

完全流体における 3 次元渦運動の解の構造

名大 工 桑原真二

1. まえおき

この論文では、縮まない、粘性のない流体の 3 次元渦運動を取り扱う。このような渦運動は流体のしめる領域、渦度分布によって、取扱い方がことなる。領域については、無限領域と境界のある場合に分けられる。無限領域の場合には、渦度分布が無限遠まで存在する場合とそうでない場合とで、解法に大きな難易の差が生ずる。すなわち、後者では、Biot-Savart の法則が成り立つが、前者では Biot-Savart の法則がそのまま、成り立たず無限遠の渦度分布の寄与を付け加える必要がある。無限遠に渦度のない無限領域の例として、絡まった 2 つの渦輪およびみつわ形の渦糸の運動を、ヴォートンの方法により数値解析する。境界のある場合として、球内の渦輪の運動を鏡像法によって考察し、前と同様にヴォートンの方法で数値解析する。

2. 渦度場の発展方程式

球内の渦度場も含めて、一般の渦度場の発展方程式を考える。今、考えている領域で初期にソレノイダルな渦度場 $\vec{\omega}(\vec{x})$ が与えられている場合に、それ以後の縮まない、粘性のない流体の運動を議論する。このような流れは Lagrange 表示をもちいる場合には、Lagrange 座標 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と時刻 t を独立変数とする位置ベクトル $\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$ ($\vec{x}(\vec{a}, 0) = \vec{a}$)、渦度ベクトル $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{a}, t)$ の発展方程式

$$\frac{D\vec{x}}{Dt} = \vec{v}, \tag{2.1}$$

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \sum_{\lambda, \mu} \vec{e}_\lambda \omega_\mu \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\lambda} = (\vec{\omega} \cdot \text{grad}) \vec{v}, \tag{2.2}$$

及び、Euler 表示での渦度の定義式：

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}, \tag{2.3}$$

によって表される。(2.3) の rot をとって

$$\nabla^2 \vec{v} = -\text{rot } \vec{\omega}, \quad (2.4)$$

をうる。ここで、球内の渦度場の場合には、その外部に鏡像渦度場を考慮することによって、無限領域の渦度場をかんがえる。(2.4)を無限領域で、無限遠からの寄与がないとして解くと、Biot-Savartの法則が導かれる。

$$\vec{v} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \omega' \text{grad}' F d^3 \vec{x}', \quad (2.5)$$

ここで、 $F(\vec{x}, \vec{x}') = -(4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|)^{-1}$ は Laplacian に対する基本解である。ここで注意すべきは、(2.5)の rot をとると

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\omega} - \iiint_{|\vec{x}'|>1} \text{div}' \omega' \text{grad} F d^3 \vec{x}', \quad (2.6)$$

となり、ソレノイダルでない $\vec{\omega}$ を与えたばあいには、一般に $\text{rot } \vec{v}$ が与えた渦度にならないことである。球の鏡像渦度場を考える場合には、この事が問題になる。

3. 渦度場の球による鏡像

球内 ($|\vec{x}| < 1$) でソレノイダルな渦度場が与えられている場合に、球面で法線速度が0になるその内部の流速を(2.5)によってもとめるために、鏡像の方法をもちいる。鏡像の位置 \vec{x} は一般のポテンシャル論におけるように、

$$\vec{x} = \vec{x}' / |\vec{x}'|^2 \quad (3.1)$$

である。 $|\vec{x}'| |\vec{x}| = 1$ であるから、これと dual な関係

$$\vec{x}' = \vec{x} / |\vec{x}|^2 \quad (3.2)$$

がえられる。今、球の外部 ($|\vec{x}| > 1$) の鏡像の渦度を

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega}(\vec{x}) &= (\vec{x}' / |\vec{x}'|^2) \left((\vec{\omega}' \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - (\vec{\omega}' \cdot \vec{e}_\theta) \vec{e}_\theta - (\vec{\omega}' \cdot \vec{e}_\varphi) \vec{e}_\varphi \right) / |\vec{x}'|^5, \\ \vec{\omega} &= \vec{\omega}' (\vec{x} / |\vec{x}|^2), \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

