数理解析研究所講究録
第652巻 1988年 180-192

2応答関数に基く乱流理論と定常乱流へのその応用

都立大・理　冨山泰伸　(Yasunobu Tomiyama)

1. まえがき

Navier-Stokes方程式に基いて，一様・等方性乱流の統計平均量に関する閉じた方程式系を導く理論的試みは数多い。それらの理論の中の1つにKraichnanによるDIA[1]があり，その評価はまちまちであるが，乱流理論の中心的役割を果して来た。しかしながら，高Reynolds数の極限においてKolmogrov lawを仮定すると，DIAの応答関数は発散することが知られている。Euler座標系で理論を構成する限り，この欠点は避けられないとKraichnanは考え，Lagrangian座標系に基く修正理論を行った。[2),3)] しかしDIAで導入された応答関数に問題がありLagrange的修正が的を得たものかどうか疑問である。速度場に微小攪乱を加えたとき，乱された速度の摂動がいつまでも微小のままであるとして導かれる摂動に対する線形方程式を応答関数を定める方程式として採用している。しかし，乱流運動をそのような線形方程式に基いて表わすことは無理があり，むし

る，そのようにして定められた応答関数を用いるところに，DIAの欠点は起因するものと考えるのが自然であろう。

この研究の主な目的はDIAの応答関数では無視されている相互作用を考慮することによって，DIAの欠点を含まないEuler座標系に依拠する応答関数を導入して，乱流理論の定式化を行うことである。低波数の極限 $k=0$ で乱流にエネルギーを注入して得られる，Reynolds数無限大の定常乱流に，この理論を適用して，Kolmogrov則が得られた。従って，DIAの欠点がEuler座標系に固有のものではないことが示されたと考える。

2. 理論の基礎

乱流は非圧縮性でNavier-Stokes方程式に従って運動するものとしよう。一辺 L の立方体に流体は満されているものとし，後に $L\to\infty$ として一様等方性乱流を扱うことにする。速度場 $u(x,t)$ を

$$u_\alpha(x,t)=\sum_k v_\alpha(k,t)e^{ik\cdot x} \tag{1}$$

とFourier級数に展開すると，Navier-Stokes方程式と連続の式は次のように表わされる。

$$(\partial/\partial t+\nu k^2)v_\alpha(k,t)=iD_{\alpha\beta\gamma}(k)\sum_p^{q=k-p}v_\beta(p,t)v_\gamma(q,t) \tag{2}$$

$$k_\alpha v_\alpha(k,t)=0 \tag{3}$$

ただし

$$D_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{k}) = [k_\beta \Delta_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{k}) + k_\gamma \Delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})]/2 \tag{4}$$

$$\Delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}) = \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2 \tag{5}$$

式(2)の右辺の非線形項は種々のmodeの速度の相互作用を表わし，それによって $v_\alpha(\boldsymbol{k},t)$ の時間発展が決定されていくことを示している。したがって，乱流の基本相互作用は閉じた3角形を形造る波数ベクトル $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ ($\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$) の速度の相互作用であることを (2) は示している。

乱流が十分発達した状態にあるとすると，励起されるmodeの数 $N \sim (L/2\pi)^3$ を用いて，$N \to \infty$ で $\langle v_\alpha(\boldsymbol{k},t) v_\alpha^*(\boldsymbol{k},t) \rangle \sim N^{-1}$ ($\langle u^2 \rangle = \sum \langle v_\alpha(\boldsymbol{k},t) v_\alpha^*(\boldsymbol{k},t) \rangle \sim N \langle v_\alpha(\boldsymbol{k},t) v_\alpha^*(\boldsymbol{k},t) \rangle$) と評価される。式(2) を用いて3重以上の速度積平均は $\langle vvv \rangle \sim N^{-2}$ $\langle vvvv \rangle \sim N^{-3}$ のように評価される。Kraichnanによって導入された"maximal randomness"[1]に従って，Orszag と Kruskal[4]は $L \to \infty$ ($N \to \infty$) において次のような速度積平均に関する一般的表式を提案した。

$$\langle v_\alpha(\boldsymbol{k}_1) v_\beta(\boldsymbol{k}_2) \cdots v_\gamma(\boldsymbol{k}_n) \rangle = \begin{cases} N^{1-n} W^{(n)}_{\alpha\beta\cdots\gamma}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \cdots, \boldsymbol{k}_n) & : \text{既約積} \\ \\ \displaystyle\sum_{(\text{全組})} \langle v_\alpha(\boldsymbol{k}_1) \cdots \rangle \langle \quad \rangle \cdots \langle \quad \rangle & : \text{可約積} \end{cases} \tag{6}$$

