $|a_i-a_{i+1}|=1$ ($\forall i$) $a_1=a$, $a_{m+1}=b$, $a_{m+2}=c$ の制限のもとでとられる。(3.1c) の形の表示は "1D configuration sum" と呼ばれる。b, c は boundary condition を定義している。

これで、LSP の一応の表示は得られたが、これは低温展開の表示である。つまり、x という variable は低温の極限で 0 となる parameter なのである。従って、Baxter's ball game の (3) が重要になってくる。保型函数に書き直せば x = 1 (転移点) 近くの振舞いが、x = 0 の近くの振舞いから調べられるからである。

§4. q 差分方程式

ball game (3) のために $X_m(a,b,c)$ (3.1c) を Gaussian polynomial を用いて表示する。

<u>Def.</u> (Gaussian polynomial)

$m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}$ に対し、

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q^{m-n+1})}{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q)} \qquad 0\le n\le m$$

$$= 0 \qquad \text{otherwise}$$

Gaussian polynomial の簡単な性質として，次の3つを挙げる．

(i) $\begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = \delta_{n0}$

(ii) $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m-n \end{bmatrix}$

(iii) $$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{bmatrix} + q^n \begin{bmatrix} m-1 \\ n \end{bmatrix}$$
$$= q^{m-n} \begin{bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m-1 \\ n \end{bmatrix}$$

さて，$X_m(a,b,c)$ を次の差分方程式で unique に定まる q-series とみなす．

$$X_0(a,b,c) = \delta_{ab} \quad (4.1a)$$

$$X_m(a,b,c) = \sum_{d=b\pm1} q^{m|d-c|/4} X_{m-1}(a,d,b) \quad (4.1b)$$

$$X_{m-1}(a,0,1) = X_{m-1}(a,L,L-1) = 0 \quad (4.1c)$$

Lemma. $b, c \in \mathbb{Z}$，$c = b \pm 1$ の時

$$f_m(b,c) = q^{bc/4} \begin{bmatrix} m \\ \frac{m+b}{2} \end{bmatrix}$$ とおくと，

$$f_0(b,c) = \delta_{0b} \quad (4.2a)$$

$$f_m(b,c) = \sum_{d=b\pm1} q^{m|d-c|/4} f_{m-1}(d,b) \quad (4.2b)$$

が成立する．

(proof) (4.2a) は Gaussian polynomial の性質 (i) より明白.

(4.2b) は, 次の2式を証明すればよい.

$$(a)\quad f_m(b,b+1) = q^{m/2} f_{m-1}(b-1,b) + f_{m-1}(b+1,b)$$

$$(b)\quad f_m(b,b-1) = q^{m/2} f_{m-1}(b+1,b) + f_{m-1}(b-1,b)$$

(a) は

$$q^{b(b+1)/4}\begin{bmatrix} m \\ \frac{m+b}{2} \end{bmatrix} = q^{m/2+(b-1)b/4}\begin{bmatrix} m-1 \\ \frac{m+b}{2}-1 \end{bmatrix} + q^{(b+1)b/4}\begin{bmatrix} m-1 \\ \frac{m+b}{2} \end{bmatrix}$$

を示せばよいが, overall factor $q^{b(b+1)/4}$ を取り払えば性質 (iii) そのものである. (b) も同様 (iii) を使って証明される. //

<u>Th.</u> $1 \le a, b, c \le L-1$, $c = b \pm 1$ の時

$$X_m(a,b,c) = q^{-a/4}\{F_m(a,b,c) - F_m(-a,b,c)\} \tag{4.3a}$$

$$F_m(a,b,c) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q^{-L\nu^2+(\frac{L}{2}-a)\nu+\frac{a}{4}} f_m(b-a-2L\nu, c-a-2L\nu) \tag{4.3b}$$

は, (4.1) の解である.

(proof). まず initial condition (4.1a) を check しよう.
仮定より. $-L < b-a < L$, $0 < b+a < 2L$ であるから.
$m=0$ で non-zero なのは $F_0(a,b,c)$ の $\nu=0$ の部分

だけである． よって． $X_0(a,b,c) = q^{-a/4} \cdot q^{a/4} f_0(b-a, c-a)$
$= \delta_{ab}$．（(4.2a) に注意）．

(4.1b) は，(4.3) により $X_m(a,b,c)$ が $f_m(b',c')$ ($b',c' \in \mathbb{Z}$, $c' = b' \pm 1$) の重ね合わせによって定義されているから，(4.2b) により OK．

よって，後は (4.1c) を示せばよい． $m \to m+1$ としてまず

$$X_m(a,0,1) = 0$$

を考えよう．つまり，

(to show)

$$F_m(a,0,1) = F_m(-a,0,1)$$

これは， $$F_m(a,0,1) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} q^{-Lv^2 + (\frac{L}{2} - a)v + \frac{a}{4}} f_m(-a-2Lv, 1-a-2Lv)$$

$$= \sum_v q^{L(L-1)v^2 + (L-1)av + \frac{a^2}{4}} \begin{bmatrix} m \\ \frac{m-a}{2} - Lv \end{bmatrix}$$

Gaussian polynomial の性質 (ii) より，上式の summand は $a \to -a$, $v \to -v$ で不変．よって示された．

$$X_m(a, L, L-1) = 0$$

の証明も同様． //

次に Gaussian polynomial の次の事実に着目しよう．

α : m によらない定数 の時

$$\begin{bmatrix} m \\ \frac{m}{2} + \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[m \to \infty]{} \varphi(q)^{-1} \qquad ただし， \varphi(q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

さらに

<u>Formula</u> (Jacobi's triple product identity)

$$E(z,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-)^n q^{n(n-1)/2} z^n$$

に注意すると次の定理が得られる.