とおくと、球面での法線速度が0になることがわかる。ただし \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_φ は球座標の単位ベクトルである。しかしこのように計算された'渦度'はソレノイダルではなく

$$\text{div } \vec{\omega} = -\vec{\omega} \cdot \vec{x} / |\vec{x}|^7, \quad |\vec{x}| > 1, \quad (3.4)$$

となる。そこで、2節の終りで述べたように $\text{rot } \vec{v}$ と、球の内部で $\vec{\omega}$ とが異なる。したがって、球内の解を斉次解を付け加えた形におく。

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \text{grad } F(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\omega}' d^3x' + \vec{v}_h(\vec{x}) \\ \nabla \cdot \vec{v}_h &= 0, \quad \text{div } \vec{v}_h = 0, \end{aligned} \right\} |\vec{x}| < 1, \quad (3.5)$$

とおく。ここで、齊次解 \vec{v}_h をもとめる事を考える。(3.5)の第1式の rot をとると

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\omega} + \iiint_{|\vec{x}'| > 1} \text{grad } F(\text{div}' \vec{\omega}') d^3x' + \text{rot } \vec{v}_h, \quad |\vec{x}| < 1, \quad (3.6)$$

をうる。球内では $\text{rot } \vec{v} = \vec{\omega}$ であるから、結局

$$\text{rot } \vec{v}_h = \iiint_{|\vec{x}'| > 1} (\text{div}' \vec{\omega}') \text{grad } F d^3x', \quad |\vec{x}| < 1, \quad (3.7)$$

によって \vec{v}_h を決めなければならない。ここで、

$$\vec{v}_h = \iiint_{|\vec{x}'| > 1} \text{div}' \vec{\omega}' \vec{G}(\vec{x}, \vec{x}') d^3x' \quad |\vec{x}| < 1, \quad (3.8)$$

とおくと

$$\text{grad } F(\vec{x}, \vec{x}') = \text{rot } \vec{G}(\vec{x}, \vec{x}'), \quad |\vec{x}| < 1, \quad |\vec{x}'| > 1, \quad (3.9)$$

がえられる。(3.8)の \vec{v}_h が $\text{div } \vec{v}_h = 0$ ($|\vec{x}| < 1$) と $\vec{v}_h \cdot \vec{n} = 0$ ($|\vec{x}| = 1$) を満たすようにするためには

$$\vec{G}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\vec{x} \times \vec{x}'}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'| (|\vec{x}'| |\vec{x} - \vec{x}'| - \vec{x}' \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))}, \quad |\vec{x}| < 1, \quad |\vec{x}'| > 1, \quad (3.10)$$

ととればよい。

ヴォートンの基礎方程式は、(2.1), (2.2), (3.8), (3.10)等を離散化して求める。

$$\frac{D\vec{X}(1, t)}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l'} \frac{V(l')}{R(1, l')^3} \vec{\Omega}(l') \times \vec{R}(1, l') + \vec{v}_h(1, t), \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{\Omega}(1, t)}{Dt} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l'} V(l') \left[\frac{1}{R(1, l')^3} \vec{\Omega}(l') \times \vec{\Omega}(l') - \frac{3}{R(1, l')^5} \vec{R}(1, l') \right. \\ &\quad \left. \{ \vec{\Omega}(l') \cdot (\vec{\Omega}(l') \times \vec{R}(1, l')) \} \right] + \vec{\Omega} \cdot \text{grad} \cdot \vec{v}_h(1, t), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\vec{v}_h(1, t) = - \frac{1}{4\pi} \sum_{l'} \frac{v(l') \vec{\Omega}(l_r') \cdot \vec{x}(l')}{|\vec{x}(l')|^7} \frac{\vec{x}(1) \times \vec{x}(l')}{R(1, l') (|\vec{x}(l')| R(1, l') - \vec{x}(l') \cdot \vec{r}(1, l'))} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \cdot \text{grad} \cdot \vec{v}_h(1, t) = & - \frac{1}{4\pi} \sum_{l'} \frac{\vec{\Omega}(l_r') \cdot \vec{x}(l') v(l')}{|\vec{x}(l')|^7} \frac{1}{R(1, l') \{ |\vec{x}(l')| R(1, l') - \vec{x}(l') \cdot \vec{r}(1, l') \}} \\ & [\vec{\Omega}(1) \times \vec{x}(l') - \vec{\Omega}(1) \cdot (\vec{x}(l') \times \vec{x}(1)) \{ \frac{\vec{x}(1) - \vec{x}(l')}{R(1, l')} \\ & + \frac{|\vec{x}(l')| \vec{r}(1, l') - \vec{x}(l') R(1, l')}{R(1, l') (|\vec{x}(l')| R(1, l') - \vec{x}(l') \cdot \vec{r}(1, l'))} \}], \quad (3.14) \end{aligned}$$

