

鉛直壁面を流れる粘性流体膜上の波動

東大工 仲矢 長次 (Choji Nakaya)

1. はじめに

鉛直壁面を粘性流体が流れるとき、流れの不安定性によつて表面に波が生ずる。この波の性質はカピツパによつて、はじめに系統的に知られた。それによつて、周期長を波長を上流で与えれば、二種の特殊な波を観測できる。その一つは正弦波で、もう一つはシンガ波と名付けられた波である。前者は線形理論によつて、後者は孤立波の重ね合わせで表現できると考えられている。しかし現在では一般の波の性質は不明である。この報告では、観測された波の二つの種類が一つであることが明らかにする。

2. 運動方程式

直交座標 x, y, z と x 軸を鉛直下方にとる。流れの速度を Ψ で表わすと、二次元の非圧縮粘性流体の方程式は

$$\Psi_{xxt} + \Psi_{yyt} - \nu (\Psi_{xxy} + \Psi_{yyy}) + \Psi_y (\Psi_{xxx} + \Psi_{2yy})$$

$$= \nu (\Psi_{xxxx} + 2\Psi_{xxyy} + \Psi_{yyyy}) \quad (1)$$

である。自由表面の水位を

$$h(x, t) = \eta \quad (2)$$

を表わし、その変動部分の流場を速度 u, v として表わす。無次元量 x, y, t, u, v, η として

$$x = l_0 x^*, \quad y = l_0 y^*, \quad t = l_0 u_0^{-1} t^*, \quad \psi = u_0 h_0 \bar{\psi}^*$$

$$u = u_0 \bar{u}^*, \quad v = \rho g h_0 \bar{v}^*, \quad h = h_0 \bar{h}^*, \quad (3)$$

$$u_0 = \frac{g h_0^2}{2\nu} \quad (4)$$

である。このとき、量 x, y, t の運動方程式と境界条件は

$$\begin{aligned} \Psi_{yyyy} &= \mu R [\Psi_{yyt} + (\bar{\psi}_y + \psi_y) \Psi_{xyy} - (\bar{\Psi}_{yyy} + \Psi_{yyy}) \psi_x] \\ &\quad - 2\mu^2 \Psi_{xxyy} + \mu^3 R [\Psi_{xxt} + (\bar{\psi}_x + \psi_x) \Psi_{xxx} - \psi_x \Psi_{xxy}] \\ &\quad - \mu^4 \Psi_{xxxx}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\psi_x = 0, \quad \bar{\psi}_y = 0, \quad (6)$$

$$\psi_y = 0, \quad \bar{\psi}_x = 0, \quad (7)$$

$$(\bar{\Psi}_{yy} + \Psi_{yy} - \mu^2 \psi_{xx})(1 - \mu^2 h_x^2) - 4\mu^2 \psi_{xy} h_x^2 = 0, \quad y=h, \quad (8)$$

$$-\frac{W \mu^2 h_{xx}}{(1 + \mu^2 h_x^2)^{3/2}} - \rho - \mu \psi_{xy} \frac{(1 - \mu^2 h_x^2)}{(1 + \mu^2 h_x^2)} - \frac{4\mu^3 \psi_{xy} h_x^2}{(1 - \mu^4 h_x^4)} = 0, \quad y=h, \quad (9)$$

$$h_t = -[\bar{\Psi}(h) + \Psi(h)]_x \quad (10)$$

$$z = \eta$$

$$\bar{\Psi} = \eta^2 - \frac{1}{3}\eta^3, \quad (11)$$

$$p_x = \frac{1}{2\mu} \Psi_{\eta\eta\eta} - \frac{1}{2} [\Psi_{\eta t} + (\bar{\Psi}_{\eta} + \Psi_{\eta}) \Psi_{\eta\eta} - (\bar{\Psi}_{\eta\eta} + \Psi_{\eta\eta}) \Psi_{\eta}] + \frac{1}{2} \mu \Psi_{2\eta\eta}. \quad (12)$$

ここで、 μ を数 R , 波長 l_0 と $\eta = \mu z = \mu x - Wt$ と

$$R = \frac{g h_0^3}{2\nu^2}, \quad \mu = \frac{l_0}{l_0}, \quad W = \frac{W}{\rho g h_0^2} \quad (13)$$

と R, W を定義する。

運動方程式の解を求めると

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \mu \Psi^{(1)} + \mu^2 \Psi^{(2)} + \dots \quad (15)$$

$$p = p^{(0)} + \mu p^{(1)} + \mu^2 p^{(2)} + \dots \quad (16)$$

と Ψ を展開すると,

$$\Psi^{(0)} = (h-1)\eta^2, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)} = & \left(\frac{2}{3} R h^4 h_x + \mu^2 W h h_{xxx} \right) \eta^2 - \frac{1}{3} \mu^2 W h_{xxx} \eta^3 \\ & - \frac{1}{6} R h^2 h_x \eta^4 + \frac{1}{30} R h h_x \eta^5 \end{aligned} \quad (18)$$

