

二次元 Jet の非線形安定性
(偶奇両モードを含む 4 波間の近共鳴)

原 研 藤村 薫 (Kaoru FUJIMURA)
相模工大 水島 二郎 (Jiro MIZUSHIMA)
岡山大工 柳瀬真一郎 (Shinichiro YANASE)

§ 1. はじめに

流れの非線形安定性を数値シミュレーションあるいは理論的に調べるときには、初期条件として単色波攪乱だけがある場合を考えることが可能である。このとき、時間が経つと単色波に対する全ての高調波が励起されるだけで、それ以外の波数を持つ攪乱が励起されることは有り得ない。

一方、実験的には純粹に単色波のみを励起することは不可能である。人為的に励起したモードのまわりには側帯波が必ず存在しており、それ以外にも連続スペクトルを持った除去不可能な残留攪乱が含まれている。残留攪乱と励起されたモードの振幅がいずれも十分小さい場合には、モード間の相互作用は無視できるので、励起された攪乱の線形安定性に従って攪乱は成長もしくは減衰を行う。しかし、励起された攪乱と残留攪乱の振幅が共に有限である場合には、励起された攪乱が自分自身との非線形相互作用によって、主流の変形だけでなく、全ての高調波を励起することは、数値シミュレーションの場合と全く同様であるが、その他に残留攪乱との非線形相互作用を生じ、励起された攪乱の発展に大きな影響を及ぼし時にはその性質を一新する場合がある。

側帯波の効果については Stewartson & Stuart (1971) や DiPrima, Eckhaus & Segel (1971) らにより定式化が行われた。彼らの定式化は臨界点近傍に限られていたが、任意の準中立領域への拡張は藤本 & 角谷 (1977) により行われた。さらに、任意の超臨界領域への拡張は藤村、柳瀬 & 水島 (1987) により行われた。

流れの中にいくつかの波数の攪乱が同時に存在するときにはそれらの攪乱の間に共鳴現象が生じることがある。藤村、柳瀬 & 水島 (1987) は 2 次元 jet 中に波数 α_1 , α_2 , α_3 を持つ 3 つの攪乱が流れ場に加えられた場合の 3 波間の相互作用を調べた。3 つの

波の複素周波数をそれぞれ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とし、また、振幅をそれぞれ A_1, A_2, A_3 とすると、共鳴条件

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3, \quad \omega_{1r} + \omega_{2r} = \omega_{3r}$$

が成立する場合、3波間には共鳴が生じ得る（但し添字 r は実部を示す）。このとき、振幅 A_1, A_2, A_3 に対する発展方程式は、

$$\begin{aligned} dA_1/dt &= \lambda_1 A_1 + \lambda_{-23} A_2^* A_3 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-221} |A_2|^2 A_1 + \lambda_{-331} |A_3|^2 A_1, \\ dA_2/dt &= \lambda_2 A_2 + \lambda_{-13} A_1^* A_3 + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2 + \lambda_{-332} |A_3|^2 A_2, \\ dA_3/dt &= \lambda_3 A_3 + \lambda_{12} A_1 A_2 + \lambda_{-113} |A_1|^2 A_3 + \lambda_{-223} |A_2|^2 A_3 + \lambda_{-333} |A_3|^2 A_3, \end{aligned} \quad (1)$$

と書くことができる。ここに、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は実数であり、それぞれ波数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ のモードの線形増幅率を与える。 $\lambda_{-23}, \lambda_{-13}, \lambda_{12}, \dots$ は Landau 定数に相当する複素定数である。藤村、柳瀬 & 水島は2次元 jet中に於いても、3波共鳴条件が満たされる可能性があることを示し、振幅発展方程式の係数を求め、3つの攪乱の振舞いについて詳しく調べた。

さらに、攪乱波の共鳴が本質的となる現象として、free shear layerにおける vortex pairing と、Blasius 境界層における Tollmien-Schlichting 波の Craik type の3次元化がとりわけよく知られている。vortex pairing については、Kelly(1967)が分数調波共鳴によってその機構を説明した。彼は、 $U = \tanh y$ という速度分布に対して線形中立モードに分数調波を加えると、分数調波の解が爆発しうることを示した。ここで、注意を要するのは、この流れのように反対称速度主流の場合、最も不安定なモード（第1固有モード）は y 方向に関して Hermite 対称性を有しており、攪乱の位相速度が0となることである。このとき共鳴条件としては

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3,$$

のみが課せられるので、線形安定特性が dispersive な場合には通常問題にならない高調波共鳴や分数調波共鳴が重要となる（本研究会で行った鉛直流体層の熱対流における高調波共鳴の問題も、主流速度が反対称なので、共鳴条件は波数に対してのみ課せられる）。ところで、実際の free shear layer の問題では、時間モードの代わりに空間モードを取り扱わねばならない。そのような場合、線形安定特性は dispersive になるので、共鳴条件としては、 ω_r と α について課されなければならない。また、流れは下流に行くに連れて成長するので、共鳴条件がある $x=x_0$ で厳密に成立したとしても $x=x_0 + \Delta x$ ($\Delta x \ll 1$) では共鳴条件は $O(\Delta x^{1/2})$ だけずれる可能性がある。それにもかかわらず、現実の

流れでは vortex pairing がしばしば観察される。このことは共鳴条件から周波数がずれても (detuning が大きくても) 近共鳴が成立するためであると予測される。