ここで〈 〉は平均を意味し，既約積とは $v_\alpha(\boldsymbol{k}_1) \cdots v_\gamma(\boldsymbol{k}_n)$ の

波数 $\mathbf{k}_1, \cdots \mathbf{k}_n$ の中から選び出されたいかなる組 $\mathbf{k}_1', \cdots \mathbf{k}_m' \,(m<n)$ に対しても $\mathbf{k}_1'+\cdots+\mathbf{k}_m' = 0$ とすることができない速度積をいい，可約積とは $\mathbf{k}_1'+\cdots+\mathbf{k}_m' = 0$ が可能な速度積のことである。乱流の基本的な統計的性質は (6) によって表現されていると考え，これを理論の基礎とする。

3．基礎方程式の変形

式(2) によって導かれる n 重速度積平均に対する時間発展方程式は $(n+1)$ 重速度積平均を含み，したがって方程式系が無限の階層を構成することは良く知られている。ここでは，$v_\alpha(\mathbf{k},t)v_\alpha(\mathbf{k},t)$，基本的相互作用を表わす $h_{\alpha\beta}(\mathbf{k},t)$，それらによって表わされる応答テンソルによって乱流の基本的な統計平均量の性質が定められるものと考えよう。

さて，(2) の右辺は次のような厳密な変形を行うことができる。時刻 t は省略した簡略化した表現を用いる。

$$
\begin{aligned}
i D_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}} v_\beta(\mathbf{p}) v_\gamma(\mathbf{q}) = {} & \{[h(\mathbf{k}) + h^*(\mathbf{k})]/2w(\mathbf{k})\} v_\alpha(\mathbf{k}) \\
& + \{[h_{\alpha\lambda}(\mathbf{k}) - \tfrac{1}{2} h^*_{\lambda\alpha}(\mathbf{k}) - \tfrac{1}{2} h(\mathbf{k}) e_{\alpha\lambda}(\mathbf{k})]/w(\mathbf{k})\} v_\lambda(\mathbf{k}), \qquad (7)
\end{aligned}
$$

ただし

$$h_{\alpha\lambda}(\mathbf{k}) = i D_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}} v^*_\lambda(\mathbf{k}) v_\beta(\mathbf{p}) v_\gamma(\mathbf{q}) \qquad (8)$$

$$h(\mathbf{k}) = h_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) \qquad (9)$$

$$w(\mathbf{k}) = v_\alpha(\mathbf{k}) v^*_\alpha(\mathbf{k}) \qquad (10)$$

$$e_{\alpha\lambda}(k) = v_\alpha(k) v_\lambda^*(k) / w(k) \tag{11}$$

(7) の右辺オ1項は $v_\alpha(k)$ の単位時間当りの伸縮の割合を表わし，オ2項は $v(k)$ の空間回転と $v_\alpha(k)$ の位相面内の回転の変化の割合を示す。上の変形に習って，次のような類似の変形を考えよう。

$$iD_{\alpha\beta\gamma}(k) \sum v_\beta(p) v_\gamma(q) = \eta_{\alpha\lambda}(k) v_\lambda(k) - f_\alpha(k) \tag{12}$$

ただし

$$\eta_{\alpha\lambda}(k) = \bar{\eta}(k) e_{\alpha\lambda}(k) + \tilde{\eta}_{\alpha\lambda}(k) \tag{13}$$

$$\bar{\eta}(k) = [\bar{a} \, \mathrm{Re}\, h(k) + \bar{b} \langle h(k) \rangle] / \langle w(k) \rangle \tag{14}$$

$$\tilde{\eta}_{\alpha\lambda}(k) = [\tilde{a} h_{\alpha\lambda}(k) - (\tilde{a} + \tilde{b}) h_{\lambda\alpha}^*(k) + \tilde{b} h(k) e_{\alpha\lambda}(k)] / \langle w(k) \rangle \tag{15}$$