が求まる。表面の条件を代入して微分すると

$$h_t = -2h^2 h_x - \mu \left(\frac{8}{15} R h^6 h_{xx} + \frac{16}{5} R h^5 h_x^2 + \frac{2}{3} \mu^2 W h^3 h_{xxxx} + 2\mu^2 W h^2 h_x h_{xxx} \right) \quad (5)$$

が得られる。これが表面の変動を記述する方程式である。

3. 孤立解

方程式(18)の解は

$$h = h(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (19)$$

と仮定する。式(19)を(18)に代入すると

$$-c \frac{dh}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left[\frac{2}{3} h^3 + \mu \left(\frac{8}{15} R h^6 \frac{dh}{d\xi} + \frac{2}{3} \mu^2 W h^3 \frac{d^3 h}{d\xi^3} \right) \right] = 0, \quad (20)$$

一度積分すると

$$-ch + \frac{2}{3} h^3 + \mu \left(\frac{8}{15} R h^6 \frac{dh}{d\xi} + \frac{2}{3} \mu^2 W h^3 \frac{d^3 h}{d\xi^3} \right) = A. \quad (21)$$

ここで、式(21)の解に対する境界条件

$$h \rightarrow k, \quad \xi = \pm\infty \quad (22)$$

が成立する。式(22)に代入すると

$$A = -ck + \frac{2}{3} k^3. \quad (23)$$

新しい変数

$$\eta = \varepsilon^{-1} \xi, \quad \varepsilon = \mu W^{1/3} \quad (24)$$

と $\frac{d}{d\xi} \lambda$ (22) に代り λ 対して

$$-c h + \frac{2}{3} h^3 + \frac{8}{15} \frac{R}{W^{1/3}} h^6 \frac{dh}{d\eta} + \frac{2}{3} h^3 \frac{d^3 h}{d\eta^3} = -c k + \frac{2}{3} k^3 \quad (25)$$

で、境界条件は

$$h \rightarrow k, \quad \eta \rightarrow \pm\infty \quad (26)$$

と c は $15\gamma + 2R, W$ は $R/W^{1/3}$ と $c = 2$ と 3 の合計等
 $3 \leq c \leq 15$ である

$$W = 1000 \quad (27)$$

と $c = 2$ と 3 の $\gamma \rightarrow \pm\infty$ の場合 (3) の $c = 2$ と 3 の

$$h = h' + k \quad (28)$$

と代り λ 対して

$$\frac{d^3 h'}{d\eta^3} + 3r \frac{dh'}{d\eta} + \rho h' = 0, \quad (29)$$

$$r = \frac{4}{15} \frac{R k^3}{W^{1/3}}, \quad \rho = \frac{3}{k} - \frac{3c}{2k^3} \quad (30)$$

線形方程式 (29) は

$$h' = \exp(\sigma \eta) \quad (31)$$

の解を σ とし、代入すると

$$\sigma^3 + 3r\sigma + \delta = 0. \quad (32)$$

を得る。式 (32) の解は

$$\sigma = \alpha \quad (33)$$

$$\sigma = -\frac{1}{2}\alpha \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\beta \quad (34)$$

と

$$\alpha = \sqrt[3]{J_+} + \sqrt[3]{J_-}, \quad \beta = \sqrt[3]{J_+} - \sqrt[3]{J_-} \quad (35)$$

$$J_{\pm} = \frac{1}{2}(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4r^3}). \quad (36)$$

である。まず式 $\alpha > 0$ (2.5), 上流では

$$h_u = C_1 \exp(\alpha \eta) \quad (37)$$

下流では

$$h_d = C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha \eta\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\beta \eta + \gamma\right) \quad (38)$$

である。また h_u と h_d は、非線形性のため $\eta = 3$ 区間
 適符合い $\eta = 2$ 解を求めた

$$h_i = h_i(\eta) \quad (39)$$

二枚を h_u に接続すると

$$h_i''(\eta_2) - \lambda h_i'(\eta_2) + \left(\frac{\lambda^2}{4} + \beta^2\right) h_i(\eta_2) = 0 \quad (40)$$