Blasius 境界層の Tollmien-Schlichting 波の 3次元化の問題は Craik(1971)が取り扱った。彼は波数 α を持つ Tollmien-Schlichting 波に波数 $(1/2\alpha, \pm\gamma)$ の oblique waveの対を重ね合わせると、共鳴条件を満足する (R, α) が求められ、そこでは oblique waveが爆発的に成長し得ることを示した。これは、Thomas & Saric (1981) の可視化実験によって 10 年後に確認された。しかし、この場合も実験と対応するのは空間増幅モードであり、さらに主流は x 方向に成長し、また、主流には非平行性も含まれている。このようなときに共鳴条件からの周波数のずれ (detuning) がどのように影響するのかについて、Nayfeh & Bozatti (1979) は多重尺度法に基づく解析を行い detuning が進めば oblique waveの爆発は抑制されることを示した。

Detuning が進めば、連立方程式 (1) は次の連立 Landau方程式に退化するであろうということは一般に予想される。

$$\begin{aligned} dA_1/dt &= \lambda_1 A_1 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-221} |A_2|^2 A_1 + \lambda_{-331} |A_3|^2 A_1, \\ dA_2/dt &= \lambda_2 A_2 + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2 + \lambda_{-332} |A_3|^2 A_2, \\ dA_3/dt &= \lambda_3 A_3 + \lambda_{-113} |A_1|^2 A_3 + \lambda_{-223} |A_2|^2 A_3 + \lambda_{-333} |A_3|^2 A_3. \end{aligned} \quad (2)$$

それは、大きな detuning が存在する場合、2次の項の位相が時間と共に激しく変化するため、長時間にわたる積分をした際に2次の項からの寄与が無くなるためである。このことは、例えば波数 α_3 の波と、波数 $\alpha_1 + \alpha_2$ の波の位相速度が十分異なっていれば両者の間にエネルギーのやり取りが存在しないことを反映している。

連立方程式 (1) と (2) の違いは2次の相互作用の有無であり、共鳴条件が満足される場合には、0次 (主流の変形) を通じて異なるモードからの影響を受ける以前に、異なるモード間の相互作用が攪乱振幅の2次のオーダーで直接及ぶ。連立 Landau 方程式の場合は、攪乱の振舞いは単一モードの弱非線形理論 (uncoupled Landau equations) に対し、振幅の3次のオーダーの補正が加わるにとどまるが、共鳴条件が満たされる場合には2次の相互作用が線形増幅と釣り合うことが本質的であるので、定性的に全く異なった挙動が期待できる。このとき、3次の相互作用は一般に高次の補正でしかない。即ち初期時刻の振幅が小さいうちは振幅の2次のオーダーの相互作用によって攪乱の振舞いが決まってしまう。

Detuning がどの程度の時 (1) は (2) に退化するのかに関しては、これまであまり調

べられていない。流れの安定性理論の分野では detuning が少しでもあれば (2) を用いるという流儀がこれまで取られてきた。Nayfeh & Bozatti のような detuning の影響を積極的に取り入れた解析は比較的最近行われるようになったばかりである。

ここでは、2次元 jet に加えられた2次元攪乱に関して、detuning の寄与の評価を行う。2次元 jet は主流が偶対称性を有しているので、攪乱としては偶奇両モードが可能である。波数 α を持つ偶奇モードと 2α の偶奇モードという4波間の近共鳴を考え、弱非線形理論に基づく連立方程式 [(1) に相当する方程式] を導く。更に、その解の振舞いを議論し、近共鳴はかなり大きな detuning の下にも可能であることを示す。ここでは detuning の寄与の評価が目的であるので、平行主流を仮定し、時間不安定性のみを考えることにするが、基本的な非線形相互作用の機構は現実の流れ場にもそのまま適用し得ると予想される。

§ 2. 定式化と線形共鳴条件

渦度方程式は無次元形で書くと次のようになる。

$$\partial \Delta \psi / \partial t - J(\psi, \Delta \psi) - R^{-1} \Delta^2 \psi = [\text{rot } \mathbf{f}]_z . \quad (3)$$

ここで、 ψ は流れ関数、 R は Reynolds 数、 J は Jacobian、 $\Delta \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ 、 t は時間、 \mathbf{f} は適当な外力であり、 z は (x, y) に垂直な方向である。外力 \mathbf{f} は

$$U(y) = \partial \bar{\psi} / \partial y = \text{sech}^2 y, \quad V(y) = \partial \bar{\psi} / \partial x = 0, \quad (4)$$

という平行主流を維持するために仮定した (仮想的な平行流モデル)。

さて、 $\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}(x, y, t)$ として ψ についての式を引き去ることにより非線形攪乱方程式

$$\partial \Delta \hat{\psi} / \partial t + U \partial \Delta \hat{\psi} / \partial x - U'' \partial \hat{\psi} / \partial x - R^{-1} \Delta^2 \hat{\psi} = J(\hat{\psi}, \Delta \hat{\psi}), \quad (5)$$

が得られる。ここに、 $U = \text{sech}^2 y$ であり、プライムは y についての微分を意味する。

(5) 式の右辺を省略し、 $\hat{\psi}$ について時間不安定性のノーマルモード解析を行うと、線形安定性として Orr-Sommerfeld 方程式から線形固有値が求められる。 $R=1000$ における線形固有値、 α_c , α_i の分布を図 1 に示す。ここで、実線は α_c , 破線は α_i である。

主流(4) は偶対称なので、攪乱としては偶関数攪乱、奇関数攪乱のいずれもが可能であるが、偶関数攪乱の方がより大きな増幅率を持っている。奇関数攪乱は偶関数攪乱の約半分の増幅波数帯を有する。さて、(5)式右辺の非線形項は y について偶数階と奇数階の微分演算の積になっているので、偶関数攪乱と偶関数攪乱との相互作用が奇関数攪乱を生成し、偶関数攪乱と奇関数攪乱との相互作用が偶関数攪乱を、また、奇関数攪乱同士の