$f_\alpha(k)$ は (12) の右辺オ1項と左辺の差である。このような非線形項の変形の目的は $h_{\alpha\lambda}(k, t)$ の時間発展を (2) 用いて表わすとき，その非線形項を(12) の右辺オ1項で統計的性質を代表させることにある。そこで，次のような条件を加えよう。

$$iD_{\alpha\beta\gamma}(k) \sum \langle v_\beta(p) v_\gamma(q) v_\rho^*(p') v_\sigma^*(q') \rangle = \langle \bar{\eta}(k) v_\alpha(k) v_\rho^*(p') v_\sigma^*(q') \rangle \tag{16}$$

$$0 = \langle \tilde{\eta}_{\alpha\lambda}(k) v_\lambda(k) v_\rho^*(p') v_\sigma^*(q') \rangle \tag{17}$$

$$0 = \langle f_\alpha(k) v_\rho^*(p') v_\sigma^*(q') \rangle \tag{18}$$

平均的に見て，回転・位相の変化は特別な方向をもつとも思われないので，条件 (17) を用いた。これらの条件 (16)–(18) を用いて，$\bar{a} = 4$，$\bar{b} = -5$ が得られる。ここで (6) の性質を用いていることを注意しておこう。更に $2\tilde{a} + \tilde{b} = 0$ でなけ

ればないことがわかるが，上の条件だけでは α と ε の値を定めることができない。

非線形項の変形を用いて，(2) を書き改めると

$$[\partial/\partial t+\nu k^2+\bar{\eta}(k,t)]v_\alpha(k,t)+\tilde{\eta}_{\alpha\lambda}(k,t)v_\lambda(k,t)$$

$$=-2iD_{\alpha\beta\gamma}(k)v_\beta(p',t)v_\gamma(q',t)+f_\alpha(k,t) \tag{19}$$

となる。式(19)の右辺第1項は $\langle v_\alpha(k,t)v_\beta^*(p',t)v_\gamma^*(q',t)\rangle$ の相関の発生源であり，他の項とは異る扱いを必要とすることを示している。この項を特別扱いすることにより $\bar{\eta}(k,t)$ や $\tilde{\eta}_{\alpha\lambda}(k,t)$ に及ぶ影響は十分小さいものと考えられる。式(19)を $h_{\alpha\lambda}(k,t)$ を定める基礎方程式とする。

4. 応答テンソル

式(19)の右辺を外力と見なすと，次の方程式によって定義される応答テンソル $g_{\alpha\lambda}(k;t,t')$ を導入することができる。

$$\left.\begin{aligned}&[\partial/\partial t+\nu k^2+\bar{\eta}(k,t)]g_{\alpha\lambda}(k;t,t')+\tilde{\eta}_{\alpha\rho}(k,t)g_{\rho\lambda}(k:t,t')=0\\&g_{\alpha\lambda}(k;t,t)=e_{\alpha\lambda}(k,t)\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$g_{\alpha\lambda}(k;t,t')$ を $v(k,t)$ の伸縮に関係する応答 $\bar{g}(k:t,t)$ と回転・位相に関係する応答 $\tilde{g}_{\alpha\lambda}(k;t,t')$ に分解し

$$g_{\alpha\lambda}(k;t,t')=\bar{g}(k;t,t')\tilde{g}_{\alpha\lambda}(k;t,t') \tag{21}$$

と表わす。$\bar{g}(k:t,t')$ と $\tilde{g}_{\alpha\lambda}(k;t,t')$ は次の方程式を満足するものとする。

$$\left.\begin{aligned}&[\partial/\partial t+\nu k^2+\bar{\eta}(\boldsymbol{k},t)]\,\bar{g}(\boldsymbol{k};t,t')=0\\&\bar{g}(\boldsymbol{k}:t,t)=1\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}&\partial\tilde{g}_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{k};t,t')/\partial t+\tilde{\eta}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},t)\,\tilde{g}_{\beta\lambda}(\boldsymbol{k};t,t')=0\\&\tilde{g}_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{k}:t,t)=e_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{k},t)\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