ここで、 l_r' は鏡像ヴォートン l' に対応する実在のヴォートンの番号を表す。無限領域の場合では、 \vec{v}_h の項は省略し、球の内部問題の場合では、(3.11), (3.12) の和は実在、鏡像両方のヴォートンにわたって実行される。

4. 絡まった2つの渦輪

この場合については、今までに発表したものより精密な結果をしめす。本節、以下2節での数値計算法はヴォートン・モデルをもとずき、4次のRunge-Kutta法でおこなった。ヴォートンの分裂を考慮し、太さ比の下限は $Th_b = 0.5$ ととった。ここで、初期データは

$$b/a=0.1, \quad DT(0)=0.002, \quad Th(0)=2/\pi=0.6366\dots, \quad NV(0)=20 \times 2, \quad (4.1)$$

である。a, bは渦輪の半径と渦糸の半径、DT, Th, NVは時間メッシュ、太さ比、ヴォートンの数で(0)は初期をあらわす。

5. みつわ形の渦糸

初期の渦糸の形は

$$\begin{aligned} x &= a(1+c_1 \cos(3\theta/2)) \cos \theta, \quad y = a(1+c_1 \cos(3\theta/2)) \sin \theta, \\ z &= ac_2 \sin(3\theta/2), \quad (5.1) \end{aligned}$$

であらわされ、初期のデータは

$$c_1=0.3, \quad c_2=0.3, \quad b/a=0.1, \quad Th(0)=0.86796\dots, \quad DT(0)=0.001, \quad NV(0)=60, \quad (5.2)$$

である。

6. 球内の渦輪

ここでは、2、3節に述べた方法をもちいて、球内の1つの渦輪の運動を解析した。球の半径 a 、渦輪の循環 Γ によって

$$\vec{x}/a, \quad t/(a^2/\Gamma), \quad \vec{v}/(\Gamma/a), \quad \vec{\omega}/(\Gamma/a^2), \quad (6.1)$$

のように無次元化する。初期データは

$$b/a = 0.1, \quad DT(0) = 0.0005, \quad Th(0)=2/\pi = 0.6366\dots, \quad NV(0)=20. \quad (6.1)$$

である。

7. むすび

この論文では、ヴォートン・モデルにもとずき、絡まった2つの渦輪、みつわ形の渦糸、球内の渦輪を数値解析した。球内の渦輪の場合には、鏡像の方法をもちいた。鏡像渦場はソレノイダルにならないので、誘導速度をもとめる時に、Biot-Savartの法則をそのまま適用出来ず、斉次解を付け加える必要がある。

第1図(a)は絡まった2つ渦輪、(b)はみつわ形の渦糸、(c)は球内の渦輪の発展を3面図で示してある。図中の NV は1つの渦輪にふくまれるヴォートンの数、 DT はその時刻における時間メッシュを示す。第2図(a)、(b)は、各々絡まった2つの渦輪、みつわ形の渦糸のエンストロフィー (Es)、ヘリシイター (HI)、エネルギー

(E)、全渦度 (TO)、運動量 (P)、角運動量 (AP)、初期値で規格化された L_2 ノルム ($Es(t)/Es(0)$)^{0.5} 及びマックスимум・ノルム ($\omega_{\max}(t)/\omega_{\max}(0)$)の逆数の時間発展が示されている。同図最後はヴォートンの最小長さ(横軸)と渦輪全体の長軸(縦軸)の各時刻における値の軌跡が両対数グラフで示してある。なお、上の積分量は一般にもちられる渦度の積分形を離散化してもちい、エネルギーについては、ある近似で自己エネルギーも考慮した。