相互作用が奇関数攪乱を生成する。従って、3波間の相互作用としては、

$$\alpha_1(\text{偶関数}) + \alpha_2(\text{奇関数}) \rightarrow \alpha_3(\text{偶関数}),$$

$$\alpha_1(\text{奇関数}) + \alpha_2(\text{奇関数}) \rightarrow \alpha_3(\text{奇関数}),$$

のいずれかが可能である。これまでの解析結果から、前者の相互作用については波数 α_1 の広い範囲にわたって厳密に共鳴条件が満足されるが、後者の相互作用についての共鳴条件は成立しないことが、明らかになっている。特殊な場合として、 $\alpha_1 = 0.62973342$ の場合には、 $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = 2\alpha_1$ という α_1 (偶関数), α_2 (奇関数), α_3 (偶関数) の間で共鳴条件が厳密に成立する。

ここでは、共鳴からの detuning を調べることを主な目的としているので、 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.62973342$ から十分離れた波数 α_1 (偶関数) = α_2 (奇関数) = 0.4, α_3 (偶関数) = 0.8 という3波間の非線形相互作用を調べよう。このような波数の組合せに対しては、共鳴条件は明らかに満足されない。これら、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 間の共鳴からの detuning を取り扱うときには新たに α_4 (= $2\alpha_2$) の波数を持つ奇関数攪乱も考慮に入れなければならない。なぜなら、波数 α_2 を持つ2つの奇関数攪乱と波数 α_4 を持つ奇関数攪乱の間の相互作用は共鳴条件からほんの僅かしかずれていないので、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 間の共鳴からの detuning を取り扱うときには $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 間の共鳴からの detuning も同時に取り扱わなければならないのである。しかも、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とともに増幅攪乱であるので、これら4モード共に非線形相互作用に重要な寄与をすることが予想される。従って、ここでは $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ の4波相互作用を取り扱うことになる。

§ 3. 偶奇4モード間の近共鳴に対する弱非線形理論

攪乱方程式の解 $\hat{\psi}$ を次の形の振幅展開によって求める。

$$\begin{aligned} \hat{\psi} = & E_1 [A_1 \phi_1 + A_2^* A_3 \phi_{-23} + |A_1|^2 A_1 \phi_{-111} + |A_2|^2 A_1 \phi_{-221} \\ & + |A_3|^2 A_1 \phi_{-331} + |A_4|^2 A_1 \phi_{-441} + A_2 A_3 A_4^* \phi_{-423} + \dots] + \text{c.c.} \\ & + E_2 [A_2 \phi_2 + A_1^* A_3 \phi_{-13} + A_2^* A_4 \phi_{-24} + |A_1|^2 A_2 \phi_{-112} + |A_2|^2 A_2 \phi_{-222} \\ & + |A_3|^2 A_2 \phi_{-332} + |A_4|^2 A_2 \phi_{-442} + A_1 A_4 A_3^* \phi_{-314} + \dots] + \text{c.c.} \\ & + E_3 [A_3 \phi_3 + A_1 A_2 \phi_{12} + |A_1|^2 A_3 \phi_{-113} + |A_2|^2 A_3 \phi_{-223} \\ & + |A_3|^2 A_3 \phi_{-333} + |A_4|^2 A_3 \phi_{-443} + A_1 A_4 A_2^* \phi_{-214} + \dots] + \text{c.c.} \\ & + E_4 [A_4 \phi_4 + A_2 A_2 \phi_{22} + |A_1|^2 A_4 \phi_{-114} + |A_2|^2 A_4 \phi_{-224} \\ & + |A_3|^2 A_4 \phi_{-334} + |A_4|^2 A_4 \phi_{-444} + A_2 A_3 A_1^* \phi_{-123} + \dots] + \text{c.c.} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、

$$\begin{aligned} E_1 &= \exp [i(\alpha_1 x - \omega_1 t)] , E_2 = \exp [i(\alpha_2 x - \omega_2 t)] , \\ E_3 &= \exp [i(\alpha_3 x - \omega_3 t)] , E_4 = \exp [i(\alpha_4 x - \omega_4 t)] , \end{aligned} \quad (7)$$

である。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ はいずれも実数であり、 ω_1, ω_2 はそれぞれ波数 α_1, α_2 の攪乱に対する Orr-Sommerfeld 方程式の線形固有値の実部である。 他方、 ω_3, ω_4 は

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_4 = 2\omega_2, \quad (8)$$

によって定義される実数である。 共鳴条件が厳密に満足される場合、 ω_3, ω_4 はそれぞれ、波数 α_3, α_4 の攪乱に対する Orr-Sommerfeld 方程式の線形固有値の実部に一致する。 しかし、一般に共鳴条件が満足されない場合、これらは線形固有値の実部とは一致しない。 線形固有値の実部からのずれ (detuning) は次の振幅方程式の線形項の係数のうち λ_3, λ_4 に虚数部として含まれることになる。