が得られる。二枚を合計して \rightarrow の微分式

$$F(c, k, R, W) = 0 \quad (41)$$

が得られる。各々の求められた波形を η とし、波の u の σ は

$$\Delta \eta \sim 1 \quad (42)$$

である。 $\Delta \xi \sim \mu W^{1/3}$ の結果として得られる、次の重要な結果が得られる。

$$\frac{l_0 \Delta \xi}{h_0} \sim W^{1/3} \quad (43)$$

つまり、孤立波の u の σ は流体膜の厚さ h_0 の $W^{1/3}$ であるということである。

4. 5-解

観測された u の波と、上に求められた孤立解とを比べるために、孤立解から同期解 \rightarrow () を得よう。孤立波の周期的 $\sigma = (b)$ の λ と c と

$$\Lambda = 2\pi l_0 \quad (44)$$

と取ると

$$h(\xi) = h(\xi + 2\pi) \quad (45)$$

が成り立つ。(2) の二つの解の重ね合わせと (2)

$$h = \rho^{(n)}, \quad \rho^{(n)} = k + \sum [h^{(n)}(\xi + 2m\pi) - k] \quad (46)$$

を定義する。 $\lambda = v \frac{L}{2\pi}$ の波長 λ と

$$\lambda = \frac{L}{h_0} \quad (47)$$

による表わせば

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \mu \quad (48)$$

この式は波の波数と波長 λ の関係を示している。

(2) の解 $\rho^{(n)}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{(n)} d\xi = 1 \quad (49)$$

を導くと

$$k + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [h^{(n)} - k] d\xi = 1 \quad (50)$$

よって

$$\mu = \frac{2\pi(1-k)}{W^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} [h^{(n)}(\eta) - k] d\eta} \quad (51)$$

式(51)に於て, R と μ と W との重要な式である。

5. F-解

各々の種之解は, ξ の 2π の $\Delta\xi \sim \mu W^{1/3}$ の 2π 区間
 分けて可なり, かつ

$$\mu W^{1/3} \ll 2\pi \quad (52)$$

であれば, 相互作用を無視して, ξ の 2π

$$\mu W^{1/3} \sim 2\pi \quad (53)$$

に於ては, 種之解の存在は重なり合の (46) は正しくなる。

\Rightarrow 正しくなる解は

$$h = f^{(n)}, \quad f^{(n)} = \left(1 + \sum a_m^{(n)} e^{im\xi} + \sum a_m^{(n)*} e^{-im\xi} \right) \quad (54)$$

と (2) 表力下の波動関数である。運動方程式 (20) に代入して

$$\begin{aligned} & im \left[2 - c + im\mu \left(\frac{8}{15} R - \frac{2}{3} m^2 \mu^2 W \right) \right] a_m^{(n)} \\ & = N_m (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}) \end{aligned} \quad (55)$$

を得た。式(55)に表力下の未知数は $\mu, c, a_1^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}$ である。 L の長さ R を固定すると、 $2N+1$ 個あり、(55)の式は $2N$ 個の未知数を含む方程式である。未知数 a_j の 1 の、 c と μ は a_j (未知数として) を見ると、 $2N$ の未知数が求まる。

6. 実験との比較

こゝでは特長の長さとして平均厚さ h_0 をとり、結果を本
 文に示す。この流体膜の厚さは非常に薄いので、厚さを
 正確に測定するのは容易でない。そこでこの場合にも測定
 されるのは流量 Q のみであり、新しい厚さの単位として h_0^* を
 とり

$$Q = \frac{\rho g h_0^{*3}}{3\nu} \quad (56)$$

を定義する。この h_0^* を用いて、 ν を $\rho g h_0^*$ とする

$$R^* = \frac{\rho g h_0^{*3}}{2\nu^2}, \quad \mu^* = \frac{h_0^*}{l_0}, \quad W^* = \frac{S}{\rho g h_0^{*2}} \quad (57)$$