第1図(a) $t=4.99$ では、2つの渦輪が切れかかっているように見える。(b) $t=3$ では、みつわ形の渦糸が大小2つの渦輪に分裂し、(c) $t=1.3$ では、渦輪が切れかかっている。このような現象は、完全流体では起こらないことである。しかし、われわれの解析では、数値誤差、ヴォートンの分裂、時間メッシュの短縮等からヴォートン力学系に一種の揺動が導入される可能性は十分ありうる。したがって、統計物理学の立場から揺動にともなって、エネルギー散逸が生じる可能性もあろう。第2図の、2つの渦輪およびみつわ形の渦糸の、エネルギーの時間発展を見ると、その初期にはエネルギーが減少していることがわかる。このエネルギー減少と揺動にともなうエネルギー散逸になんらかの関係があるように、思われる。その後のエネルギーの増加は、現実には起こらない平行したペア、3重、4重ヴォートンの発生に起因していると考えられる。

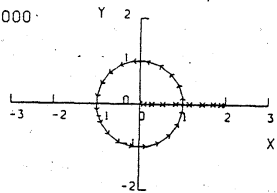
2つの渦輪の系のその他の保存量、運動量、角運動量、全渦度の保存は大体満足するものであるが、ヘリシティーは $t = 2$ 付近までは一定で、それ以後は振動する。みつわ渦糸の保存量、運動量、全渦度の不変性はよいが、ヘリシティー、角運動量の不変性はよくないことがわかる。渦度のノルムの時間的に発散する傾向をもつことはEuler方程式の爆発の兆候と考えられよう。

参考文献：

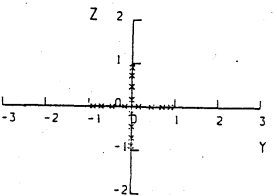
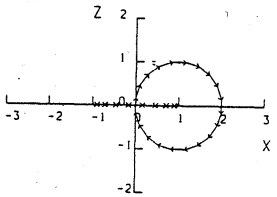
- 1) J.T.Beale, T.Kato and J.Majda: Comm. Math. Phys. 94 (1984) 553.
- 2) J.T.Beale and A.Majda: Math. Computation 39 (1983) 1.
- 3) J.T.Beale and A.Majda: Math. Computation 39 (1983) 29.
- 4) A.J.Chorin: Comm. Math.Phys. 83 (1982) 517.
- 5) S.Kuwabara: Proc. of the Symposium on Mech. for Space Flight-1983 (1984) 15.
- 6) S.Kuwabara: Proc. of the Synposium on Mech. for Space Flight-1984 (1985) 31.
- 7) 桑原真二：第17回乱流シンポジウム講演論文集 (1985) 145.
- 8) S.Kuwabara: J. Phys. Soc. Japan 54 (1985) 4881.
- 9) S.Kuwabara: Proc. of the Synposium on Mech. for Space Flight-1985 (1986) 11.
- 10) 桑原真二：数理研講究録606 (1987.2;1986.1 研究集会) 36.
- 11) 桑原真二、福湯章夫：第18回乱流シンポジウム講演論文集、日本流体力学会誌「ながれ」2 別冊(1986) 20.
- 12) 桑原真二、M.U.Farooq：数理研講究録601 (1986.12;1986.7 研究集会) 99.
- 13) S.kuwabara: Proc. of the Symposium on Mech. for Space Flight-1986(1987) 23.
- 14) S.Kuwabara: Abstracts of 3rd Asian Congress on Fluid Mechanics (1986) 216.
- 15) S.Kuwabara: Abstracts of IUTAM Synposium on Fundamental Aspects of Vortex Motion (1988) 48.
- 16) S.Kuwabara: Proc. of IUTAM Synposium on Fundamental Aspects of Vortex Motion (1988) to appear.
- 17) A.Leonard: inTurbulnet Shear Flows 2 (ed. by L.J.S.Bradbury et al., Springer, 1980).
- 18) B.Mandelbrot: in Turbulence and NS Equation (ed. by R.Temam, Springer, 1971) 1212.
- 19) E.A.Novikov: Soviet Phys., JETP 57 (1983) 566.
- 20) P.G.Saffman: in Transion and Turbulence (Academic Press, 1981) 149.