$$\begin{aligned} dA_1/dt &= \lambda_1 A_1 + \lambda_{-23} A_2^* A_3 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-221} |A_2|^2 A_1 \\ &\quad + \lambda_{-331} |A_3|^2 A_1 + \lambda_{-441} |A_4|^2 A_1 + \lambda_{-423} A_2 A_3 A_4^* + \dots , \\ dA_2/dt &= \lambda_2 A_2 + \lambda_{-13} A_1^* A_3 + \lambda_{-24} A_2^* A_4 + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2 \\ &\quad + \lambda_{-332} |A_3|^2 A_2 + \lambda_{-442} |A_4|^2 A_2 + \lambda_{-314} A_1 A_4 A_3^* + \dots , \\ dA_3/dt &= \lambda_3 A_3 + \lambda_{12} A_1 A_2 + \lambda_{-113} |A_1|^2 A_3 + \lambda_{-223} |A_2|^2 A_3 \\ &\quad + \lambda_{-333} |A_3|^2 A_3 + \lambda_{-443} |A_4|^2 A_3 + \lambda_{-214} A_1 A_4 A_2^* + \dots , \\ dA_4/dt &= \lambda_4 A_4 + \lambda_{22} A_2 A_2 + \lambda_{-114} |A_1|^2 A_4 + \lambda_{-224} |A_2|^2 A_4 \\ &\quad + \lambda_{-334} |A_3|^2 A_4 + \lambda_{-444} |A_4|^2 A_4 + \lambda_{-123} A_2 A_3 A_1^* + \dots , \end{aligned} \quad (9)$$

ここでは振幅展開を行っているので、 detuning の大きさに制限をつけることなく近共鳴の時間発展を追跡できる。 これに対し、従来の多重尺度法に基づく近共鳴に対する解析では、detuning が $O(\varepsilon)$ と仮定されており、 ε は多重尺度法における微少パラメータである。 detuning が $O(\varepsilon)$ である場合、振幅展開の結果得られる連立振幅方程式と、多重尺度法に基づく連立振幅方程式は全く等価である。

さて、これらの $\hat{\psi}$ と E_1, E_2, E_3, E_4 並びに $dA_1/dt, dA_2/dt, dA_3/dt, dA_4/dt$ を非線形攪乱方程式に代入し、振幅 A_1, A_2, A_3, A_4 のべきで整理すると、最低次の近似で、波数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ に対する Orr-Sommerfeld 方程式が得られる。 すなわち線形作用素 L_n, S_n を次のように定義すると、

$$L_n = i n \alpha U S_n - i n \alpha U'' - R^{-1} S_n^2, \quad S_n = d^2/dy^2 - n^2 \alpha^2, \quad (10)$$

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ は次の

$$\begin{aligned} [(\lambda_1 - i\omega_1)S_1 + L_1] \phi_1 &= 0, \\ [(\lambda_2 - i\omega_2)S_1 + L_1] \phi_2 &= 0, \\ [(\lambda_3 - i\omega_3)S_2 + L_2] \phi_3 &= 0, \\ [(\lambda_4 - i\omega_4)S_2 + L_2] \phi_4 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

に支配される。次に、振幅の2乗のオーダーから、

$$\begin{aligned} [(\lambda_2^* + \lambda_3 - i\omega_1)S_1 + L_1] \phi_{-23} &= -\lambda_{-23} S_1 \phi_1 + N_{-23}, \\ [(\lambda_1^* + \lambda_3 - i\omega_2)S_1 + L_1] \phi_{-13} &= -\lambda_{-13} S_1 \phi_2 + N_{-13}, \\ [(\lambda_2^* + \lambda_4 - i\omega_2)S_1 + L_1] \phi_{-24} &= -\lambda_{-24} S_1 \phi_2 + N_{-24}, \\ [(\lambda_1 + \lambda_2 - i\omega_3)S_2 + L_2] \phi_{12} &= -\lambda_{12} S_2 \phi_3 + N_{12}, \\ [(\lambda_2 + \lambda_2 - i\omega_4)S_2 + L_2] \phi_{22} &= -\lambda_{22} S_2 \phi_4 + N_{22}, \end{aligned} \quad (12)$$

が得られる。ここで、 N_{ik} は $A_i \phi_i E_i$ と $A_k \phi_k E_k$ との2次の相互作用により生成される非線形項である。さて、

$\lambda_2^* + \lambda_3 - \lambda_1 = 0$, $\lambda_1^* + \lambda_3 - \lambda_2 = 0$, $\lambda_2^* + \lambda_4 - \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0$ がそれぞれ成立する場合には、可解条件

$$\lambda_{-23} = \langle N_{-23} \rangle, \lambda_{-13} = \langle N_{-13} \rangle, \lambda_{-24} = \langle N_{-24} \rangle, \lambda_{12} = \langle N_{12} \rangle, \lambda_{22} = \langle N_{22} \rangle \quad (13)$$

がそれぞれ満足されるときのみ、これらの非同次方程式の解 ϕ_{-23} , ϕ_{-13} , ϕ_{-24} , ϕ_{12} , ϕ_{22} は存在し得る。ただし、

$$\langle N_{ik} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_{i+k} S_{[(i+k+1)/2]} N_{ik} dy / \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_{i+k} S_{[(i+k+1)/2]} \phi_{i+k} dy,$$

[] は Gauss の記号であり、 $\tilde{\phi}_{i+k}$ は ϕ_{i+k} の adjoint 関数である。

ところで、

$\lambda_2^* + \lambda_3 - \lambda_1 = 0$, $\lambda_1^* + \lambda_3 - \lambda_2 = 0$, $\lambda_2^* + \lambda_4 - \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0$ が成立しない場合には、これらの非同次方程式は一般に無条件に可解である。 λ_{-23} , λ_{-13} , λ_{-24} , λ_{12} , λ_{22} はそのとき次式から求められる。

$$\begin{aligned} \lambda_{-23} &= (\lambda_2^* + \lambda_3 - \lambda_1) \chi_{-23}(y_0), \\ \lambda_{-13} &= (\lambda_1^* + \lambda_3 - \lambda_2) \chi_{-13}(y_0), \\ \lambda_{-24} &= (\lambda_2^* + \lambda_4 - \lambda_2) \chi_{-24}(y_0), \\ \lambda_{12} &= (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \chi_{12}(y_0), \\ \lambda_{22} &= (\lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_4) \chi_{22}(y_0), \end{aligned} \quad (14)$$