を定義する。この時以前定義された R と

$$R^* = R g \quad (58)$$

の関係は、この式から h_0^* 、 h_0 の比は次のようになる。

$$\frac{h_0^*}{h_0} = f, \quad f = \left(\frac{3}{2} g\right)^{1/3} \quad (59)$$

さらに

$$W^* = 1000 \quad (60)$$

と表示する。このように、 ν は R^* 、 μ^* 、 W^* を定義

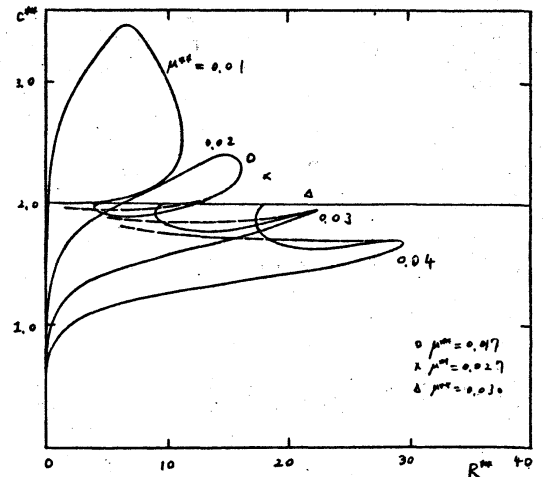
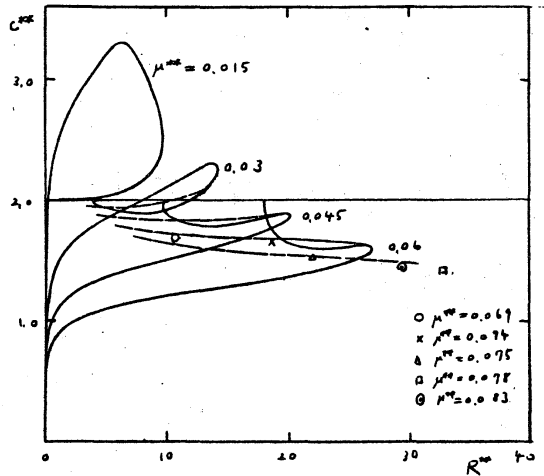
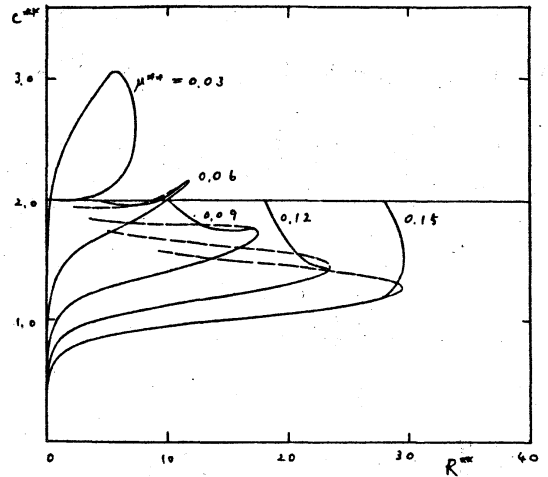
下と。

$$R^{**} = R f^{1/9}, \quad \mu^{**} = \mu f^{1/9}, \quad c^{**} = c \bar{f}^{2/3} \quad (61)$$

と手元をたす。

右の図以上から同期解
の第一種、第二種と第三
種の間の波の遷移の
レインマン数の自数とし
て表わされてゐる。実験
値とそれらのグラフとを
比較すると第一種、同
期解は対応するものは
その理由は測定された流
量はかなり大きいので第
一種は対応するカーブの
下と見られる。

次に第二種の同期解と
比較すると、測定工本
を第一種は厳密解は対応
下とカーブに一致せず、
カーブの漸近解の両子流



立解の重ね合せでその解の波の速度と一致する。これは一見
 正弦波と見做すことができるが、これは孤立解の重ね合せで考
 えてよいということがある。最後に先三種の周期解と比べると
 3-2-2の波の波の速度が一致する。これは、このことは
 一つの山として観測されるような波と、この波の山は三
 つの山の重なった一に等しい振動と一致すると考えられるこ
 とである。

7. 結論

この粘性膜の鉛直壁を流下するとき、孤立解の表面波
 の形成は重要な役割を演じている。特に、孤立解の最速解と
 して存在し、その波の速さは元の波の速さの $W/3$ の程度であ
 る。孤立波の性質を明らかにするためには、この現象の一方
 は波の速度が大きくなることのある孤立波の中のうすである
 3. 孤立波と実験とを比較する。周期解から孤立解
 を使ったつくらせた、各々の孤立波解が独立に運動するこ
 とを示す。この解は正しく孤立解の重ね合せでつくることが
 示す。これは二つの方法を組み合わせると周期解も存在する波の
 下してつくられた。実験と理論の結果を比較することによって
 正弦波と見做すことができるが、これは孤立解の重ね合せによつ

2号に於けることである。これ等の実験と理論との増巾率
 の不一致はこれ等の正弦波を単一正弦波と爲すに計算して
 之に於ては、正しくは振動の成長率を計算して此の
 2号の正の値に於ては、此の増巾率正弦波は振動の
 重ね合せである。之をう波のうに之は、これ等は
 1号、振動の重ね合せである。この各々の山は平滑化を
 した一つの山と見ると、これ等は、 ω の増巾率、
 実験に於ける増巾率は、 ω の増巾率より高い増巾
 の同増巾率に相当して、これ等の増巾率、 ω の増巾率
 の増巾率は、 ω の増巾率の増巾率に於けることである。
 これ等の増巾率の増巾率は、 ω の増巾率の増巾率に於ける
 ことである。これ等の増巾率の増巾率は、 ω の増巾率の増巾率
 に於けることである。これ等の増巾率の増巾率は、 ω の増巾率の増巾率
 に於けることである。これ等の増巾率の増巾率は、 ω の増巾率の増巾率
 に於けることである。