(a)

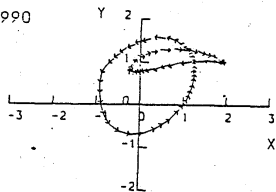
T= 0.0000000
NV= 20



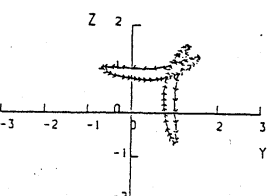
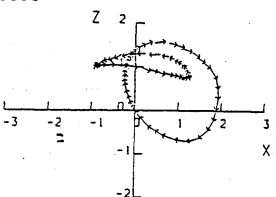
DT= 0.0020000



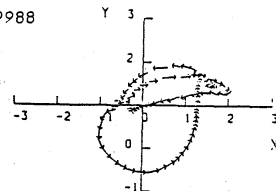
T= 3.9999990
NV= 38



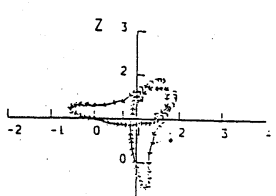
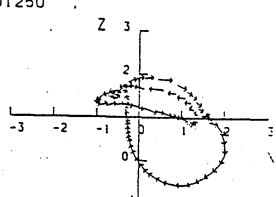
DT= 0.0005000



T= 4.9899988
NV= 52

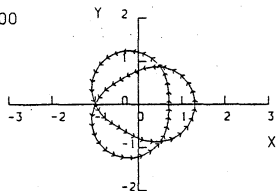


DT= 0.0001250

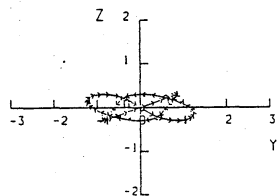
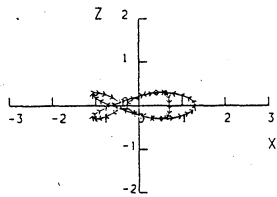


(b)

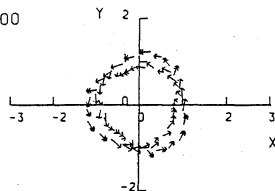
T= 0.000000
NV= 60



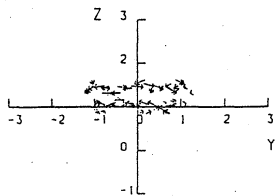
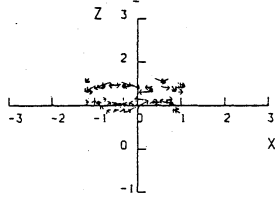
DT= 0.001000



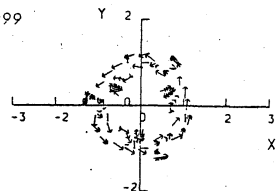
T= 3.000000
NV= 75



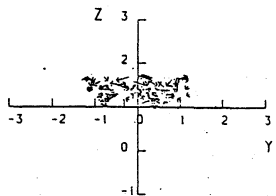
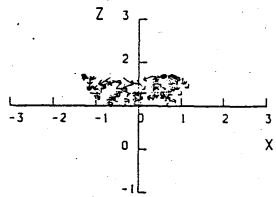
DT= 0.001000