但し、 χ_{-23} , χ_{-13} , χ_{-24} , χ_{12} , χ_{22} は以下の非同次方程式の解である。

$$\begin{aligned}
& [(\lambda_2^* + \lambda_3 - i\omega_1)S_1 + L_1] \chi_{-23} = N_{-23}, \\
& [(\lambda_1^* + \lambda_3 - i\omega_2)S_1 + L_1] \chi_{-13} = N_{-13}, \\
& [(\lambda_2^* + \lambda_4 - i\omega_2)S_1 + L_1] \chi_{-24} = N_{-24}, \\
& [(\lambda_1 + \lambda_2 - i\omega_3)S_2 + L_2] \chi_{12} = N_{12}, \\
& [(\lambda_2 + \lambda_2 - i\omega_4)S_2 + L_2] \chi_{22} = N_{22},
\end{aligned} \tag{15}$$

また、 $y=y_0$ は攪乱振幅の規格化の位置であり、

$$\begin{aligned}
& \phi_1(y_0) = \phi_2(y_0) = \phi_3(y_0) = \phi_4(y_0) = 1, \\
& \phi_{-13}(y_0) = \phi_{-13}(y_0) = \phi_{-24}(y_0) = \phi_{12}(y_0) = \phi_{22}(y_0) = 0, \dots
\end{aligned} \tag{16}$$

のように振幅の規格化を行うものとする。以上の手順により、連立方程式の高次の係数を矛盾なく首尾一貫して求めることができる。

さて、detuningの寄与を評価するためには、上で求めた連立方程式に基づく攪乱振幅の時間発展と、共鳴の効果を無視した連立 Landau 方程式

$$\begin{aligned}
dA_1/dt &= \lambda_1 A_1 + \tilde{\lambda}_{-111} |A_1|^2 A_1 + \tilde{\lambda}_{-221} |A_2|^2 A_1 + \tilde{\lambda}_{-331} |A_3|^2 A_1 + \tilde{\lambda}_{-441} |A_4|^2 A_1, \\
dA_2/dt &= \lambda_2 A_2 + \tilde{\lambda}_{-112} |A_1|^2 A_2 + \tilde{\lambda}_{-222} |A_2|^2 A_2 + \tilde{\lambda}_{-332} |A_3|^2 A_2 + \tilde{\lambda}_{-442} |A_4|^2 A_2, \\
dA_3/dt &= \lambda_3 A_3 + \tilde{\lambda}_{-113} |A_1|^2 A_3 + \tilde{\lambda}_{-223} |A_2|^2 A_3 + \tilde{\lambda}_{-333} |A_3|^2 A_3 + \tilde{\lambda}_{-443} |A_4|^2 A_3, \\
dA_4/dt &= \lambda_4 A_4 + \tilde{\lambda}_{-114} |A_1|^2 A_4 + \tilde{\lambda}_{-224} |A_2|^2 A_4 + \tilde{\lambda}_{-334} |A_3|^2 A_4 + \tilde{\lambda}_{-444} |A_4|^2 A_4,
\end{aligned} \tag{17}$$

による時間発展を比較すれば良い。ここではさらに、2次の相互作用までで方程式を打ち切った場合

$$\begin{aligned}
dA_1/dt &= \lambda_1 A_1 + \lambda_{-23} A_2^* A_3, \\
dA_2/dt &= \lambda_2 A_2 + \lambda_{-13} A_1^* A_3 + \lambda_{-24} A_2^* A_4, \\
dA_3/dt &= \lambda_3 A_3 + \lambda_{12} A_1 A_2, \\
dA_4/dt &= \lambda_4 A_4 + \lambda_{22} A_2^2,
\end{aligned} \tag{18}$$

と4つの単一モードに対する Landau 方程式

$$\begin{aligned}
dA_1/dt &= \lambda_1 A_1 + \tilde{\lambda}_{-111} |A_1|^2 A_1, \\
dA_2/dt &= \lambda_2 A_2 + \tilde{\lambda}_{-222} |A_2|^2 A_2, \\
dA_3/dt &= \lambda_3 A_3 + \tilde{\lambda}_{-333} |A_3|^2 A_3, \\
dA_4/dt &= \lambda_4 A_4 + \tilde{\lambda}_{-444} |A_4|^2 A_4,
\end{aligned} \tag{19}$$

による時間発展、並びに次の節で説明するフーリエモード打ち切り法に基づく攪乱の時間発展に対するシミュレーションの結果を比較する。

§ 4. フーリエモード打ち切り法

攪乱方程式は非線形項を含むため、フーリエ展開を行えば無限自由度の連立方程式系が得られるが、それを数学的に矛盾なく有限自由度で打ち切る手法が弱非線形理論であった。しかし、弱非線形理論は、攪乱振幅が十分小さい場合に構成される漸近理論であるので、振幅がある程度大きくなった後では適用出来なくなる。このことは、Herbert (1980)や我々による平面 Poiseuille 流に対する研究によって明らかになってきている。そこで、弱非線形理論によって得られた結果は、弱非線形理論とは完全に独立な手法によって検証されることが望まれる。現時点では、強非線形現象を一般的に取り扱う理論は存在しないので、数値シミュレーションに頼る以外に方法はない。ここでは、数値シミュレーションとして、攪乱をフーリエモードに展開し、有限項で打ち切る手法を用いる。

攪乱 $\hat{\psi}(x, y, t)$ を

$$\hat{\psi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k(y, t) \exp(ik\alpha), \quad \phi_{-k} = \phi_k^*, \quad (20)$$