(22), (23) はそれぞれ次の式と等価である。

$$\left.\begin{aligned}&[\partial/\partial t'-\nu k^2-\bar{\eta}(\boldsymbol{k},t')]\,\bar{g}(\boldsymbol{k};t,t')=0\\&\bar{g}(\boldsymbol{k}:t,t)=1\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}&\partial\tilde{g}_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{k}:t,t')/\partial t'-\tilde{g}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}:t,t')\,\tilde{\eta}_{\beta\lambda}(\boldsymbol{k},t')=0\\&\tilde{g}_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{k}:t,t)=e_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{k},t)\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

上の定義式から次の関係式が導かれる。

$$\bar{g}(\boldsymbol{k};t,t')\,\bar{g}(\boldsymbol{k};t',s)=\bar{g}(\boldsymbol{k};t,s)\tag{26}$$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k};t,t')\,\tilde{g}_{\beta\lambda}(\boldsymbol{k};t',s)=\tilde{g}_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{k};t,s)\tag{27}$$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k};t,t')\,e_{\beta\lambda}(\boldsymbol{k},t')=\tilde{g}_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{k};t,t')\tag{28}$$

速度3重積 $v_\alpha^*(\boldsymbol{k},t)v_\beta(\boldsymbol{p},t)v_\gamma(\boldsymbol{q},t)$ の方程式は (19) より得られ，次のように表わされる。

$$\begin{aligned}&[\partial/\partial t+\nu(k^2+p^2+q^2)]\,v_\alpha^*(\boldsymbol{k},t)v_\beta(\boldsymbol{p},t)v_\gamma(\boldsymbol{q},t)\\&+[\eta_{\alpha\lambda}^*(\boldsymbol{k},t)\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma}+\delta_{\alpha\lambda}\eta_{\beta\rho}(\boldsymbol{p},t)\delta_{\gamma\sigma}+\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\rho}\eta_{\gamma\sigma}(\boldsymbol{q},t)]\,v_\lambda^*(\boldsymbol{k},t)v_\beta(\boldsymbol{p},t)v_\gamma(\boldsymbol{q},t)\\&=2iD_{\alpha\rho\sigma}(\boldsymbol{k})v_\rho^*(\boldsymbol{p},t)v_\sigma^*(\boldsymbol{q},t)v_\beta(\boldsymbol{p},t)v_\gamma(\boldsymbol{q},t)\\&\quad-2iD_{\beta\sigma\lambda}(\boldsymbol{p})v_\sigma^*(\boldsymbol{q},t)v_\lambda(\boldsymbol{k},t)v_\gamma(\boldsymbol{q},t)v_\alpha^*(\boldsymbol{k},t)\\&\quad-2iD_{\gamma\lambda\rho}(\boldsymbol{q})v_\lambda(\boldsymbol{k},t)v_\rho^*(\boldsymbol{p},t)v_\alpha^*(\boldsymbol{k},t)v_\beta(\boldsymbol{p},t)+\cdots\end{aligned}\tag{29}$$

応答テンソルを用いて (29) を解き $h^*_{\alpha\lambda}(k, t)$ を求めると次のようになる。

$$h^*_{\alpha\lambda}(k,t) = 2D_{\alpha\beta\gamma}(k)\sum_{p} D_{\rho\mu\nu}(p)\int_{t_0}^{t} ds\,\bar{g}(k:t.s)\,w(k,s)\,\tilde{g}_{\lambda\nu}(k;t.s)$$

$$\times\bar{g}(p:t.s)\,\tilde{g}^*_{\beta\rho}(p:t.s)\,\bar{g}(q:t.s)\,w(q.s)\,\tilde{g}^*_{\gamma\mu}(q:t.s)$$

$$+2D_{\alpha\beta\gamma}(k)\sum_{p} D_{\sigma\mu\nu}(q)\int_{t_0}^{t} ds\,\bar{g}(k:t.s)\,w(k.s)\,\tilde{g}_{\lambda\mu}(k:t.s)$$

$$\times\bar{g}(p:t.s)\,w(p.s)\,\tilde{g}^*_{\beta\nu}(p:t.S)\,\bar{g}(q:t.s)\,\tilde{g}^*_{\gamma\sigma}(q:t.s)$$

$$-2D_{\alpha\beta\gamma}(k)\sum_{p} D_{\kappa\mu\nu}(k)\int_{t_0}^{t} ds\,\bar{g}(k;t.s)\,\tilde{g}_{\lambda\kappa}(k:t.s)\,\bar{g}(p:t.s)$$

$$\times w(p.s)\,\tilde{g}^*_{\beta\mu}(p:t.s)\,\bar{g}(q:t.s)\,w(q.s)\,\tilde{g}^*_{\gamma\nu}(q:t.s)+\cdots \qquad (30)$$