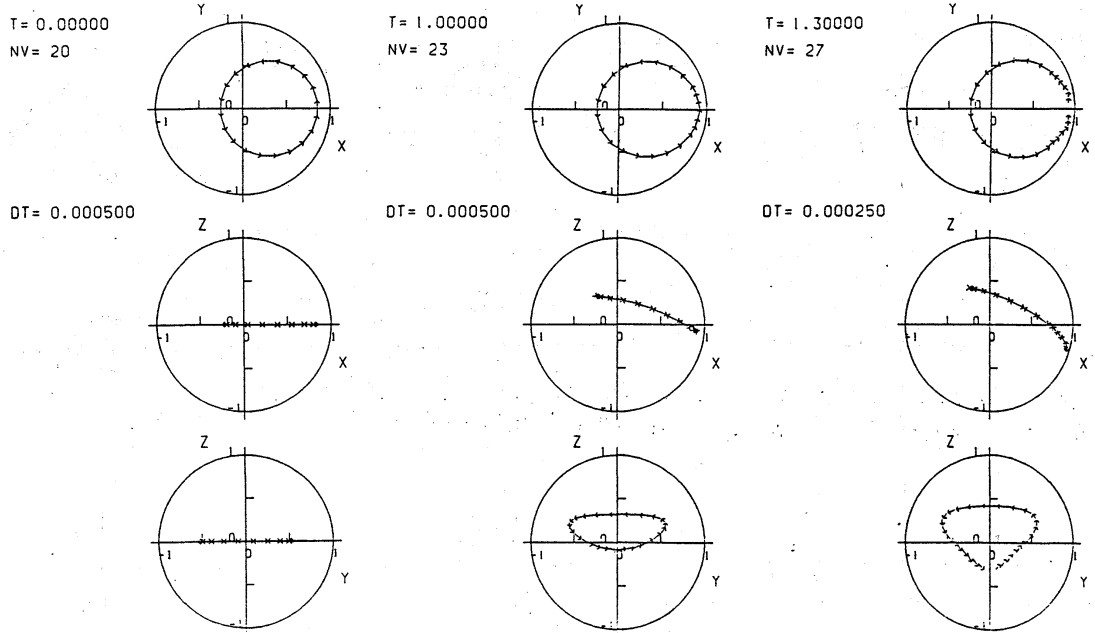
T= 3.399999
NV= 159



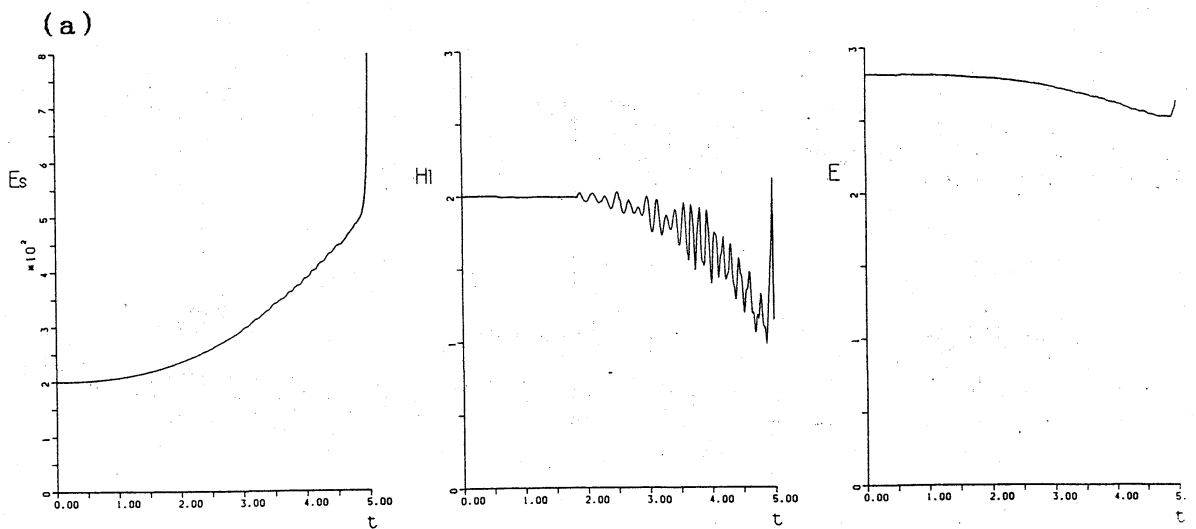
DT= 0.000125



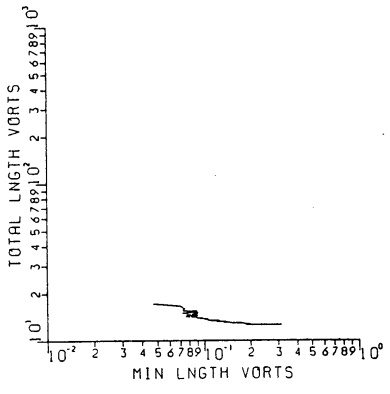
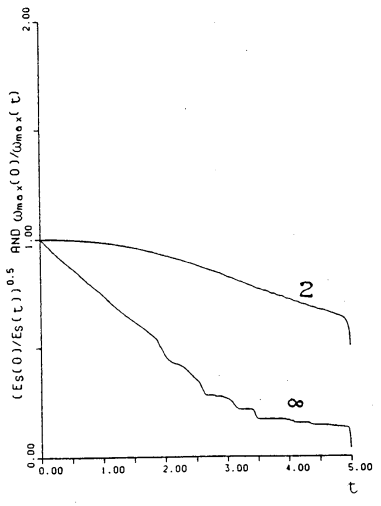