のように展開する。このとき、 ϕ_k は

$$\begin{aligned} & [(\partial/\partial t + ik\alpha U)S_k - ik\alpha U'' - R^{-1}S_k^2] \phi_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} N(\phi_{k-m}, \phi_m), \\ & N(\phi_1, \phi_m) = i\alpha [l\phi_1 S_m \phi_m' - m\phi_1' S_m \phi_m], \end{aligned} \quad (21)$$

に支配される。ここで、 k の上限と下限 ∞ と $-\infty$ をそれぞれ K , $-K$ ($|K| < +\infty$) で打ち切る。さて、 $\phi_k(y, t)$ を境界条件を満足する関数列 $\tilde{T}_n(y)$:

$$\tilde{T}_n(\eta) = (1 - \eta^2) T_n(\eta), \quad \eta = \tanh(0.6\alpha y),$$

を用いて

$$\phi_k(y, t) = \sum_{n=0}^N a_n^{(k)}(t) \tilde{T}_n(\eta),$$

のように展開すると、展開係数 $a_n^{(k)}(t)$ は次の発展方程式に支配される。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \dot{a}_n^{(k)} S_k T_n + \sum_{n=0}^N [ik\alpha U S_k T_n - ik\alpha U'' T_n - R^{-1} S_k^2 T_n] a_n^{(k)} \\ & = \sum_{m=-k}^K N \left[\sum_{n=0}^N a_1^{(k-m)} T_1, \sum_{n=0}^N a_1^{(m)} T_1 \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

この方程式系は Collocation 法を用いれば次の Matrix 形に書き換えられる。

$$A dx/dt + Bx = c(x, x), \quad x = [a_0, a_1, \dots]^T.$$

ここでは、この方程式を Runge-Kutta-Gill 法を用いて陽的に数値積分した。

§ 5. 4波間の近共鳴に関する結果

計算は全て $\alpha=0.4$, $R=1000$ に関して行った。初期振幅は、 $y_0=1.0$ において $|\phi_1|=|\phi_2|=|\phi_3|=|\phi_4|=0.001$, もしくは $A_1=A_2=A_3=A_4=0.001$ であり、フーリエモード打ち切

り法の初期条件としてはこの振幅を持つ Orr-Sommerfeld 方程式の第1もしくは第2線形固有関数を用いた。まず、図2に4つの Landau 方程式 (19) による結果を示す。この場合、4つのモードはいずれも線形的には増幅攪乱であるが、モード間の相互作用がないので、線形増幅を行った後、各モードは3次の非線形項の存在によって平衡振幅に到達するか、もしくは絶対不安定となり発散する。

図3は連立 Landau 方程式 (17) による結果である。この場合には、各モードは、主流の変形を通じてのみお互いに影響を及ぼし合う。異なるモードからの寄与は、両図の差異として明確に把握できる。即ち、非連立の Landau 方程式の場合には各々のモードは全て平衡に達するかあるいは発散するかのいずれかであったが、異なるモードからの寄与のため、連立 Landau 方程式では A_3 以外は全て最終的に減衰する。一度減衰し始めると、これら減衰モードは線形的に減衰している。しかし、本来の線形特性は全て増幅であるので、 A_3 からの寄与によって線形的な減衰が引き起こされているといえる。連立 Landau 方程式では、 A_3 の寄与が A_1, A_2, A_4 の式の中に $|A_3|^2 A_1, |A_3|^2 A_2, |A_3|^2 A_4$ という形で含まれる。4つのモードのうち、 A_3 は卓越した振幅を有するが、それが $t > 40$ ではほぼ平衡振幅に達しているため、これら $|A_3|^2 A_1, |A_3|^2 A_2, |A_3|^2 A_4$ の項は各々 A_1, A_2, A_4 に単純に比例することになるからである。さて、図2と図3における4モードの時間発展は $t < 20$ では完全に一致しており、さらに A_3 については全領域にわたって一致している。

図4にフーリエモード打ち切り法に基づく攪乱の時間発展の様子を示す。ここで、フーリエモード数としては $K=8$ を採用した。図2、3と図4との比較から、図2、3の A_1, A_3 は $t < 20$ では完全に図4のそれらの接線になっていることが分かる。このことは、 A_1, A_3 の時間発展が少なくとも初期のうちは単一モードの Landau 方程式で記述できることを示している。しかし、連立 Landau 方程式の結果に比べて、非連立 Landau 方程式では A_1 に関する不一致が t の小さな値から生じるので、 $t > 20$ では連立 Landau 方程式によって記述した方が良い結果が得られる。しかし、 A_2, A_4 については図2、3ともに $t=0$ で図4の A_2, A_4 の接線になっているだけで、それ以後は一致しない。

図5には3次の相互作用を無視した連立方程式 (18) による結果を示す。この方程式には近共鳴の寄与が含まれている。図4と比較して分かることは、図2、図3とは違って、 A_2 も $t < 25$ で図4の A_2 に良好に一致することである。とりわけ図4に示されている A_2 の $t=20$ あたりから始まる急成長が図5では定性的に再現されている。このことは、

detuningが一般に想像されるほどは効かず、近共鳴が広い範囲にわたって生じうることを明確に示している。但し、 A_4 に関しては、 $t < 10$ で図4のそれに一致するにとどまっている。なお、この連立方程式は3次の非線形項を含まないため、 $t > 50$ では各モードとも発散してしまう。