5. 乱流方程式

乱流の統計平均量を次のように定義しておこう。

$$(L/2\pi)^3\langle v_\alpha(k,t)\,v^*_\alpha(k,t)\rangle = W(k,t) \qquad (31)$$

$$2(L/2\pi)^3\langle h(k,t)\rangle = -H(k,t) \qquad (32)$$

$$\langle\bar{g}(k:t.t')\rangle = \bar{G}(k:t.t') \qquad (33)$$

$$\langle\tilde{g}_{\alpha\lambda}(k;t.t')\rangle = \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\lambda}(k)\,\tilde{G}(k;t.t') \qquad (34)$$

$$\langle\bar{g}(k:t.t')\,w(k.t')\rangle = (L/2\pi)^{-3}\,W(k;t.t') \qquad (35)$$

$$\bar{G}(k:t.t')\,\tilde{G}(k:t.t') = G(k:t.t') \qquad (36)$$

$$\tilde{G}(k;t,t')\,\bar{W}(k:t.t') = W(k:t.t') \qquad (37)$$

これらの諸量に関する方程式を求めよう。先づエネルギー方程式は (2) によって求められ，(30) を用いて次のように表わ

される。

$$(\partial/\partial t+2\nu k^2)W(k,t)=H(k,t) \tag{38}$$

$$H(k,t)=\pi k\int_0^\infty dp\,p^3\int_{-1}^1 d\mu\, b(p/k,\mu)\int_{t_0}^t ds\,[G(k;t.s)W(p:t.s)$$
$$-W(k:t.s)G(p:t.s)]\,W(q:t.s) \tag{39}$$

$$b(p/k,\mu)=(1-\mu^2)(\mu+kp/q^2) \tag{40}$$

$$q=(k^2+2\mu kp+p^2)^{1/2} \tag{41}$$

ただし $-\mu$ は k と p のなす角の余弦であり，$\sum_p$ は積分 $\int d\mathbf{p}$ に置き換えられている。この式を導くとき weak dependence，即ち異る波数に属する速度成分の統計的独立性が仮定されている。次に，(26)，(27) を考慮して，(24)，(25) を平均すると $\bar{G}(k:t,t')$，$\tilde{G}(k:t,t')$ の方程式が得られる。

$$\left.\begin{array}{l}[\partial/\partial t'-\nu k^2-5H(k,t')/2W(k,t')]\bar{G}(k;t,t')=-2\bar{H}(k:t,t')/W(k,t')\\ \qquad\qquad\bar{G}(k:t,t)=1\end{array}\right\} \tag{42}$$

$$\bar{H}(k:t.t')=\pi k\int_0^\infty dp\,p^3\int_{-1}^1 d\mu\, b(p/k,\mu)\int_{t_0}^{t'} ds\,[\bar{G}(k:t.s)W(p:t'.s)$$
$$-\bar{W}(k:t.s)G(p:t'.s)]\tilde{G}(k;t'.s)W(q:t'.s)] \tag{43}$$

$$\left.\begin{array}{l}[\partial/\partial t'-\tilde{a}H(k,t')/2W(k,t')]\tilde{G}(k;t.t')=-\tilde{a}H(k:t,t')/2W(k,t')\\ \qquad\qquad\tilde{G}(k:t.t)=1\end{array}\right\} \tag{44}$$

$$\tilde{H}(k:t.t')=\pi k\int_0^\infty dp\,p^3\int_{-1}^1 d\mu\, b(p/k,\mu)\int_{t_0}^t ds\,[\bar{G}(k:t'.s)W(p:t'.s)$$
$$-\bar{W}(k;t'.s)G(p:t'.s)]\,\tilde{G}(k:t.s)W(q:t'.s) \tag{45}$$