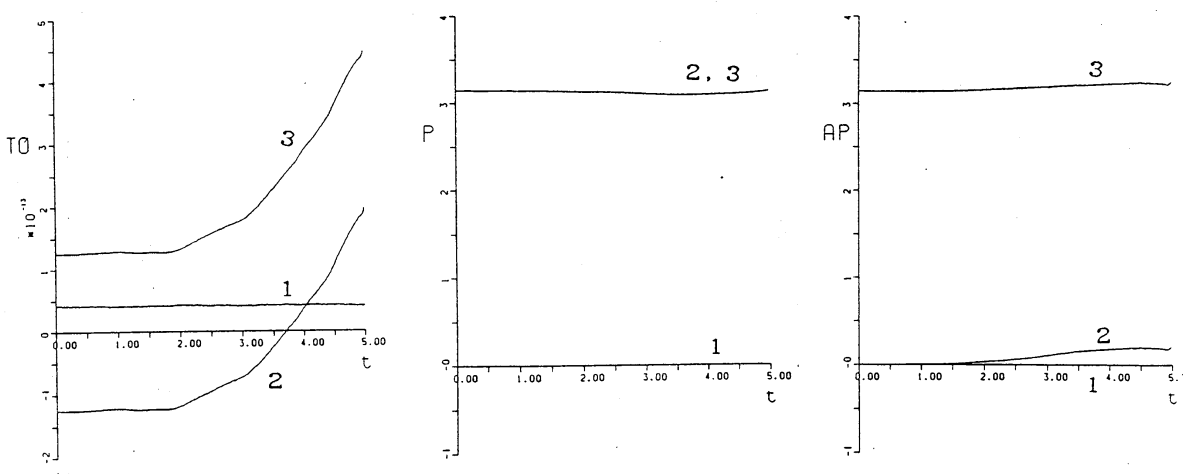
(c)



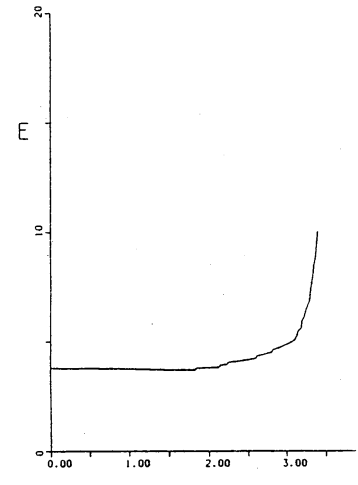
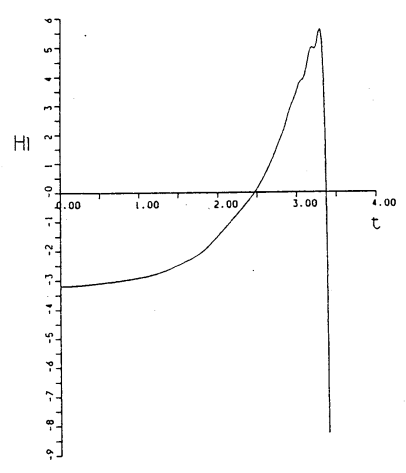
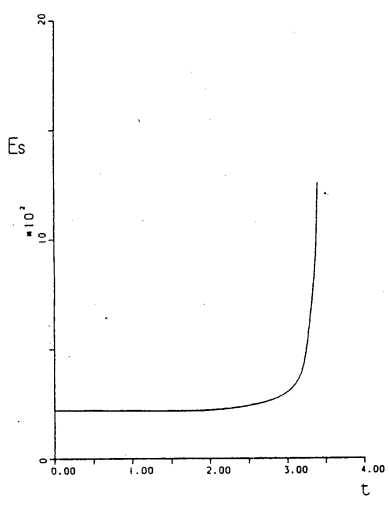
第1図。 3面図による渦糸の時間発展。(a) 2つの渦輪、(b) みつわ形の渦糸、(c) 球内の渦輪。