最後に、図6に3次の相互作用まで考慮にいれた近共鳴を含む連立方程式(9)による結果を示す。図4との一致はもっとも良好であるし、図5でみられた発散も抑制されている。しかし、 A_4 との一致は相変わらず良くない。最終的に、 A_1, A_2, A_4 は減衰しフーリエモード打ち切り法による結果とは相容れない。今回用いた連立方程式は、 $\alpha = 0.4, 0.8$ という偶奇両モードに関する近共鳴を取り扱ったものである。しかし実は、 $\alpha = 0.4$ の高調波 $\alpha = 1.2, 1.6$ も増幅モードとして存在する。従って、本来は少なくともこれら全ての増幅モードの間の近共鳴を取り入れた展開を行わなければならない。また、今回減衰モードの寄与については考慮していないが実際には重要な寄与を及ぼす可能性も残されている。 A_4 に対する不一致と A_1, A_2, A_4 の $t \rightarrow \infty$ での減衰特性はこの理由に起因すると考えられる。

§5. まとめ

偶奇両モードを含む4モード間の近共鳴に関する定式化を行い、2次元 jetに対して3次までの非線形相互作用を取り入れた連立振幅方程式を導いた。この方程式を中心に、共鳴の寄与や非線形性の程度が異なる場合の方程式を用い、フーリエモード打ち切り法に基づく数値シミュレーションとの比較を行った結果、以下の点が明らかになった。

- 1) 近共鳴が完全になくなるためにはかなり大きな detuningが必要であり、基本波の線形固有値の実部の 10 % 程度の detuning では近共鳴が成立している。
- 2) その際には、近共鳴を考慮にいれた2次までの連立振幅方程式(18)が定性的には弱非線形段階を忠実に再現する。それに反して、3次までの連立 Landau 方程式(17)は定性的に異なった結果を生じる可能性がある。

弱非線形理論の本質は、線形増幅特性に対して、非線形性が定性的にどのような寄与をするのかを予測し、非線形相互作用の機構を定性的に解明することにある。いたずらに高次の非線形相互作用まで考慮に入れた定式化を行い近似の精度を上げることは、弱非線形理論の基本精神と相容れない。逆に、低次の非線形項をいかに正しく評価するかが重要であり、今回の計算結果によってもこの重要性が示されたといえる。

参考文献

- 1) K.Stewartson & J.T.Stuart (1971) J. Fluid Mech. 48, p529.
- 2) R.C.DiPrima, W.Eckhaus & L.A.Segel (1971) J. Fluid Mech. 49, p705
- 3) 藤本 & 角谷 (1977) 数理研講究録 298, p57
- 4) 藤村、柳瀬 & 水島 (1987) 数理研講究録 606, p12
- 5) R.E.Kelly (1967) J. Fluid Mech. 27, p657
- 6) A.D.D.Craik (1971) J. Fluid Mech. 50, p393
- 7) A.S.W.Thomas & W.S.Saric (1981) Bull. Am. Phys. Soc. 26, p1252
- 8) A.H.Nayfeh & A.N.Bozatli (1979) Phys. Fluids 22, p805
- 9) T.Herbert (1980) AIAA J. 18, p243

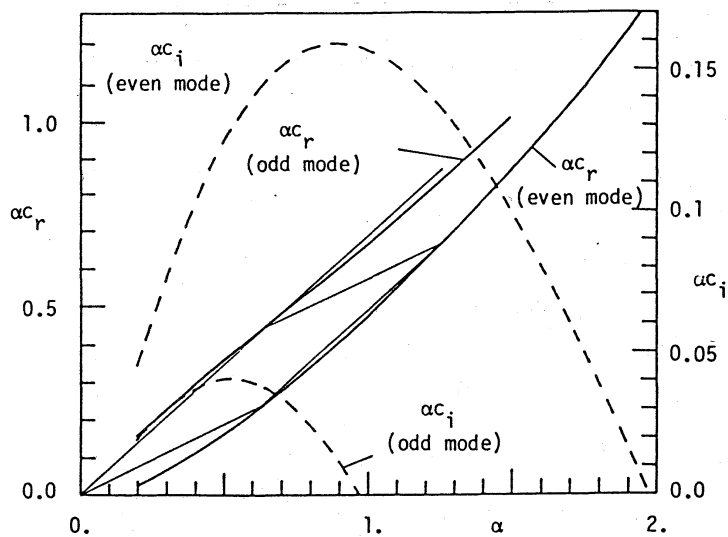


図1. 二次元ジェットの線形固有値. $R=1000$.
実線は α_r 、破線は α_i を表す.

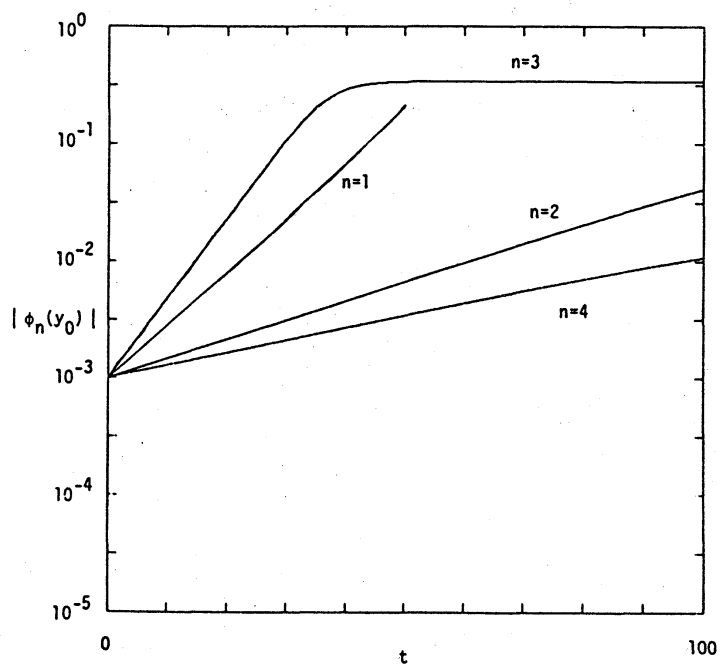


図2. Landau方程式(19)に基づく攪乱の時間
発展. $\alpha=0.4$, $R=1000$.