上の式を導く時に次の仮定が用いられている。

(i) weak dependence，(ii) $\tilde{g}_{\alpha\lambda}(k:t.s)$ と $\bar{g}(k:t.s)$，$w(k,s)$ との統計的独立性，(iii) $\tilde{g}_{\alpha\beta}(k;t,t)$ と $\tilde{g}_{\gamma\lambda}(k;t!s)$，$\tilde{g}_{\gamma\lambda}(k;t!s)$ の統計的独立性（ただし (27) の関係が成り立つときを除いて）。最後に，(2) と (24) から $\bar{W}(k:t.t')$ の方程式を導くと，次のようになる。

$$[\partial/\partial t'+\nu k^2-5H(k,t')/2W(k,t')]\,\bar{W}(k;t.t')=-2\bar{H}(k:t.t') \qquad (46)$$

ここでは次の近似式が用いられている。

$$\langle\bar{g}(k;t.t')h(k.t')w(k,t')\rangle$$

$$=\langle\bar{g}(k:t.t')h(k,t')\rangle\langle w(k,t')\rangle+\langle\bar{g}(k:t.t')h_{\alpha\beta}(k.t')\rangle\langle v_\alpha(k,t')v_\beta^*(k,t')\rangle$$

$$=\frac{3}{2}\langle\bar{g}(k:t.t')h(k,t')\rangle\langle w(k,t')\rangle \qquad (47)$$

この近似は次のような考えに基いている。式 (22) 又は (24) で定義される $\bar{g}(k:t.t')$ は $h(k,s)$ $(t\geq s\geq t')$ で表わされ $w(k,s)$ に依存しないが，$h(k,s)$ がエネルギー伝達に関与しているので $w(k,s)$ と独立ではない。従って，$h(k,s)$ を媒介として間接的に $\bar{g}(k:t.t')$ と $w(k.s)$ が関係していると考えられる。

かくして，$W(k,t)$，$\bar{G}(k:t,t')$．$\tilde{G}(k:t,t')$，$\bar{W}(k:t,t')$ の閉じた方程式系が (38)−(46) の形で得られた。これらの方程式を定常乱流に適用することを，次節で考えよう。

6. 定常乱流

波数$k \sim 0$の近傍でエネルギーを一定の割合εで注入することにより定常乱流が維持されているとする。このとき，Reynods数$Re \to \infty$となり慣性領域が出現していると考えられる。定常乱流に対しては$W(k,t)$, $\bar{G}(k;t,t')$, $\tilde{G}(k:t,t')$ $\bar{W}(k:t,t')$は$W(k)$, $\bar{G}(k,\tau)$, $\tilde{G}(k,\tau)$, $\bar{W}(k,\tau)$ $(\tau=t-t')$と表わされ，$\partial/\partial t'$は$-\partial/\partial\tau$で置き換えられる。慣性領域では粘性の影響を無視できるので

$$\bar{W}(k,\tau)=W(k)\bar{G}(k,\tau) \tag{48}$$

と表わされることが(42)と(46)を比較することによりわかる。したがって，慣性領域では(38),(39)，(42)-(45)から次の式が得られる。

$$0=\pi k\int_0^\infty dp\,p^3\int_{-1}^1 d\mu\, b(p/k,\mu)[W(p)-W(k)]W(q)\int_0^\infty ds\, G(k,s)G(p,s)G(q,s) \tag{49}$$

$$\partial\bar{G}(k,\tau)/\partial\tau=\frac{2\pi k}{W(k)}\int_0^\infty dp\,p^3\int_{-1}^1 d\mu\, b(p/k,\mu)[W(p)-W(k)]W(q)$$
$$\times\int_0^\infty ds\,\bar{G}(k,\tau+s)\tilde{G}(k,s)G(p,s)G(q,s) \tag{50}$$

$$\partial\tilde{G}(k,\tau)/\partial\tau=\frac{\tilde{a}\pi k}{2W(k)}\int_0^\infty dp\,p^3\int_{-1}^1 d\mu\, b(p/k,\mu)[W(p)-W(k)]W(q)$$
$$\times\int_0^\infty ds\,\tilde{G}(k:\tau+s)\bar{G}(k,s)G(p,s)G(q,s) \tag{51}$$

ただし $G(k,\tau)=\bar{G}(k,\tau)\tilde{G}(k,\tau)$ (52)