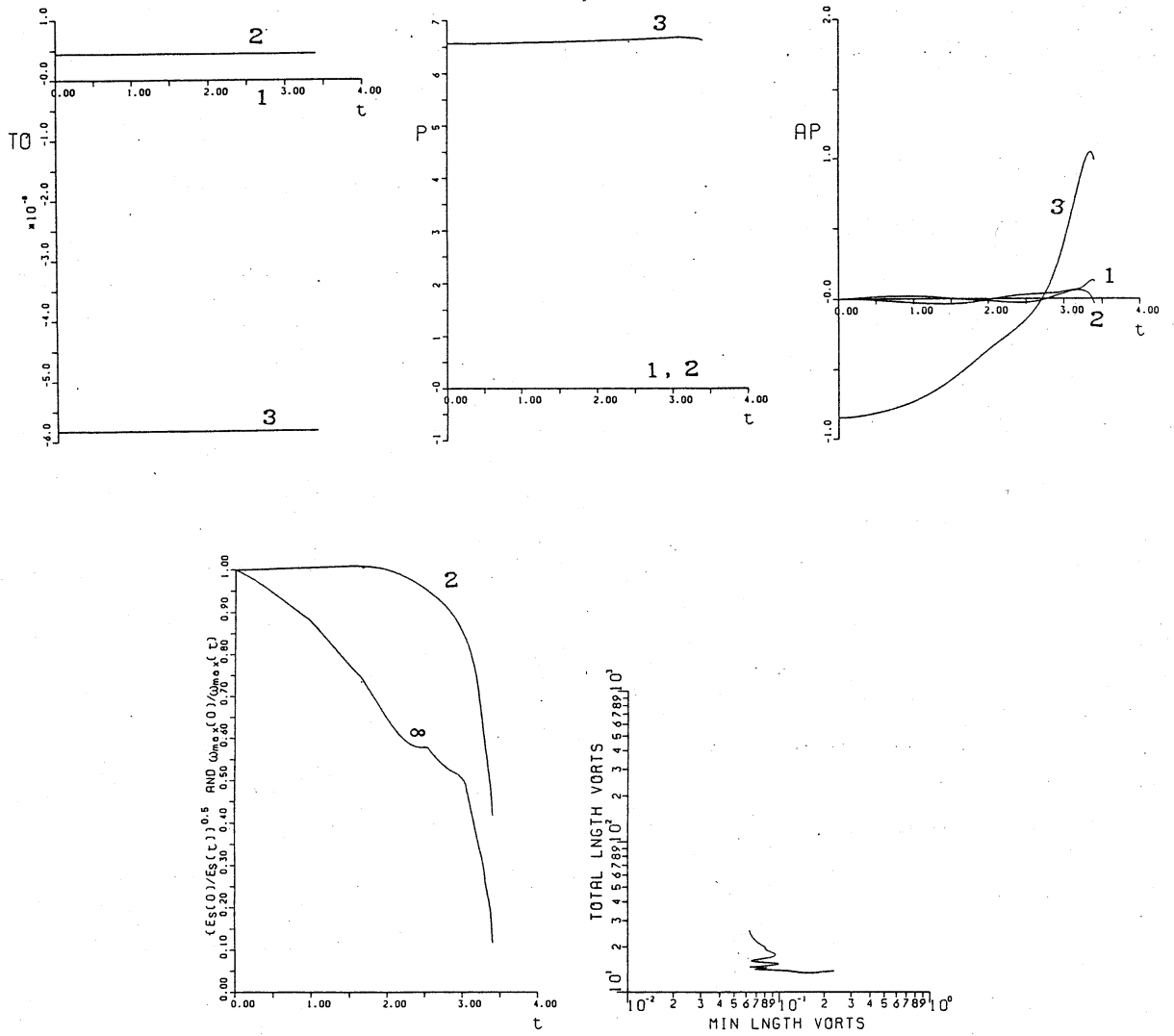
▽



(b)



9



第2図。 エンストフィー (E_s)、ヘリシティィー ($H1$)、全渦度 (TO)、運動量 (P)、角運動量 (AP) および渦度ノルムの時間発展。(a) 2つの渦輪、(b) みつわ形の渦糸。