数理解析研究所講究録
第 652 巻 1988 年 229-231

粒子の凝集過程と乱流との類似性

神戸大・理　高安秀樹

乱流現象に対する理論的解析のアプローチには大きく分けて二つの方法がある。ひとつは、基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式から出発する立場をとる方法で、各種の近似理論が開発されている。また、最近進歩の著しいコンピュータによる直接シミュレーションもこの前者の部類にいれても良い。もうひとつの立場は、難しい方程式を直接解くことをさけ、解きやすいモデルを作り、それに基づいた解析をする方法である。前者の立場は失敗は少なく正統派といえるが、大きな発展はなかなかしにくい。後者は、へたをすると全く意味のないことをしかねないが、うまくいけば乱流に対する新しい見方や概念を導入することができる。例えば、成功したモデルとしては、決定論によってランダムな振舞いを作り得ることを明らかにしたカオスのモデルと、乱流の間欠性を指摘したβモデルが挙げられる。ここでは、乱流と粒子の凝集過程がいろいろな点において似ていることを示し、凝集の問題が乱流のモデルとなりうることを示す。ことに、５／３乗則に代表されるベキ乗則がどうして成立するのか、という大きな問題に対する新しいアプローチとしての意義を強調したい。

乱流理論にはカスケードと呼ばれる概念がある。これは、岩石が破壊された場合のように大きな渦が次々と小さな渦に崩壊していく過程を乱流の本質であると考える考え方である。このような概念に基づくならば、凝集ではなくその反対の破壊の方が乱流と似ているのではないかと思うかもしれない。しかし、凝集と破壊とは表裏一体の場合があり、実際、カスケードを凝集過程と見なすことも可能である。渦度の分布に着目するならば、大きな渦とは渦度がある程度以上の値をもつ大きな領域であると考えても良いだろう。そう考えると、大きな渦が壊れて幾つかの小さな渦になるということは、大きな領域に散らばっていた渦度が幾つかの小さな領域に集まってくることに他ならないことがわかる。粘性が小さければ全体の渦度は近似的に保存されるので、結局、渦のカスケードとは渦度の凝集であるということができるわけである。

乱流と凝集の関連は、このような実空間に於ける対応だけではない。凝集過程の基礎方程式であるスモルコフスキー方程式は、次のように書ける。

$$\frac{d}{dt}a_k = \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} K_{ij}\, a_i a_j - a_k \cdot \sum_j K_{kj}\, a_j$$

ここで、a_kは大きさがkの粒子の密度を表わす。K_{ij}は大きさの異なる物同志が合体する頻度を表わす係数でいろいろな関数型を考えることができる。また、ナビエ・ストークス方程式は次のように書ける。

$$\frac{d}{dt}v_k = \sum_{i+j=k} M_{ij}\, v_i v_j - v_k \cdot \nu_k$$

ここでv_kは、速度場の波数がkの成分であり、M_{ij}は非線形項から決まる係数である。これらの方程式は、どちらも時間について一階の微分方程式であり、非線形項も全く同じ形をしていることに注目していただきたい。非線形項が共に畳み込みの形になっているのは、（１）式では大きさがｉとｊの粒子が合体して大きさｋ＝ｉ＋ｊの粒子になることに、また、（２）式では波数がｉとｊの成分から波数ｋ＝ｉ＋ｊの成分が作られることに起因している。最後の項の形が異なることは現象が違うのであるからやむを得ないことであるが、凝集過程に散逸（粒子が系の外に出て行く効果）も考えにいれれば、（１）式のほうにも$\nu_k v_k$という形の項がついてくるので、（１）式の最後の項は、（２）式にはないものであると考えたほうが良いかもしれない。

さて、このように凝集と乱流とは式の上でもよく似ていることがわかったのであるが、（１）式と（２）式には実は大きな違いもあるということを言わなければならない。それは、（１）式に於けるa_k，K_{ij}，ｋ，ｉ，ｊはどれも非負の数であるのに対し、（２）式ではv_k，M_{ij}は複素数、ｉ，ｊ，ｋは実数成分のベクトルであるということである。つまり、（２）式の方が方程式の定義されている空間が圧倒的に大きいわけである。しかし、（１）式は、定義されている空間が狭いだけに解析が容易で、次に示すように多くの性質が明らかにされている。[1]

①$K_{ij} \leq const. \cdot i^{\omega} j^{\omega}$,　$\omega < 1$　のとき、解は存在する。

②$K_{ij} \propto i^{\omega} j^{\omega}$,　$1/2 < \omega < 1$　のとき、有限時間のうちにゾル・ゲル相転移が起こり、ちょうど相転移点ではa_kは次のようなベキ乗則に従う。

$$a_k \propto k^{-\omega-3/2}$$

③$K_{ij} \propto i^{\mu} j^{\nu}$, 　の場合、次の条件を満たすときには相転移はない。

$$\mu > -1,\ \nu > -1,\ \mu+\nu > -1,\ |\mu-\nu| < -1$$

さらについ最近、次のようなこともわかった。[2]

④$K_{ij} \propto i^{\mu} j^{\nu} + i^{\nu} j^{\mu}$, 　の場合、系に小さな粒子を注入し続ければ相転移のあるなしにかかわらず漸近的に次のようなベキ分布が成立する。

$$a_k \propto k^{-(3+\mu+\nu)/2}$$

この④結果は、相当一般的にベキ分布が成立する条件を明らかにしているという点において重要である。これは、『散逸系において、注入を加え続けることによって系を定常的にすると、平衡系においてちょうどパラメータを臨界値に選んだことになり、ベキ分布が実現する』という筆者の主張する一般論[3]を裏付けている。

このように、凝集の問題については、（１）式を解析することによって様々なことがわかってきている。それでは、これらの結果はどうすれば乱流の問題に応用することができるであろうか？　（１）式の変数の取り得る空間を拡張していくことができれば一番いいのであるが、残念ながらまだそれはできていない。今のところは、凝集の問題から得られた知識を、定性的に当てはめるしかない。乱流を凝集からアプローチする立場をとるとき、最も興味深い問題は、ナビア・ストークス方程式の非線形項がゾル・ゲル転移を起こす範囲にあるのかどうかであろう。ゾル・ゲル転移を起こす領域にあるのならば、散逸項が無限に小さいとき、有限時間でベキ分布が実現するが、ゲルにならないような非線形項ならば、上に述べたようにインプットがなければ完全なベキ分布は実現しない。乱流の近似理論などによって、エネルギー散逸が有限時間のうちに起こりだすことが知られているが、このことはゾル・ゲル転移を起こしていると考えるとわかりやすい。（２）式は波数空間での式であるが、もしかすると、実空間でも渦がゾル・ゲル転移をしているかもしれない。このような推測を、なんらかの形で証明することができれば、乱流のベキ乗則は、今よりもずっとわかりやすいものになるのではないだろうか？

参考文献

1) M. H. Ernst, in 'Fractals in Physics'(Elsevier Sci. Pub. 1986), 289-.

2) 早川、山本、高安、　1987年春の物理学会、口頭発表。

3) 高安秀樹、月刊地球（海洋出版）91号、22-.