これらの方程式の解法を詳しく論ずる余裕がないので，要点だけを簡単に述べよう。

(49) の解の1つは

$$W(k) = K_0\, \epsilon^{2/3} k^{-11/3} \quad (K_0 : \text{Kolmogrov 定数}) \qquad (53)$$

で，これは Kolmogrov spectrum である。この解に対応する (50), (51) の解は次のように求められる。

$$\bar{G}(k,\tau) = (1+\bar{c}x)e^{-\bar{c}x} \qquad (54)$$

$$\tilde{G}(k,\tau) = (1+\tilde{c}x)e^{-\tilde{c}x} \qquad (55)$$

$$x = D\epsilon^{1/3}k^{2/3}\tau. \qquad (56)$$

ただし

$$D^2/K_0 = -\frac{3}{2\bar{c}}\int_0^\infty d\eta\, \eta^{-1/2}(1-\eta^{11/2})\int_{-1}^{1} d\mu\, \beta(\eta,\mu)\zeta^{-11/2}\int_0^\infty d\xi\, e^{-\bar{c}\xi}\tilde{G}(\xi)G(\eta\xi)G(\zeta\xi) \qquad (57)$$

$$D^2/K_0 = -\frac{3\tilde{a}}{4\tilde{c}}\int_0^\infty d\eta\, \eta^{-1/2}(1-\eta^{11/2})\int_{-1}^{1} d\mu\, \beta(\eta,\mu)\zeta^{-11/2}\int_0^\infty d\xi\, e^{-\tilde{c}\xi}\bar{G}(\xi)G(\eta\xi)G(\zeta\xi) \qquad (58)$$

$$\beta(\eta,\mu) = (1-\mu^2)(\mu+\eta^{3/2}/\zeta^3) \qquad (59)$$

$$\xi = D\epsilon^{1/3}k^{2/3}s\,, \quad \eta \doteq (p/k)^{2/3}, \quad \zeta = (q/k)^{2/3} \qquad (60)$$

から求まる K_0, D が正定値でなければならない。

(58) には未定定数 $\tilde{a}$ が含まれている。これについて考えよう。$v(k,t)$ は (3) から k と直交する複素ベクトルであることがわかる。つまり自由度は4である。したがって $v(k,t)$ の回転・位相の変化の自由度は3となる。もし回転・位相の変化1自由度が及ぼす $\tilde{G}(k,t)$ の減衰の割合が $\bar{G}(k,\tau)$ のそれと同じとすると $\tilde{G}(k,\tau)$ の減衰の割合は $\bar{G}(k,\tau)$ のそれの3倍となり，$\tilde{a}=12$ である。

エネルギー方程式(38)に(53)を代入し，定常性を考慮し，kについて0からk_i(慣性領域内のある波数)まで積分すると次式が得られる。

$$D/K_0^2 = \frac{9}{8}\int_0^1 d\eta\, \eta^{-1/2}(1-\eta^{11/2}) \ln \eta^{-1} \int_{-1}^1 d\mu\, \beta(\eta,\mu)\, \zeta^{-11/2} \int_0^\infty d\xi\, G(\xi) G(\eta\xi) G(\zeta\xi) \quad (61)$$

(57), (58), (61) を数値積分して K_0, D, $\bar{c}$, $\tilde{c}$ をおめると

$$K_0 = 1.42 \ , \ D = 0.555 \ , \ \bar{c} = 0.05 \ , \ \tilde{c} = 0.95 \qquad (62)$$

が得られる。K_0の値は妥当なものと考えられる。

7. 結び

Euler 座標系に依拠して定式化された，2つの応答関数を含む乱流方程式を定常乱流に適用して，Kolmogrov 則が導出された。これは理論の妥当性を示す一例証となるであろう。この理論の問題点は$\tilde{a}$の定め方が適切かどうかという点にあると思われる。この点は考慮する余地がありそうだ。

〈参考文献〉

1) R. H. Kraichnan, J. F. M. 5, 497 (1959)

2) R. H. Kraichnan, Phys. Fluids 8, 575 (1965)

3) R. H. Kraichnan, Phys. Fluids, 9 1728 (1966)

4) S. A. Orszag and M. D. Kruskal, Phys. Fluids 11 43 (1968)