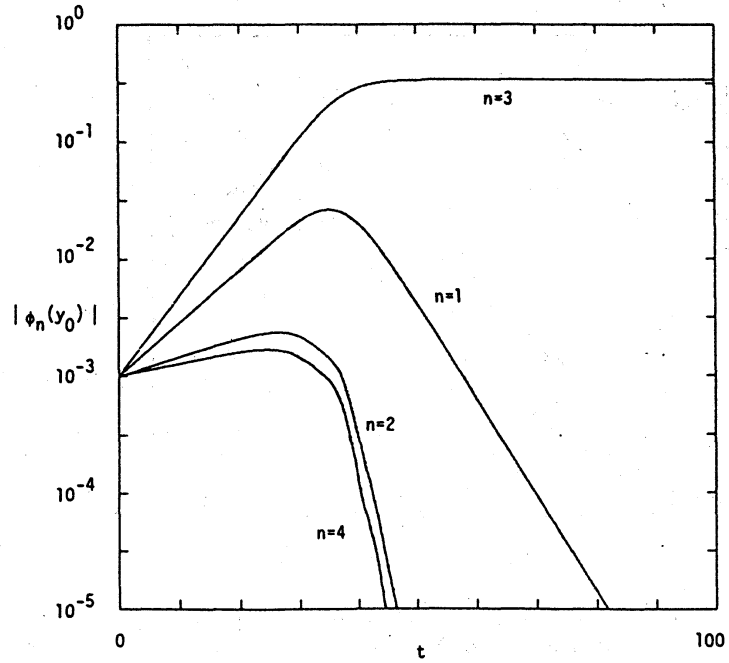


図3. 連立Landau方程式(17)に基づく攪乱の時間発展. $\alpha=0.4$, $R=1000$.

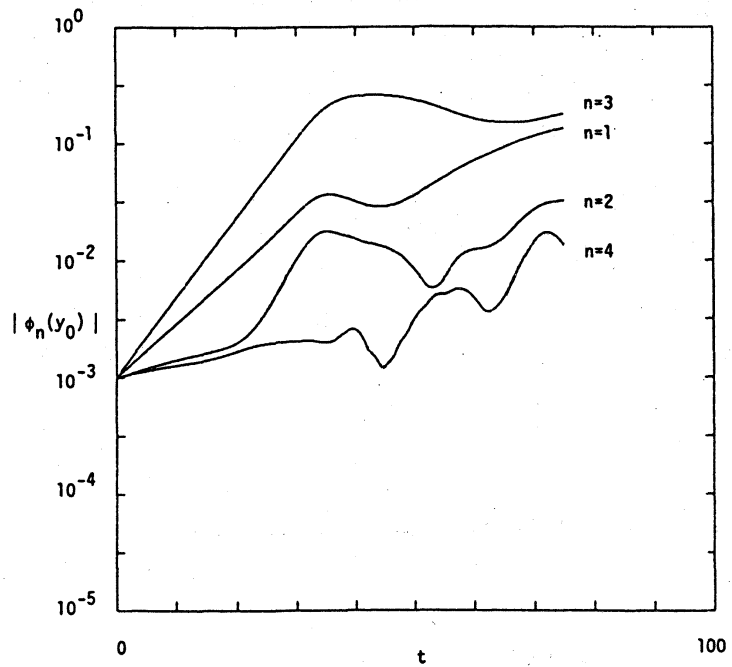


図4. Fourier mode打ち切り法に基づく攪乱の時間発展. $\alpha=0.4$, $R=1000$.

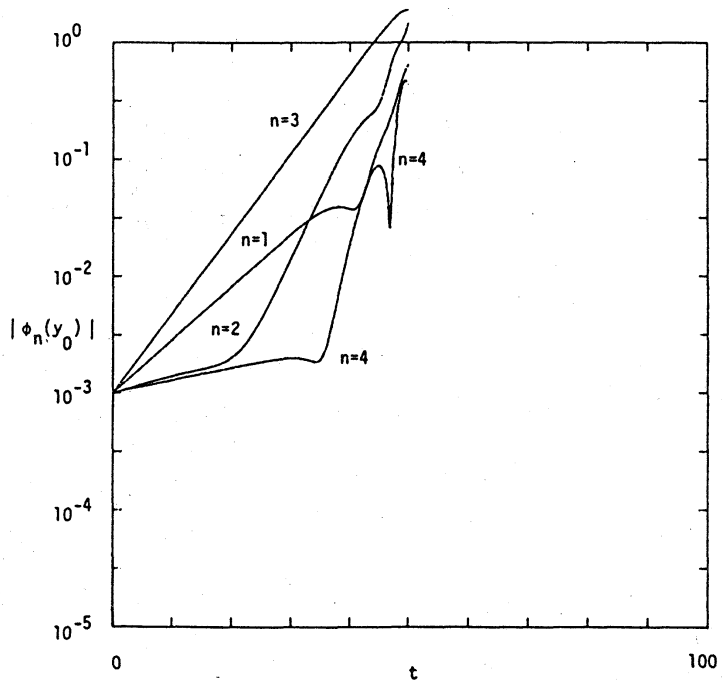


図5. 連立方程式(9)に基づく攪乱の時間発展.
 $\alpha=0.4$, $R=1000$.