<u>Th.</u>

$$\lim_{m\ \mathrm{even}\to\infty} X_m(a,b,c)$$

$$= \varphi(q)^{-1} q^{\frac{a(a-1)+bc}{4}} \left\{ q^{-\frac{ar}{2}} E(-q^{(L-a)(L-1)+Lr}, q^{2L(L-1)}) \right.$$

$$\left. - q^{\frac{ar}{2}} E(-q^{(L+a)(L-1)+Lr}, q^{2L(L-1)}) \right\}$$

ただし, $r = \frac{b+c-1}{2}$

この定理によって, Baxter's ball game の (3) が完了した. 1D configuration sum $X_m(a,b,c)$ $(m\to\infty)$ を theta constant (保型函数) に書き直したからである.

§5. 対応原理

LSP $p(a|b,c)$ の表示の分母を見てみよう.

$$\sum_{0<\alpha<L} E(x^\alpha, x^L)\, X(\alpha,b,c;x^2)$$

ただし $X(a,b,c;q) = \lim_{m\ \mathrm{even}\to\infty} X_m(a,b,c;q)$

実は、この和も product form になる.(sums-of-products identity)

$$\sum_{\alpha} E(x^{\alpha}, x^{L})\, X(\alpha, b, c\,;\, x^{2}) = x^{bc/2}\, E(x, x^{3})\, E(x^{r}, x^{L-1}) \Big/ E(x, x^{2})$$

ここで天下りではあるが、affine Lie 環 $A_1^{(1)}$ の level l $(\in \mathbb{N})$, spin $j/2$ $(0 \leq j \leq l,\ j \in \mathbb{Z})$ の character $\chi_{jl}(z, q)$ を考えよう. ここでは $\chi_{jl}(z,q)$ がテータ関数

$$\Theta_{k,m}(z,q) = \sum_{\gamma \in k/2m + \mathbb{Z}} q^{m\gamma^{2}} (z^{-m\gamma} - z^{m\gamma})$$

の比で

$$\chi_{jl}(z,q) = \frac{\Theta_{j+1,\, l+2}(z,q)}{\Theta_{1,2}(z,q)}$$

と書けることが肝心である.

$$\chi_{jl}(x, x^{2}) = x^{☆} \frac{E(x^{j+1}, x^{l+2})}{E(x, x^{2})}$$

☆は適当な指数

という事実を考えると. sums-of-products identity は

$$\chi_{r-1,\, L-3}(x, x^{2})\, \chi_{s-1,1}(x, x^{2}) = \sum_{a} x^{☆}\, X(a, b, c\,;\, x^{2})\, \chi_{a-1,\, L-2}(x, x^{2}) \qquad (5.1)$$

$$(s = 1 \text{ or } 2)$$

と書き直せる.

ここまで来れば次のような Lie 環の pair を考えることはそう唐突ではない.

$$A_1^{(1)} \oplus A_1^{(1)} \supset A_1^{(1)} \quad \text{(diagonal embedding)}$$

表現の level $\quad L-3 \quad 1 \quad L-2$

大きい方の Lie 環の既約表現を小さい Lie 環に関してさらに既約分解することを character の言葉で書くと

$$\chi_{r-1,L-3}(z,q)\,\chi_{s-1,1}(z,q)$$

$$= \sum_a b_{r-1,s-1,a-1}(q)\,\chi_{a-1,L-2}(z,q) \qquad (5.2)$$

となる. そして, $b_{r-1,s-1,a-1}(q)$ は q の適当なベキを除いて, $X(a,b,c;q)$ と $r=\frac{b+c-1}{2}$, $s=\frac{b-c+1}{2}+1$ の対応で一致することが示される. 一旦 (5.2) を得てしまえば (5.1) は parameter を $z=x$, $q=x^2$ と specialize することによって得られる. 最終的な LSP の結果は

$$P(a|b,c) = \frac{b_{r-1,s-1,a-1}(x^2)\,\chi_{a-1,L-2}(x,x^2)}{\chi_{r-1,L-3}(x,x^2)\,\chi_{s-1,1}(x,x^2)}$$

と書かれる. 大きい Lie 環が boundary condition に, 小さい Lie 環が中心の local state に関係していることに注意しよう. 以上のことを我々は Lie 環との"対応原理"と呼んでいる.